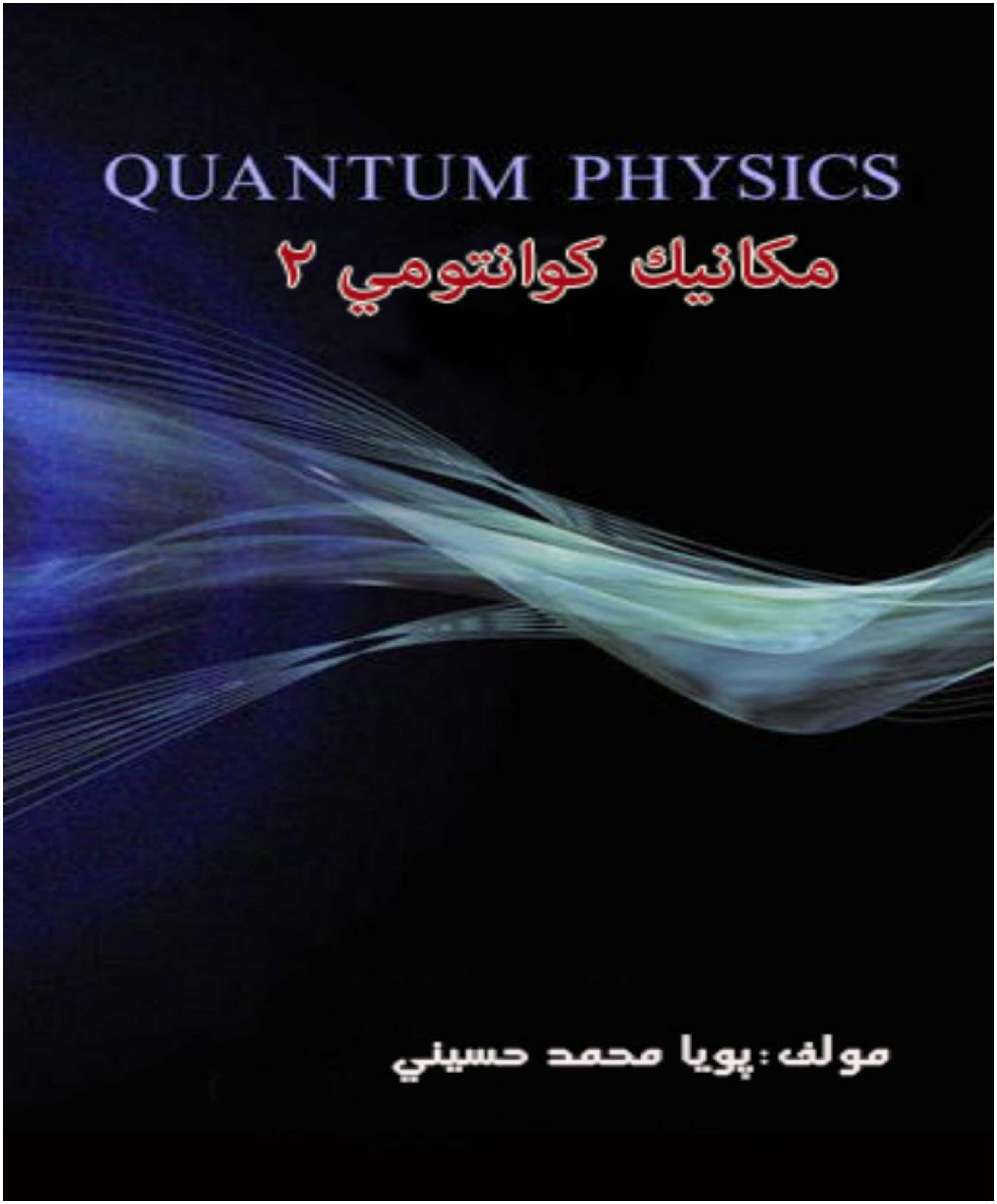

QUANTUM PHYSICS
مكانيك كوانتومي ۲
مولف: پويا محمد حسيني

بسم الله الرحمن الرحيم

مكانيك كوانتوم يكي از دروس اصلي رشته فيزيك در مقطع كارشناسي مي باشد كه به قوانين حاكم در دنياي اتمي مي پردازد همان طور كه مي دانيم براي توضيح جهان هاي ماكروسكوپيكي از مكانيك نيتوني بهره جستيم اما يافتيم كه قوانين نيتوني براي توضيح پديده هاي اتمي ناقص است بدين منظور مكانيك كوانتوم نظريه جامعي است كه هم دنياي ميكروسكوپيكي را توضيح مي دهد و هم دنياي ماكروسكوپيكي را تفسير مي كند

اين كتاب به نام مكانبك كوانتومي 2 تاليف شده است سعي شده با زباني روان و ساده مطالب توضيح داده شود دانشجويان عزيز از اين كتاب مي توانند براي امتحانات دانشگاه استفاده كنند سعي كرديم مثال ها را همراه جواب بياوريم و در اخر فصل تست هاي اموزشي ان فصل را با پاسخ قرار داديم اين تست ها فقط جنبه اموزشي داشته و به تثبيت مطالب كمك مي كند

اين كتاب بر اساس كتاب استيون گاسيوروويچ تاليف شده است و از حل مسايل ان نيز بهره برديم

اين اثر جايگزين كتاب مرجع نخواهد بود و دانشجويان عزيز از اين كتاب بعنوان خلاصه و تثبيت مطالب استفاده كنند

اين اثر خالي از اشكال نبوده در صورت پيشنهاد وانتقاد و در خواست از ايميل اينجانب به نشاني زير استفاده كنيد   باتشكر پويا محمد حسيني

Poia11137@gmail.com

مکانیک کوانتومی2

عملگر

المانی است که بر روی تابع موج تاثیر می گذارد و یک ویژه مقدار می دهد

به عنوان مثال عملگر هامیلتونی روی تابع موج تاثیر می گذارد و ویژه مقدار انرژی را می دهد

تابع موج

الکترون ها در فضا به صورت ذره ای نبوده و به صورت موج می باشند که به صورت تابع نشان داده می شوند

چگالی احتمال

مجذور تابع موج را چگالی احتمال می گوییم احتمال حضور الکترون در نقطه ای از فضا

اصل عدم قطعیت هایزنبرگ

اگر بتوان گفت مکان الکترون کجاست از تکانه ی ان غافل مانده ایم امکان اندازه گیری هر دو ان ها را نداریم

جابجا پذیری دو عملگر

اگر حاصل جابجایی دو عملگر صفر شود ان دو عملگر دارای یک ویژه مقدار بوده و می توان هردو را به طور همزمان اندازه گیری کرد یعنی مشاهده پذیرند

معادله شرودینگر

برای هر سیستم کوانتومی می توان یک معادله نوشت که با توجه به پتاسیل می باشد و می توان ان را حل نمود

هر تابع موج را می توان به دو قسمت شعاعی و کروی تقسیم نمود

حال به قسمت ریاضی مکانیک کوانتومی سفر می کنیم

$L_z \gamma_{\ell,m}(\theta,\varphi) = m\hbar \gamma_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ عملگر تکانه زاویه ای در راستای زدها

$L^2 \gamma_{\ell,m}(\theta,\varphi) = \ell(\ell+1)\hbar^2 \gamma_{\ell,m}(\theta,\varphi)$ عملگر مجذور تکانه زاویه ای

ممکن است در سول تابع موجی بدهند و بگویند اگر عملگری روی ان تاثیر بگذارد جواب چه می شود

$$\vec{L}=\frac{\hbar}{i}\left[\left(-\sin\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\hat{i}+\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\theta}-\cot\theta\sin\theta\right)\hat{j}+\frac{\partial}{\partial\varphi}\hat{k}\right]$$

اندازه حرکت بالا رونده و پایین رونده

$$\begin{cases}L_+=L_x+iL_y\\ L_-=L_x-iL_y\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}L_+{}^+=L_x-iL_y\\ L_-{}^+=L_+\end{cases}\Rightarrow(L_\pm)^+=L_\mp$$

$$\left[L_i,L_j\right]=i\hbar\xi_{ijk}L_k\Rightarrow\begin{cases}\left[L_x,L_y\right]=i\hbar L_z\\ \left[L_z,L_y\right]=i\hbar L_x\end{cases}$$

$$L_+L_-=\left(L_x+iL_y\right)\left(L_x-iL_y\right)=L_x{}^2+L_y{}^2-iL_xL_y+iL_yL_x=L_x{}^2+L_y{}^2+\hbar L_z\Rightarrow L_+L_-+L_z{}^2=L^2+\hbar L_z$$

$$\left[L_z,L_+\right]=\left[L_z,L_x+iL_y\right]=\left[L_z,L_x\right]+i\left[L_z,L_y\right]=i\hbar L_y+\hbar L_x=\hbar\left(L_x+iL_y\right)=\hbar L_+$$

$$\begin{cases}L_+\left|\gamma_{\ell m}\right\rangle=c_+\left|\gamma_{\ell,m+1}\right\rangle\\ L_+\left|\gamma_{\ell m}\right\rangle=c_+\left|\gamma_{\ell,m+1}\right\rangle\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left|\gamma_{\ell m}\right\rangle L_+{}^+=c_+{}^*\left|\gamma_{\ell,m+1}\right\rangle\\ \left|\gamma_{\ell m}\right\rangle L_-{}^+=c_-{}^*\left|\gamma_{\ell,m-1}\right\rangle\end{cases}$$

همانطور که می بینید ابتدا مقدار جابجایی دو عملگر را بدست اوردیم حا میدانیم اگر عملگر روی یک ویژه حالت تاثیر بگذارد یک بردار ویژه می دهد که در بالا با بالا رونده و پایین رونده نشان دادیم مقدار این دو برابر است با

$$c_+=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)\hbar^2-m(m+1)\hbar^2}=\hbar\sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}$$
$$c_-=\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)\hbar^2-m(m-1)\hbar^2}=\hbar\sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}$$

رابطه ی عدد کوانتومی ام و ال

$$\begin{cases}m=\ell\quad,\quad m=-\ell-1\quad(1)\quad-\ell-1\le m\le\ell\\ m=\ell\quad,\quad m=-\ell-1\quad(2)\quad-\ell\le m\le\ell+1\end{cases}\Rightarrow-\ell\le m\le+\ell$$

روابط مهم از این روابط برای اثبات قضایا استفاده می شود

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y \qquad L_x = \frac{L_+ + L_-}{2} \qquad L_y = \frac{L_+ - L_-}{2i}$$

عملگر هرمیتی

عملگری هرمیتی است که خودش با هرمیتش برابر باشد مانند عملگر هامیلتونی

عملگر هرمیتی داری ویژگي هایی می باشد که به شرح زیر می باشد

1) دارای ویژه مقدارهای حقیقی باشد.
2) رابطه تعامد برای ویژه توابع آن برقرار باشد.
3) هر تابع θ,φ را می‌توان بر حسب ویژه توابع مربوط به عملگر هرمیتی بسط داد.

هماهنگ کروی

همان طور که گفتیم تابع موج به دو قسمت تقسیم می شود قسمت شعاعی و کروی

قسمت کروی برابراست با

$$\gamma_{\ell,m} = \Theta_{\ell,m}(\theta)\Phi_m(\varphi)$$

که برای اعداد کوانتومی صفر و صفر و یک و یک داریم

$$\gamma_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \qquad \gamma_{11} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}} e^{i\varphi} \sin\theta$$

برای بدست اوردن رابطه بالا از فرمول های زیر استفاده کردیم

$$\gamma_{\ell,m}(\theta,\varphi) = (-1)^m \left[\frac{2\ell + \hbar}{4\pi} \cdot \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!}\right]^{1/2} p_1^m(\cos\theta) e^{im\varphi}$$

$$p_1^m(u) = (-1)^{\ell+m} \frac{(\ell+m)!}{(\ell-m)!} \frac{(1-u^2)^{\frac{-m}{2}}}{2^\ell \ell!} \left(\frac{d}{du}\right)^{\ell-m} (1-u^2)^\ell \qquad m \geq 0$$

$$p_\ell^{-m}(u)=(-1)^m\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}p_\ell^m(u)\qquad m\le 0$$

رابطه مهم

$$\gamma_{\ell,-m}=(-1)^m\gamma_{\ell,m}{}^*$$

$|C_{l,m}|^2$ احتمال اندازه گیری L^2, L_z در حالتهای مختلف ℓ, m :

$$\langle L_z\rangle=\sum_\ell\sum_m m\hbar|C_{l,m}|^2\qquad |\psi\rangle=\sum_\ell\sum_m C_{l,m}|\gamma_{\ell,m}\rangle$$

در اخر فصل به کاربرد دو رابطه بالا در حل مسایل مي پردازيم

دو رابطه بسیار مهم وجود دارد به نام رابطه تعامد و رابطه تمامیت که به شرح زیر می باشد

رابطه تعامد $\langle\gamma_{\ell',m'}|\gamma_{\ell,m}\rangle=\delta_{\ell,\ell'}\delta_{m.m'}$

رابطه تمامیت $\sum_\ell\sum_m|\gamma_{\ell,m}\rangle\langle\gamma_{\ell,m}|=1$

حال به خلاصه می پردازیم برای جابجایی عملگرها داریم

$$\begin{aligned}
[x, L_x] &= [x, yp_z - zp_y] = 0\\
[y, L_x] &= [y, yp_z - zp_y] = z[p_y, y] = -i\hbar z\\
[z, L_x] &= [z, yp_z - zp_y] = -y[p_z, z] = i\hbar y\\
[x, L_y] &= [x, zp_x - xp_z] = -z[p_x, x] = i\hbar z\\
[y, L_y] &= [y, zp_x - xp_z] = 0\\
[z, L_y] &= [z, zp_x - xp_z] = x[p_z, z] = -i\hbar x
\end{aligned}$$

برای هماهنگ های کروی داریم

$$
\begin{aligned}
Y_{۲,۲} &= \sqrt{\frac{۱۵}{۳۲\pi}}\, e^{۲i\phi} \sin^{۲}\theta = \sqrt{\frac{۱۵}{۳۲\pi}} (\cos ۲\phi + i \sin ۲\phi) \sin^{۲}\theta \\
&= \sqrt{\frac{۱۵}{۳۲\pi}} \left(\cos^{۲}\phi - \sin^{۲}\phi + ۲i \sin\phi\cos\phi\right) \sin^{۲}\theta \\
&= \sqrt{\frac{۱۵}{۳۲\pi}} \left(\frac{x^{۲} - y^{۲} + ۲ixy}{r^{۲}}\right) \\
Y_{۲,۱} &= -\sqrt{\frac{۱۵}{۸\pi}}\, e^{i\phi} \sin\theta\cos\theta = -\sqrt{\frac{۱۵}{۸\pi}}\, \frac{(x+iy)z}{r^{۲}}
\end{aligned}
$$

$$
Y_{۲,۰} = \sqrt{\frac{۵}{۱۶\pi}} (۳\cos^{۲}\theta - ۱) = \sqrt{\frac{۵}{۱۶\pi}} \left(\frac{۲z^{۲} - x^{۲} - y^{۲}}{r^{۲}}\right)
$$

در روابط بالا به جای مختصات دکارتی از مختصات قطبی استفاده کردیم با توجه به رابطه
این سه رابطه را همیشه بخاطر داشته باشید

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{r} &= \sin\theta\cos\phi \\
\frac{y}{r} &= \sin\theta\sin\phi \\
\frac{z}{r} &= \cos\theta
\end{aligned}
$$

این دو رابطه را همیشه بخاطر داشته باشید

$$\langle l,m_1|L_+|l,m_2\rangle = \hbar\sqrt{(l-m_2)(l+m_2+1)}\,\delta_{m_1,m_2+1}$$

$$\langle l,m_1|L_-|l,m_2\rangle = \hbar\sqrt{(l+m_2)(l-m_2+1)}\,\delta_{m_1,m_2-1}$$

۱- اگر ψ_{nlm} ویژه تابع انرژی اتم هیدروژن باشد مقدار میانگین عملگر L_x در این حالت چقدر است؟

۱. ۰

۲. $\sqrt{(l-m)(l-m+1)}\hbar$

۳. $m\hbar$

۴. $\frac{\hbar}{2}\sqrt{(l-m)(l+m-1)}$

۲- کدامیک از عملگرهای ذیل می تواند معرف یک کمیت مشاهده پذیر باشد؟

۱. $[L_x, L_y]$

۲. $x^2 p_x^2$

۳. $L_x L_y$

۴. $[L_+, L_-]$

۳- اگر تابع موج بهنجار یک الکترون در پتانسیل کولنی پروتون $\psi(r) = C(r^3 + r)e^{-ar^2}$ باشد، احتمال اینکه اندازه گیری:

۱. اندازه گیری L^2 صفر شود، برابر صفر است.

۲. اندازه گیری L^2 مقدار $2\hbar^2$ شود، یک است.

۳. اندازه گیری همزمان L^2, L_z صفر شود، صفر است.

۴. اندازه گیری همزمان L^2, L_z صفر شود، یک است.

۴- تابع موج الکترون در اتم هیدروژن عبارت است از $\phi = \frac{1}{\sqrt{11}}(\psi_{210} + \psi_{320} - 3\psi_{420})$ است. احتمال اندازه گیری کمیت L_z به مقدار صفر چیست؟

۱. $\frac{1}{1}$

۲. $\frac{1}{2}$

۳. $\frac{1}{3}$

۴. $\frac{1}{4}$

۵- جابه جاگر عملگرهای $[L_i, P^2]$ کدام است؟

۱. ۰

۲. L_i

۳. r_i

۴. P_i

۶- کدامیک از توابع ذیل در مختصات کروی ویژه تابع عملگر L_z است؟

۱. $\cot\varphi$

۲. $\tan\varphi \sin\theta\cos\varphi$

۳. $\tan\varphi$

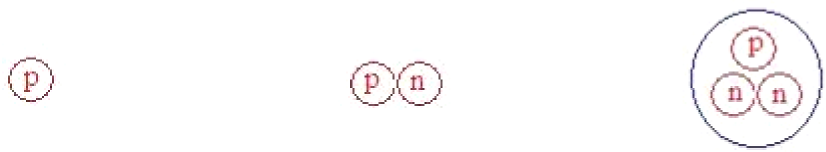
۴. $\sin\theta e^{i\varphi}$

ایزوتوپ

عناصری که اعداد اتمی یکسان اما عدد جرمی متفاوت دارند ایزوتوپ می نامند تفاوت ایزوتوپ ها در تعداد نوترون ها می باشد

ایزوتوپ اتم هیدروژن

$^{3}_{1}T$ (تري تيم) $\qquad$ $^{2}_{1}D$ (دوتريم) $\qquad$ $^{A-1}_{z-1}H$ (هيدروژن)



شکل اربیتال ها

$$\ell=2 \;\rightarrow D(Defues) \qquad \ell=0 \;\rightarrow S\ (Sharp)$$
$$\ell=3 \;\rightarrow F \qquad \ell=1 \;\rightarrow P\ (\Pr inciple)$$

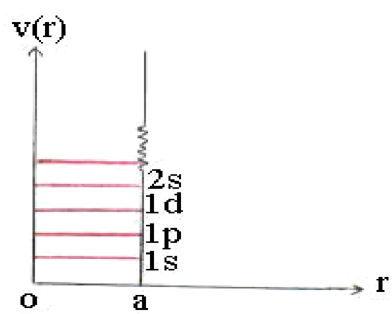
برای تابع موج می توان دو جواب یافت با عمق بی نهایت و با عمق محدود

برای عمق بی نهایت جواب به صورت تابع بسل می باشد داریم

$$R(r)=Aj_l(kr)$$

$j_1(kr)\,,\ \ell=1$ $\qquad$ 1S,1P,1D,2S,1F,2P,.... $\qquad$ تراز هايي که رخ ميدهد.

شکل تابع موج با عمق بی نهایت



چاه پتانسیل با عمق محدود

جواب در دو ناحیه برقرار است ناحیه اول مانند عمق بی نهایت بسل می باشد وناحیه دوم هنکل است

$$V_{eff}=-\frac{GmM}{r}+\frac{L^2}{2I} \qquad I=\mu r^2$$

$$V_{eff}=-\frac{kq_1q_2}{r}+\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$

رابطه سد گریز الکترون ها ست این رابطه سبب می شود که الکترون ها به هسته مقید باشند

$$\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}$$

همان طور که می دانیم اتم هیدروژن دارای یک الکترون می باشد و دارای یک پتانسیل است که فقط به شعاع چرخش بستگی دارد یعنی به قسمت شعاعی تابع موج بدین منظور می توان تابع موج را تشکیل داد. داریم

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right)R(r)+\frac{2\mu}{\hbar^2}\left(E+\frac{Ze^2}{r}-\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mu r^2}\right)R(r)=0$$

✓ **حل معادله بخش شعاعی شرودینگر برای اتم هیدروژن**

هدف ما بدست اوردن تابع موج وبا تاثیر عملگر هامیلتونی بر ان مقدار انرژی است

معادله ی قسمت شعاعی برابر است با

$$\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{dR}{d\rho}-\frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2}R(r)+\left(\frac{\lambda}{\rho}-\frac{1}{4}\right)R=0$$

که لاندا و رو برابراست با

$$if \quad E\langle 0 \quad \Rightarrow \quad \rho=2\left(\frac{2\mu|E|}{\hbar^2}\right)^{1/2}r$$

$$\lambda=Z\alpha\left(\frac{2\mu c}{\hbar^2}\right)^{1/2}=\frac{Ze^2}{\hbar}\left(\frac{\mu}{2|E|}\right)^{1/2}$$ ✓

رفتار مجانبی

1) رفتار مجانبی برای ρ های بزرگ (یا r های بزرگ)

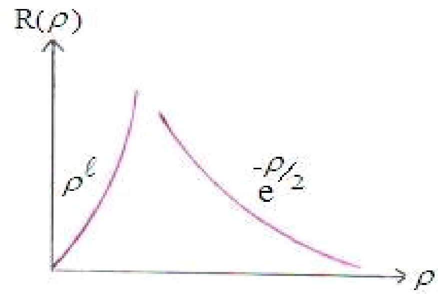
2) رفتار مجانبی برای ρ های کوچک (یا r های کوچک)

حالت(1) را بررسی می‌کنیم:

$$\rho \to \infty$$

$$\frac{d^2R}{d\rho^2} - \frac{1}{4}R \approx 0 \quad \Rightarrow R \propto e^{-\rho/2}$$

شکل نمودارچنین می شود



حالت (2) را بررسی می‌کنیم:

$$\rho \to 0$$

$$\frac{d^2H}{d\rho^2} - \left(\frac{2\ell + 2}{\rho} - 1\right)\frac{dH}{d\rho} + \left(\frac{\lambda - 1 - \ell}{\rho}\right)H = 0$$

که اچ یک سری توانی می باشد چیزی که شما باید بدانید جواب ان به صورت رابطه بازگشتی می باشد

مقدار انرژی اتم هیدروژن به صورت زیر محاسبه می شود

$$E_n = -\frac{1}{2}\mu c^2\left(\frac{z\alpha}{n}\right)^2 \quad n = 1 \Rightarrow E_1 = -13.6\,(ev)$$

تبهگنی

ناتبهگن	$\{۱,۱,۱\} \to ۳$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۱,۱,۲\},\{۱,۲,۱\},\{۲,۱,۱\} \to ۶$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۱,۲,۲\},\{۲,۱,۲\},\{۲,۲,۱\} \to ۹$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۳,۱,۱\},\{۱,۳,۱\},\{۱,۱,۳\} \to ۱۱$
ناتبهگن	$\{۲,۲,۲\} \to ۱۲$
تبهگنی شش گانه	$\{۱,۲,۳\},\{۱,۳,۲\},\{۲,۱,۳\},\{۲,۳,۱\},\{۳,۱,۲\},\{۳,۲,۱\} \to ۱۴$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۲,۲,۳\},\{۲,۳,۲\},\{۳,۲,۲\} \to ۱۷$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۱,۱,۴\},\{۱,۴,۱\},\{۴,۱,۱\} \to ۱۸$
تبهگنی سه‌گانه	$\{۱,۳,۳\},\{۳,۱,۳\},\{۳,۳,۱\} \to ۱۹$
تبهگنی شش گانه	$\{۱,۲,۴\},\{۱,۴,۲\},\{۲,۱,۴\},\{۲,۴,۱\},\{۴,۱,۲\},\{۴,۲,۱\} \to ۲۱$

اگر دو تابع موج دارای یک ویژه مقدار باشند این دو نسبت به هم تبهگنند.

$$\begin{aligned} E &= E_{n_۱} + E_{n_۲} + E_{n_۳} \\ &= \frac{\hbar^۲ \pi^۲}{۲ m a^۲}(n_۱^۲ + n_۲^۲ + n_۳^۲) \end{aligned}$$

نوسانگر هماهنگ

$$E = \hbar\omega\left(n_۱ + n_۲ + n_۳ + \frac{۳}{۲}\right)$$

که برای رابطه بالا داریم

تبهگنی	ویژه‌مقدار انرژی	$\{n_1, n_2, n_3\}$
۱	۳/۲	(۰, ۰, ۰)
۳	۵/۲	(۰, ۰, ۱), ...
٦	۷/۲	(۰, ۱, ۱), (۰, ۰, ۲), ...
۱۰	۹/۲	(۱, ۱, ۱), (۰, ۰, ۳), (۰, ۱, ۲), ...
۱۵	۱۱/۲	(۱, ۱, ۲), (۰, ۰, ۴), (۰, ۲, ۲), (۰, ۱, ۳)
		(۰, ۰, ۵), (۰, ۱, ۴), (۰, ۲, ۳), (۱, ۲, ۲)
۲۱	۱۳/۲	(۱, ۱, ۳)
		(۰, ۰, ٦), (۰, ۱, ۵), (۰, ۲, ۴), (۰, ۳, ۳)
۲۸	۱۵/۲	(۱, ۱, ۴), (۱, ۲, ۳), (۲, ۲, ۲)
		(۰, ۰, ۷), (۰, ۱, ٦), (۰, ۲, ۵), (۰, ۳, ۴)
۳٦	۱۷/۲	(۱, ۱, ۵), (۱, ۲, ۴), (۱, ۳, ۳), (۲, ۲, ۳)
		(۰, ۰, ۸), (۰, ۱, ۷), (۰, ۲, ٦), (۰, ۳, ۵)
		(۰, ۴, ۴), (۱, ۱, ٦), (۱, ۲, ۵), (۱, ۳, ۴)
۴۵	۱۹/۲	(۲, ۲, ۴), (۲, ۳, ۳)
		(۰, ۰, ۹), (۰, ۱, ۸), (۰, ۲, ۷), (۰, ۳, ٦)
		(۰, ۴, ۵), (۱, ۱, ۷), (۱, ۲, ٦), (۱, ۳, ۵)
۵۵	۲۱/۲	(۱, ۴, ۴), (۲, ۲, ۵), (۲, ۳, ۴), (۳, ۳, ۳)

$$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}) \right\rangle = 0$$

$$\langle [H, (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})] \rangle = 0$$

$$\left[\frac{1}{2m}p_i p_i + V(r),\ x_j p_j\right] = \frac{1}{m}(-i\hbar)p^2 + i\hbar x_j \frac{\partial V}{\partial x_j}$$
$$= -i\hbar\left(\frac{p^2}{m} - \mathbf{r}\cdot\nabla V(\mathbf{r})\right)$$

$$\left\langle \frac{\mathbf{p}^2}{m} \right\rangle = \langle \mathbf{r}\cdot\nabla V(\mathbf{r}) \rangle$$

رابطه های فوق را به خاطر داشته باشید

چگالی احتمال شعاعی

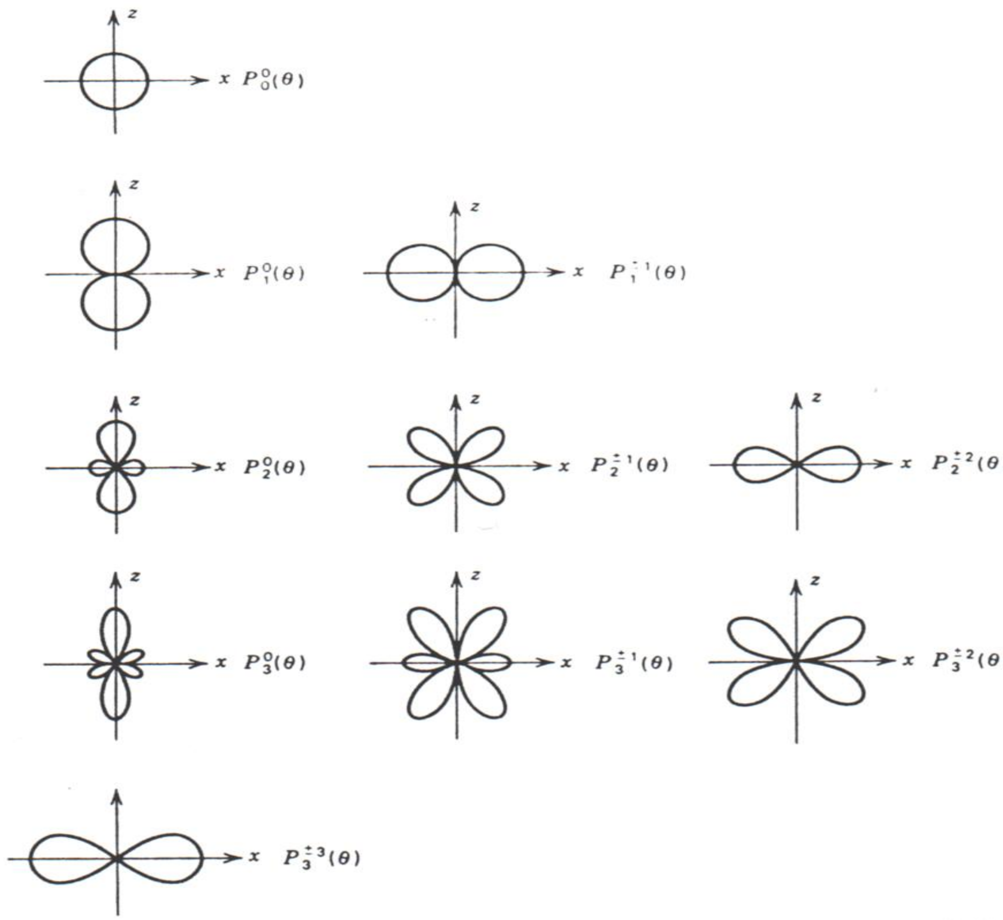
احتمال حضور الکترون است اگر از تابع موج روی فضا انتگرال بگیریم مقدار انتگرال قسمت کروی برابر یک می شود و احتمال حضور الکترون تنها تابع شعاعی است پس داریم

$$\int |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 dv = \int_{total\ space} r^2 |R(r)|^2 |\gamma_{\ell,m}(\theta,\varphi)|^2 dr\, d\Omega = 1$$

$$\int |\psi(r,\theta,\varphi)|^2 dv = \int_{\Omega} r^2 |R(r)|^2 |\gamma_{\ell,m}(\theta,\varphi)|^2 dr\, d\Omega = r^2 |R(r)|^2 dr \int |\gamma_{\ell,m}(\theta,\varphi)|^2 d\Omega \Rightarrow$$

$$know \quad \int |\gamma_{\ell,m}(\theta,\varphi)|^2 d\Omega = 1 \quad \Rightarrow \qquad p_r = r^2 |R(r)|^2$$

احتمال حضور الکترون



حال به تست های این فصل می پردازیم

۱- کدام یک از توابع موج زیر می تواند تابع موج کل توصیف الکترون در اتم هیدروژن باشد؟

۱. سه تایی YX ۲. تک تایی YX ۳. سه تایی YX ۴. تک تایی YX

۲- برای یک ملکول سه اتمی که تنها می تواند دوران کند هامیلتونی بصورت $H=\frac{L_z^2}{2I}$ است انرژی این سیستم برابر است با:؟(m عددصحیح)

۱. $\frac{\hbar^2 m^2}{2I}$ ۲. $\frac{\hbar^2 m^2}{I}$ ۳. $\frac{\hbar^2 m^2}{3I}$ ۴. $\frac{9\hbar^2 m^2}{2I}$

۳- تابع موج شعاعی اتم هیدروژن R_{21} فرض شود مقدار چشم داشتی $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{a_0}$ ۲. $\frac{1}{4a_0}$ ۳. $\frac{1}{2a_0}$ ۴. صفر

۴- کدام‌یک از مجموعه‌های زیر که بیان گر اعداد کوانتمی (n,l,m) برای اتم هیدروژن است غیرممکن می‌باشد؟

۱. $(2,1,-1)$ ۲. $(3,1,-1)$ ۳. $(3,1,-2)$ ۴. $(3,2,-2)$

۵- در اثر بهنجار زیمن تبهگنی تراز $n=2$ (اولین حالت برانگیخته) چند گانه است؟

۱. ۱   ۲. ۲   ۳. ۳   ۴. ۴

۶- اگر اتم هیدروژن در یک میدان مغناطیسی ثابت $\vec{B}=B_0\,\hat{j}$ قرار داشته باشد، کدام گروه از عملگرهای زیر می تواند جزء عملگرهای همزمان جابجا شونده باشند؟

۱. H,L^2,L_z ۲. H,L^2,L_x ۳. H,L_z,L_y ۴. H,L^2,L_y

برهمکنش الکترون با میدان مغناطیسی

چهار معادله حاکم برنیروی الکترومغناطیس که به معادلات ماکسول مشهورند عبارت اندز

$$1)\vec{\nabla}.\vec{B}(\vec{r},t)=0$$

$$2)\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}(\vec{r},t)}{\partial t}=0$$

$$3)\vec{\nabla}.\vec{E}(\vec{r},t)=4\pi\rho(\vec{r},t)$$

$$4)\vec{\nabla}\times\vec{B}(\vec{r},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t}=\frac{4\pi}{c}j(\vec{r},t)$$

که به ترتیب به قانون عدم وجود تک قطبی و قانون فارادی وقانون گاوس و قانون امپر مشهورند

پتانسیل دو گونه می باشد پتانسیل نرده ای و برداری

رابطه بین پتانسیل نرده ای و برداری

$$\vec{E}(\vec{r},t)=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t}-\vec{\nabla}\Phi(\vec{r},t)$$

تبدیلات پیمانه ای

اگرپتانسل نرده ای و برداری که با في و آ نشان داديم منحصر به فرد نباشند تبدیل پیمانه ای می باشد

$$\vec{A}'(\vec{r},t)=\vec{A}(\vec{r},t)-\vec{\nabla}f(\vec{r},t)$$

$$\Phi'(\vec{r},t)=\Phi(\vec{r},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial f(\vec{r},t)}{\partial t}$$

معادله کلی الکترون در حضور میدان الکترومغناطیسی

$$-\nabla^2\Phi(\vec{r},t)-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}.\vec{A})=4\pi\rho(\vec{r},t)$$

$$-\nabla^2 A(\vec{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2}+\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right)=\frac{4\pi}{c}j(\vec{r},t)$$

تبدیل کولنی

الف) اگر توزیع بار ایستا باشد Stationary State یعنی چگالی ρ مستقل از زمان باشد بهتر است پیمانه را طوری انتخاب کنیم :

$$\vec{\nabla}.\vec{A}(\vec{r},t)=0$$

رابطه پتاسیل نرده ای و برداری چنین می شود

$$\begin{cases}(a): & -\nabla^2\Phi(\vec{r},t)=4\pi\rho(\vec{r})\\(b): & -\nabla^2 A(\vec{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}j(\vec{r},t)\end{cases}$$

تبدیل لورنتس

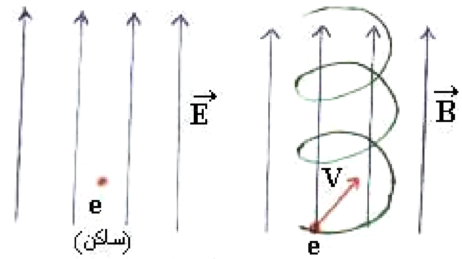
ب) اگر توزیع بار غیر ایستا nonstationary State باشد در این صورت بهتر است پیمانه را طوری انتخاب کنیم که

$$\vec{\nabla}.\vec{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}=0$$

که رابطه پتانسیل نرده ای و برداری داریم

$$\begin{cases}(a): & -\nabla^2\Phi(\vec{r},t)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=-4\pi\rho(\vec{r})\\(b): & -\nabla^2 A(\vec{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}(\vec{r},t)}{\partial t^2}=-\frac{4\pi}{c}j(\vec{r},t)\end{cases}$$

الکترون در حضور میدان الکتریکی و میدان مغناطیسی



الکترون در حضور میدان مغناطیسی به صورت مارپیچ حرکت می کند اگر بخواهیم معادله ان را بنویسیم داریم

$$\vec{F} = \mu \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -e\left[\vec{E}(r,t) + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}(r,t)\right]$$

$\vec{P} \to \left[\vec{P} + \frac{e}{c}\ \vec{A}(r,t)\right]$ در حضور میدان مغناطیسی

به طور کلی تکانه در حضور میدان تغییر میکند و اگر سوالی از ما خواست که هامیلتونی چه میشود باید بجای تکانه تبدیل ان را قرار داد

بدین صورت

$$\vec{H} = \frac{P^2}{2\mu} = \frac{1}{2\mu}\left[\vec{P} + \frac{e}{c}\vec{A}(r,t)\right]^2 - e\phi(r)$$

$p_{op} = \frac{\hbar}{i}\vec{\nabla} + \frac{e}{c}\vec{A}$ اپراتوراندازه حرکت

معادله الکترون در حضور میدان الکترو مغناطیسی

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2\psi \underbrace{-\frac{ie\hbar}{\mu c}\vec{A}.\left(\vec{\nabla}\psi\right)}_{(1)} + \underbrace{\frac{e^2}{2\mu c^2}A^2\psi}_{(2)} = \left[E + e\phi(r)\right]\psi(r,t)$$

که تنها جمله اول در اثر زیمان عادی تاثیر دارد به طوری که اگر میدان مغناطیسی بزرگ باشد نمی توان از جمله دوم صرف نظر کرد

بررسی جملات (1)و(2) مغناطیسی:

$$(1)\ \frac{ie\hbar}{2\mu c}\vec{r}\times\vec{B}\cdot\vec{\nabla}\psi=-\frac{ie\hbar}{2\mu c}\vec{B}\cdot(\vec{r}\times\vec{\nabla})\psi=\vec{B}\cdot\left(\vec{r}\times\overbrace{\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}}^{\vec{P}}\right)\psi=\frac{e}{2\mu c}\vec{B}\cdot\vec{L}\psi$$

$$(2)\frac{e^2}{8\mu C^2}(\vec{r}\times\vec{B})^2\psi=\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}\left[r^2B^2-(r\cdot B)^2\right]\psi=\frac{e^2}{8\mu e^2}\left[(x^2+y^2+z^2)B^2-(xB_x+yB_y+zB_z)^2\right]$$

$$\Rightarrow(2)=\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}(x^2+y^2)\psi$$ درراستای محور Z

که رابطه الکترون اتم هیدروژن به صورت زیر می شود

$$H=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2+\frac{e}{2\mu c}\vec{B}\cdot\vec{L}+\frac{e^2B^2}{8\mu c^2}(x^2+y^2)-e\Phi(r)$$

رابطه ی بالا را همیشه به خاطر داشته باشید

همان طور که می دانیم الکترون ها در اتم هیدروژن به دور هسته می چرخند و داری ممان می باشند

μ ممان(گشتاور) دو قطبی مغناطیسی، i جریان، A در مساحت مدار

$\mu=iA$

در بالا چرخش الکترون ها را به صورت حلقه ی جریان فرض کردیم

انرژی پتاسیل الکترون برابر است با

$$u=-\vec{\mu}\circ\vec{B}$$

$$U=-\vec{\mu}\circ\mathbf{B}$$

گشتاور دو قطبی مغناطیسی الکترون

$$\vec{\mu}_\ell=-\frac{g_\ell e}{2m_0c}\vec{L}\quad,\quad\vec{\mu}_s=-\frac{g_s e}{2m_0c}\vec{S}$$

$$g_\ell=1\quad,\qquad g_s=2\cdot0024\cong2$$

در رابطه فوق از جمله اول معادله ی برهمکنش الکترون با میدان مغناطیسی استفاده کردیم

اثرزیمان عادی

اگر الکترونی در یک میدان مغناطیسی کوچک قرار بگیرد خطوط ان به سه تراز شکسته می شود

هامیلتونی سیستم که همان الکترون می باشد برابر است با

$$H = H_0 + H_1$$

همان طور که می بینید از جمله دوم صرف نظر کردیم اگر میدان بزرگ باشد نمی توان از آن جمله صرف نظر کرد

داریم

$$H = \frac{-\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + \frac{e}{2mc}\vec{B}\circ\vec{L}$$

برای چنین الکترونی بسامدی تعریف می کنیم این بسامد بسامد لامور است

$$\frac{e}{2mc}BL_z = \omega L_z$$

که اگر بخواهیم ویژه مقدار ان را بدست اوریم داریم

$$H\psi_{n\ell m} = E\psi_{n\ell m} = \left[-\frac{1}{2}\mu c^2\left(\frac{z\alpha}{n}\right)^2 + m\hbar w\right]\psi \quad , \quad \omega L_z = \omega m\hbar$$

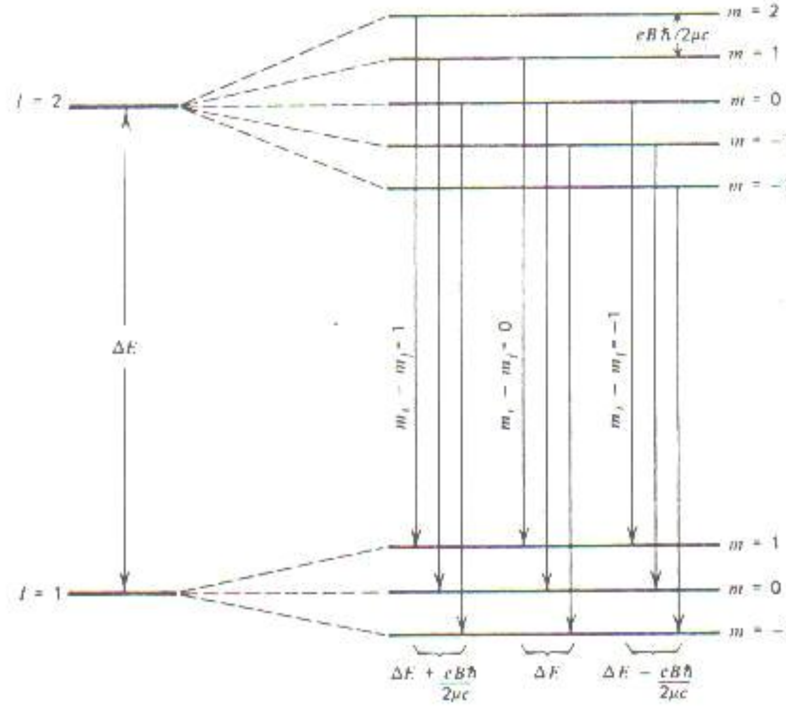
که مقدار انرژی برابر است با

$$E = \left[-\frac{1}{2}\mu c^2\left(\frac{z\alpha}{n}\right)^2 + m\hbar w\right]$$

واگنی برابر است با

$$(2\ell + 1)$$

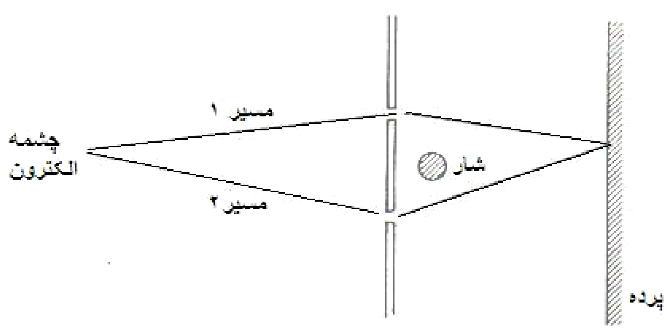
شکل کلی اثر زیمان این گونه است که



اصل انطباق

این اصل به ما می گوید نتایج کلاسیک و نتایج مکانیک کوانتوم یکسان است که انرژی جنبشی دورانی و شعاع دوران با این اصل کاملا سازگارند

اثر بوهم آهارانوف



در واقع دراثر وجود میدان B یک فازی ایجاد می شود که باعث جایه جا شدن الگوی تداخلی روی پرده میشود . مثلا بعد از برقراری $\vec{B}$ ، نقاط تاریک و روشن جابه جا می‌شود

$$\psi=\psi_1 e^{\frac{ie}{\hbar c}\int \vec{A}\cdot d\vec{r}}+\psi_2 e^{\frac{ie}{\hbar c}\int \vec{A}\cdot d\vec{r}}$$

که دو حالت زیر را داریم

$$if \quad \phi=0 \Rightarrow \psi=\psi_1+\psi_2$$
$$if \quad \phi=0 \Rightarrow \psi=\psi_1-\psi_2$$

کوانتیزه بودن شار مغناطیسی

شار هم مانند انرژی کوانتیده است اگر دو تابع موج را در نظر بگیریم و رابطه ی زیر برقرار باشد

$$\left[\frac{1}{2\mu}\left(\frac{\hbar}{i}\vec{\nabla}+\frac{e}{c}\vec{A}+\frac{e}{c}\vec{\nabla}f\right)^2-e\phi\right]\psi'=E\psi' \quad , \quad |\psi|^2=|\psi'|^2$$

رابطه ی بین دو تابع موج به صورتی است که یک اختلاف فاز ایجاد می کند

$$\psi' \to e^{i\Lambda(r,t)}\psi(r,t)$$

که برای عامل فاز داریم

$$\Lambda=-\frac{e}{\hbar c}f$$

رابطه کوانتیده شارمغناطیسی

$$\Rightarrow \phi=\frac{2\pi\hbar c}{e}n \quad , \quad n=\circ,\pm1,\pm2,\ldots$$

این عامل فازسبب تداخل های سازنده و ویرانگر در ازمایش یانگ می شود

حال به تست ها پاسخ می دهیم

۷- در پدیده بهنجار زیمان چند گذار مجاز بین حالت های $l=0$ و $l=1$ وجود دارد؟

۱. 4 ۲. 3 ۳. 2 ۴. 1

۸- ذره ای به جرم m به یک سرمیله صلب بدون جرمی به طول ثابت R متصل شده است. سردیگر میله در مبداء ثابت است، ومیله می تواند آزادانه حول این نقطه ثابت بچرخد. هامیلتونی دستگاه کدام است؟

۱. $\frac{L^2}{2I}$ ۲. $\frac{L^2}{I}$ ۳. $\frac{I}{L^2}$ ۴. $\frac{2I}{L^2}$

روش پرداختن به مکانیک کوانتوم یکی از طریق روش شرودینگر بود که در آن تابع موج شرط پیوستگی و نهایتا معادله شرودینگر بررسی شد.

دومین روش، روش هایزنبرگ بود که یک دسته از اعداد کاملا مفصل که در آرایه هایی به نام ماتریس منظم شده بودند استفاده کرد که نتایج دقیقا مانند نتایج شرودینگر بود

مکانیک کوانتومی ماتریسی ←هایزنبرگ

مکانیک کوانتومی موجی ←شرودینگر

در این فصل می خواهیم با اعمال اپراتورها به شکل ماتریسی مقدار ویژها را به شکل ماتریسی بدست اوریم

همان طور که می دانیم ویژه حالت نوسانگر هماهنگ به صورت زیر است

$$u_n = \frac{1}{(n!)^{1/2}} \left(A^t\right)^n u_0$$

دوعملگر مهم دیگر که در این فصل از شکل ماتریسی ان استفاده می کنیم

$$A^t u_n = \sqrt{(n+1)}\, u_{n+1} \qquad A u_n = \sqrt{n}\, u_{n-1}$$

و عملگر همیشگی ما یعنی

$$\langle u_m | H | u_n \rangle = \left(n + \frac{1}{2} \right) \omega \delta_{mn}$$

شکل ماتریسی عملگر همیلتونی به صورت زیر است بازای

N=0-1-2-.....

$$H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 5/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 7/2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

$$A^t=\begin{pmatrix}0&0&0&0&\dots\\ \sqrt{1}&0&0&0&\dots\\ 0&\sqrt{2}&0&0&\dots\\ 0&0&\sqrt{3}&0&\dots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix},\ A^t=\begin{pmatrix}0&\sqrt{1}&0&0&\dots\\ 0&0&\sqrt{2}&0&\dots\\ 0&0&0&\sqrt{3}&\dots\\ 0&0&0&0&\dots\\ \vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\end{pmatrix}$$

هدف نوشتن L_z بصورت ماتریس برای عملگرهای تکانه زاویه ای l=0 به دست می‌آوریم.

$$\langle \ell,m'|L_z|\ell,m\rangle = m_\ell \hbar \delta_{mm'} \quad L_z=\hbar\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

$$|\ell,m\rangle=\gamma_{\ell m}(\theta,\varphi),\quad \langle \ell,m'|L_z|\ell,m\rangle=\hbar[\ell(\ell+1)-m(m\pm1)]^{\frac{1}{2}}\delta_{m',m\pm1}$$

تمرین

L_+,L_- را برای $\ell=1$ بنویسید.

$$\ell=1\rightarrow m=-1,0,+1$$

که برای عملگر بالا رونده به طرف راست شیفت می دهیم و برای عملگر پایین رونده به پایین شیفت مي دهیم داریم

$$L_+=\hbar\begin{pmatrix}0&\sqrt{2}&0\\0&0&\sqrt{2}\\0&0&0\end{pmatrix}\quad,\quad L_-=\hbar\begin{pmatrix}0&0&0\\ \sqrt{2}&0&0\\0&\sqrt{2}&0\end{pmatrix}$$

a : مقدار ویژه، $A\psi=a\psi$

که آ بزرگ یک عملگر ماتریسی مانند مجذور تکانه زاویه ای می باشد

مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس زیر را پیدا کنید؟

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

حل:

$$A\Psi = a\Psi \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{vmatrix}$$

$$Au = a1u \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-a & 0 & -2 \\ 0 & -a & 0 \\ -2 & 0 & 4-a \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-a)(4-a)(-a) - 0 + (-2)(-2a) = 0 \Rightarrow a = 0,5,0$$

اعداد0،5،0 جزء مقادیر ویژه به حساب می آیند.

$$a_1 = 0 \Rightarrow |u^0\rangle \to a_2 = 5 \Rightarrow |u^5\rangle \to a_2 = 0 \Rightarrow |u^0\rangle$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 - 2\alpha_3 = 0 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_3 = 0 \end{matrix}$$

این دو معادله یکی است

$$\alpha_1 = 2\alpha_3$$

$$\alpha_2 = 0, \alpha_3 = 1 \to \alpha_1 = 2 \Rightarrow |u_1^{(0)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$a_2 = 5 \Rightarrow |u_2^{(5)}\rangle = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} \Rightarrow A|u\rangle = 5|u\rangle \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-5 & 0 & -2 \\ 0 & -5 & 0 \\ -2 & 0 & 4-5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha_3 = -2\alpha_1,$$

$$\alpha_2 = 0, \alpha_3 = -2$$

$$|u^5\rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix} \Rightarrow |u_3^{(0)}\rangle$$

برای بدست اوردن ویژه حالات تبهگنی که ویژه مقدار یکسان دارد از رابطه تعامد استفاده می کنیم

$$\langle u_1 | u_3 \rangle = 0 \Rightarrow \left| u_3^{(0)} \right\rangle = \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \langle u_1 | u_3 \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} = 0$$

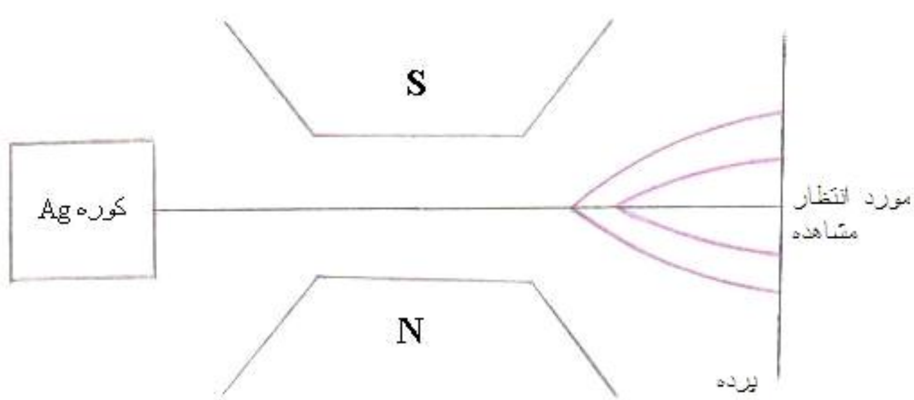
اسپین الکترون

برای فرمیونها که دارای اسپین نیم صحیح هستند اصل طرد پائولی صدق می کند ، یعنی هیچ دو الکترونی با اسپین یکسان نمی توانند در یک مدار قرار بگیرند . الکترونی که به دور خود حرکت میکند ایجاد یک میدان مغناطیسی ذاتی میکند . اسپین نسبت به میدان خارجی ، تنها دو جهت دارد .

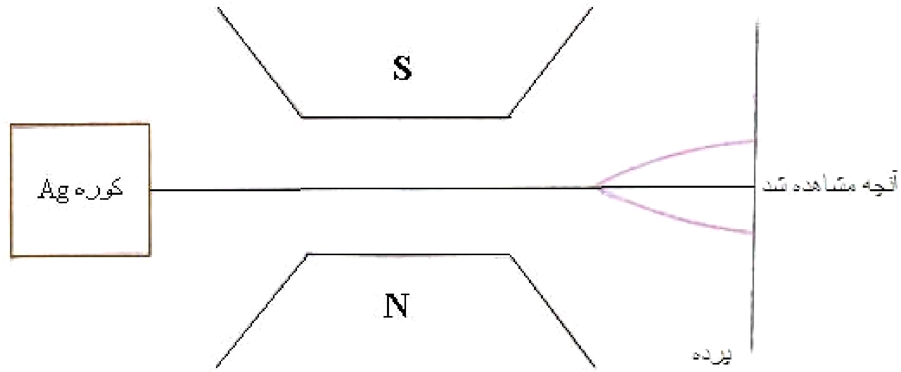
آزمایش اشترن- گرلاخ

این ازمایش به کشف اسپین منجر شد

بجای سه الی پنج لکه دو لکه روی پرده مشاهده شد



اما چنین مشاهده شد



سدیم دارای دو خط زرد می باشد با طول موج های مختلف که قبل از ازمایش گرلاخ و کشف اسپین هیچگونه توجیهی نداشت یعنی ساختار ریز

همانند تکانه زاویه ای برای اسپین الکترون داریم

$$|S| = \sqrt{S(S+1)}\hbar \qquad S_z \to m_s\hbar \qquad -s \le m_s \le +s$$

$$s = \frac{1}{2} \;\Rightarrow\; m_s = \pm\frac{1}{2}$$

σ

ماتریسهای پائولی

$$S_x = \hbar\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \;,\; S_y = \hbar\begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix} \;,\; S_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\sigma_z \quad , \quad [\sigma_z, \sigma_x] = 2i\sigma_y \quad , \quad [\sigma_y, \sigma_z] = 2i\sigma_x$$

اگر دو عملگر با هم جا به جا نشوند :

اولا : ویژه تابع مشترک ندارند .

ثانیا : اندازه گیری همزمان هر دو امکان ندارد زیرا اصل عدم قطعیت در مورد آنهاصدق نمی کند.

این فصل یکی از سوال خیز ترین فصل می باشد بدین منطور به حل تمرین می پردازیم

مثال :

بردارهای ویژه اپراتور را به دست آورید ؟

$$s_z = \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$s_z \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{\hbar}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \pm \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} u \\ -v \end{bmatrix} = \pm 1 \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \qquad \begin{cases} if\ \lambda = +1 \rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ if\ \lambda = -1 \rightarrow \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\chi_+ = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad a_1 = +\frac{\hbar}{2}$$

$$\chi_- = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad a_2 = -\frac{\hbar}{2} \quad \rightarrow \quad \left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \middle| \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = 0$$

حرکت تقدیمی

کره زمین سه حرکت دارد حرکت اسپینی که به دور خودش است که باعث وقوع روز و شب می شود

حرکت انتقالی که به دور خورشید می باشد که باعث وقوع ماه و سال می شود

حرکت تقدیمی که زمین از محور خود به سمت ستاره قطبی نزدیک می شود که هر26000 سال یکبار می باشد این حرکت حرکت تقدیمی است

دو رابطه بسیار مهم

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{۲m\omega}}\,(A + A^{\dagger})$$

$$p = i\sqrt{\frac{m\hbar\omega}{۲}}\,(A^{\dagger} - A)$$

این دو رابطه فوق در حل مسایل به ما خیلی کمک خواهد کرد

۷– ماتریس هرمیتی زیر مفروض است:

$$A = \begin{pmatrix} -۳ & \sqrt{\frac{۱۹}{۴}}\,e^{i\pi/۳} \\ \sqrt{\frac{۱۹}{۴}}\,e^{-i\pi/۳} & ۶ \end{pmatrix}$$

(الف) ویژه‌مقادیر را پیدا کنید.

(ب) ویژه‌بردارها را پیدا کنید.

(ج) ماتریس U را پیدا کنید که A را قطری می‌کند.

در نظر بگیرید

$$\begin{pmatrix} -۳ & \sqrt{\frac{۱۹}{۴}}\,e^{i\pi/۳} \\ \sqrt{\frac{۱۹}{۴}}\,e^{-i\pi/۳} & ۶ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} u_۱ \\ u_۲ \end{pmatrix}$$

حل:

$$(\lambda + ۳) + \sqrt{\frac{۱۹}{۴}} e^{i\pi/۳} u_۲ = ۰$$

$$\sqrt{\frac{۱۹}{۴}} e^{-i\pi/۳} + (٦ - \lambda) u_۲ = ۰$$

(الف) از تقسیم این دو معادله بر هم نتیجه می‌شود

$$(\lambda + ۳)(٦ - \lambda) = -\frac{۱۹}{۴}$$

ریشه‌های این معادله برابرند با ۷/۲− = λ و ۱۳/۲ = λ. مقدار $u_۲$ به‌ازای هریک از این ویژه‌مقادیر برابر است با

$$u_۲(-۷/۲) = \frac{۱}{\sqrt{۱۹}} e^{-i\pi/۳}, \quad u_۲(۱۳/۲) = -\sqrt{۱۹} e^{-i\pi/۳}$$

(ب) ویژه‌بردارهای بهنجار عبارت‌اند از

$$\frac{۱}{\sqrt{۲۰}} \begin{pmatrix} \sqrt{۱۹} \\ -e^{-i\pi/۳} \end{pmatrix}, \quad \frac{۱}{\sqrt{۲۰}} \begin{pmatrix} e^{i\pi/۳} \\ \sqrt{۱۹} \end{pmatrix}$$

به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که این دو ویژه‌بردار متعامدند.

(ج) بنابر معادلهٔ (۹—۵۵) متن کتاب، ماتریسی که ماتریس این مسئله را قطری می‌کند برابر است با

$$U = \frac{۱}{\sqrt{۲۰}} \begin{pmatrix} ۱ & -\sqrt{۱۹} e^{i\pi/۳} \\ \sqrt{۱۹} e^{-i\pi/۳} & ۱ \end{pmatrix}$$

به آسانی ثابت می‌شود که

$$U^\dagger A U = \begin{pmatrix} \frac{۱۳}{۲} & ۰ \\ ۰ & -\frac{۷}{۲} \end{pmatrix}$$

حال به تست های این بخش می پردازیم

۹- ذره‌ای با اسپین $\frac{1}{2}$ در لحظه $t=0$ در حالت $\psi(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ قرار دارد این ذره را در یک میدان مغناطیسی ثابت $B=(0,0,B)$ قرار می دهیم مقدار چشم داشتی $< S_y^2 >$ در لحظه t کدام است؟

۱. صفر
۲. $\frac{\hbar^2}{4}\cos^2 wt$
۳. $\frac{\hbar^2}{4}$
۴. $\frac{\hbar^2}{4}\sin^2 wt$

۱۰- پروتونی در ویژه حالت عملگر S_y قرار دارد. احتمال اینکه در اندازه‌گیری عملگر S_x مقدار $\frac{\hbar}{2}$ به دست آید، چقدر است؟

۱. $\frac{1}{2}$
۲. 0
۳. $-\frac{1}{2}$
۴. 1

۱۱- ویژه مقادیر عملگر $\hbar\omega\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$ کدام است؟

۱. $\hbar\omega, 2\hbar\omega$
۲. $\hbar\omega, 4\hbar\omega$
۳. $\hbar\omega, 0$
۴. $\hbar\omega, 3\hbar\omega$

۱۲- دو ذره بدون اسپین با اندازه حرکت های زاویه‌ای $l_2=3$ ، $l_1=1$ در نظر می‌گیریم. مجموع تعداد حالات ممکن برای اندازه حرکت زاویه‌ای کل برابر کدام است؟

۱. ۷
۲. ۹
۳. ۲۱
۴. ۱۳

۱۳- اثر اسپین مدار در اتم هیدروژن در کدام یک از حالت های زیر تأثیری ندارد؟

۱. اوربیتال $S\ (l=0)$
۲. اوربیتال $p\ (l=1)$
۳. اوربیتال $d\ (l=2)$
۴. اوربیتال $F\ (l=3)$

۱۴- حالت تک تایه برای سیستم متشکل از دو ذره اسپینی با اسپین $\frac{1}{2}$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}-\chi_+^{(2)})$
۲. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}+\chi_+^{(2)})$
۳. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}-\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})$
۴. $\frac{1}{\sqrt{2}}(\chi_+^{(1)}\chi_-^{(2)}+\chi_-^{(1)}\chi_+^{(2)})$

این فصل به جمع اندازه حرکت زاویه ای می پردازیم

و در اخر به اختلال مرتبه اول و سپس به اختلال مرتبه دوم می پردازیم

به طوری که با یک مثال بخش اختلال را شرح می دهیم

اسپین دو الکترون به صورت زیر وجود دارد

$$S = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$$\left|\vec{S}_1 - \vec{S}_2\right| \le S \le S_1 + S_2 \qquad S_1 = \frac{1}{2} \quad , \quad S_2 = \frac{1}{2}$$

که این رابطه اسپین کل می باشد

$$\Rightarrow S = 0,1 \quad 0 \le S \le 1$$

حالت های اسپینی یا سه گانه است یا یگانه

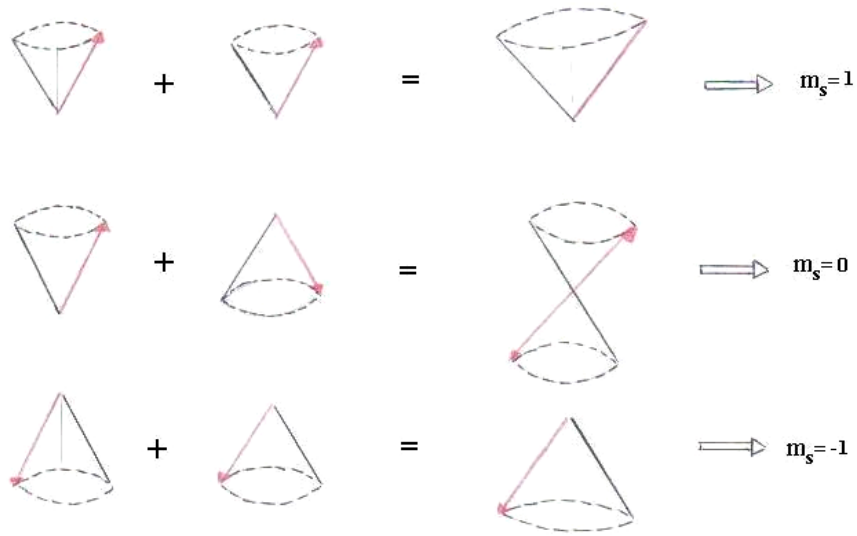
به طور خلاصه می توان گفت که حالت سه گانه متقارن و فرد می باشد

و حالت یگانه پاد متقارن و زوج می باشد

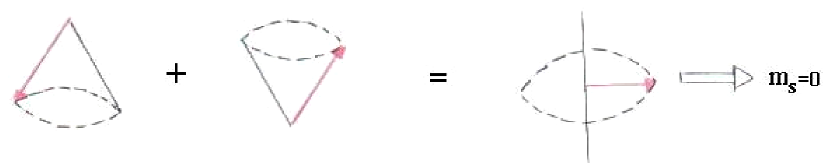
داریم

$$if \quad S = 1 \Rightarrow m_s = \begin{cases} 1 & |1,1\rangle \\ 0 & |1,0\rangle \\ -1 & |1,-1\rangle \end{cases} \quad , \quad |S, m_s\rangle \Rightarrow triplet$$

برای سه گانه داریم



برای یگانه داریم $|0,0\rangle$ $\uparrow\downarrow$



نکته

فرمیون ها پاد متقارنند و تابع ان ها زوج می باشد و سه گانه اند و تکانه ی انان نیم صحیح می باشد و از طرد پاولی پیروی می کنند

برای سه گانه داریم

$$|1,0\rangle = \left(X_+^{(1)}X_-^{(2)} + X_+^{(2)}X_-^{(1)}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$|1,1\rangle$

$$\frac{1}{\sqrt{۲}}(\chi_{+}^{(۱)}+\chi_{+}^{(۲)})$$

وبرای 1و-1 تنها رابطه فوق بالا رونده پایین رونده می شود

$$\frac{1}{\sqrt{۲}}(\chi_{+}^{(۱)}-\chi_{+}^{(۲)}) \quad ^{۰}$$

برای یگانه تنها داریم

$$|0,0\rangle=\left(X_{+}^{(1)}X_{-}^{(2)}-X_{+}^{(2)}X_{-}^{(1)}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$$

جمع اسپین $\frac{1}{2}$ و تکانه زاویه‌ای مداری

آنچه در کاربردهای بعدی اهمیت فراوان دارد ترکیب ا سپین با تکانه زاویه‌ای مداری ا ست. چون L وابسته به مختصات فضایی است و S نیست، با هم جابه‌جا می‌شوند:

$$[L,S]=0$$

بنابر این بدیهی است که مولفه‌های تکانه زاویه‌ای کل J که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{J}=\vec{S}+\vec{L}$$

حال با ذکر مثال اختلال مرتبه اول و دوم را شرح می دهیم

در اختلال ما با جابجایی انرژی سرو کار داریم

به طوری که اختلال به انرژی پایه سیستم اضافه می شود و تراز را جابه جا می کند

۶– اختلال

$$V = \lambda x^{4}$$

را به هامیلتونی نوسانگر هماهنگ ساده یک بعدی

$$H_{0} = \frac{p^{2}}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^{2}x^{2}$$

اضافه کرده‌ایم. جابجایی انرژی حالت پایه این نوسانگر هماهنگ یک بعدی را حساب کنید.

$$\lambda\langle 0|x^{4}|0\rangle = \lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{2}\langle 0|(A+A^{\dagger})(A+A^{\dagger})(A+A^{\dagger})(A+A^{\dagger})|0\rangle$$

المان ماتریسی برابر است با

$$\begin{aligned}
\langle 0|(A+A^{\dagger})(A+A^{\dagger})(A+A^{\dagger})(A+A^{\dagger})|0\rangle &= \langle 0|A^{\dagger}(A+A^{\dagger})(A+A^{\dagger})A^{\dagger}|0\rangle \\
&= \langle 1|(A+A^{\dagger})(A+A^{\dagger})|1\rangle \\
&= [\langle 0| + \sqrt{2}\langle 2|][|0\rangle + \sqrt{2}|2\rangle] \\
&= 3
\end{aligned}$$

بنابراین جابجایی انرژی برابر است با

$$\Delta E = 3\lambda\left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^{2}$$

به‌آسانی می‌توان دید که محاسبهٔ انتگرال زیر نیز به نتیجهٔ یکسانی می‌انجامد

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx(\lambda x^{4})\left[\left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{1/4} e^{-m\omega x^{2}/2\hbar}\right]$$

به طور کلی برای حل مسایل اختلال باید دو رابطه را در نظر داشته باشیم

$$E_n^{(1)} = \lambda \langle n|x^2|n\rangle = \lambda \left(\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\right)^2 \lambda \langle n|(A+A^\dagger)(A+A^\dagger)|n\rangle$$

$$E_n^{(2)} = \lambda^2 \left(\frac{\hbar}{2m\omega}\right)^2 \sum_{n\neq m} \frac{\left\langle n\left|(A+A^\dagger)^2\right|m\right\rangle \left\langle m\left|(A+A^\dagger)^2\right|n\right\rangle}{\hbar\omega(n-m)}$$

اثر اشتارک

کاربردی از نظریه اختلال در یک مســـئله واقعی، تاثیر میدان الکتریکی خارجی بر ترازهای انرژی اتمهای هیدروژن گونه را بررسی می‌کنیم، این پدیده را اثر اشتارک می‌نامند. در اثر اشتارک اتم در میدان الکتریکی است ولی در اثر زیمان اتم در میدان مغناطیسی است.

مقدار جا به جایی انرژی برای اختلال مرتبه اول صفر
مقدار جابه جایی انرژی برای مرتبه دوم برابرست با $-e\varepsilon z$

حال به تست های این فصل می پردازیم

۱۵- اثر اشتارک تا مرتبه اول اختلال در اتم هیدروژن برای کدام حالت اتفاق می‌افتد؟

۱. حالات غیر تبهگن
۲. حالت تبهگن
۳. حالت پایه
۴. برای تمام حالات که شامل حالت پایه هم شود.

۱۶- الکترونی با بار e و جرم m_e مقید است روی دایره‌ای به شعاع a حرکت کند. این الکترون توسط یک میدان الکتریکی E که ثابت و در صفحه دایره است مختل می‌شود. تصحیحات ویژه مقادیر انرژی تا مرتبه اول اختلال کدام است؟

۱. صفر
۲. $-eEa$
۳. eEa
۴. $\frac{eEa}{۲}$

۱۷- قاعده جمع توماس - رایشه- کوهن در اختلال مستقل از زمان کدام است؟

۱. $\sum_n (E_n - E_a)\left|\langle n|x|a\rangle\right|$
۲. $\sum_n (E_n - E_a)\left|\langle n|x|a\rangle\right|^۲$
۳. $\sum_n (E_n + E_a)\left|\langle n|x|a\rangle\right|$
۴. $\sum_n (E_n + E_a)\left|\langle n|x|a\rangle\right|^۲$

۱۸- مرتبه بزرگی تصحیح نسبی ناشی از جرم کاهیده الکترون در اتم هیدروژن چقدر است؟

۱. $۱۰^{-۵}$
۲. $۱۰^{-۴}$
۳. $۱۰^{-۶}$
۴. صفر

۱۹- اتم هیدروژن را در یک میدان مغناطیسی قوی قرار می‌دهیم (پدیده پاشن باخ) تراز $n = ۳$ و $l = ۲$ به چند تراز تجزیه می‌گردد؟

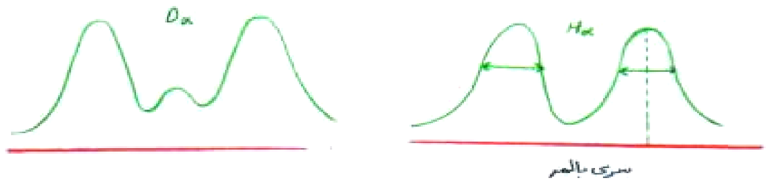
۱. ۱۸
۲. ۱۲
۳. ۸
۴. ۷

اتم هیدروژن واقعی

اتم های هیدوژن گونه اتم هایی هستند که یک الکترون دارند به طور کلی یون سدیم نیز یک اتم هیدروژنگونه است بدان صورت که تعداد پرتون هایش یکی بیشتر از الکترون هایش است و می توان ان را هیدروژن گونه فرض کرد...

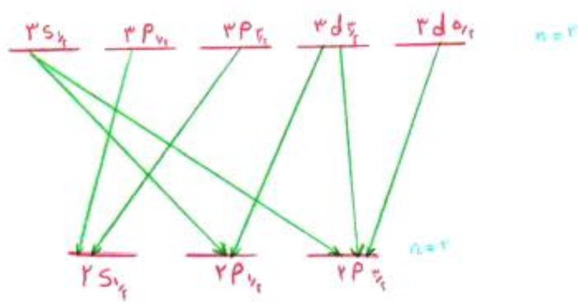
اثراتی را که درباره اتم هیدروژن واقعی باید در نظر بگیریم عبارتند از:

- اثر نسبیتی واثر اسپین مدار(fine structure)
- اثر اسپین مدار (Hyper fine structure)



ساختار ریز اتم

ساختار ریز اتم



نیز یک n=2 یک انرژی وترازهای n=3 اگر همه این ترازها دارای یک انرژی باشند یعنی تمام ترازهای انرژی دارند بنابراین باید یک طول موج به ما بدهند در صورتیکه اینطور نیست و این به این دلیل است که د رواقع تمام این ترازها دارای یک انرژی نیستند و از مکان خود بالا و پائین تر قرار می‌گیرند .

الف) تصحیح اثر نسبیتی

باعث حذف جمله دوم می شود که کار را برای ما ساده تر می کند

$$\frac{p_e^{\,2}}{2m}+\frac{p_p^2}{2M}\to\frac{p^2}{2\mu}+\underbrace{\frac{p^2{}_{cm}}{2(m+M)}}_{0}\Leftrightarrow F_{ext}=0$$

جمله ای که می ماند حرکت نسبی است به همین دلیل بدان اثر نسبیتی گویند

بنابراین $H^{(1)}$ با اثر نسبیتی به صورت زیر در می‌آید:

$$H^{(1)}=-\frac{1}{8}\frac{\left(P^2\right)^2}{m^3c^2}$$

ب) اثر مغناطیسی(اثر اسپین مدار)

اثر اسپین مدار درداخل هسته هم وجود دارد که منشا نیروی هسته‌ای است اما درون اتم منشا آن نیروهای الکترومغناطیسی . الکترون دارای اسپین $\frac{1}{2}$ است و چون باردار است، دارای یک ممان دو قطبی مغناطیسی به صورت $\vec{m}_s=-\frac{g_s e}{2m_e c^2}\vec{s}$ ، $g_s\approx 2$ است.

مقدارهمیلتونی مرتبه دوم برابر است با

$$H^{(2)}=-\vec{M}_e\cdot\vec{B}=\frac{e}{m_e c}\vec{S}\cdot\vec{B}=\frac{e}{mc^2}\vec{S}\cdot\vec{V}\times\vec{E}=-\frac{e}{m^2c^2}\vec{S}\cdot\vec{P}\times\vec{\nabla}\phi(r)=-\frac{e}{m^2c^2}\vec{S}\cdot\vec{P}\times\left(\frac{\vec{r}}{r}\frac{d\varphi}{dr}\right)$$

$$\to H^2=\frac{1}{2m^2c^2}\vec{S}\cdot\vec{L}\frac{1}{r}\frac{d\left[e\varphi(r)\right]}{dr}$$

بررسی ساختار ریز اتم

اثراسپین مدار+اثر نسبیتی با استفاده از روش اختلال :

$$H^{(1)} = \frac{-1}{8}\frac{\left(p^2\right)^2}{m^3c^2} \langle H^{(1)}\rangle = \langle \varphi_{nlm}\left|H^{(1)}\right|\varphi_{nlm}\rangle = ?$$

$$H^{(1)} \cdots\cdots H_0 \cdots\cdots \varphi_{nlm}$$

φ_{nlm} ویژه توابع H_0 هستند نه $H^{(1)}$

بررسی اثر مغناطیسی

که اگر جمله دوم را فقط در نطر بگیریم مقدار جابجایی برابر است با

$$\langle H^2\rangle = \Delta E^{(2)} = \frac{1}{4}mc^2\left(z \propto\right)^4 \frac{\begin{Bmatrix} l \\ -l-1 \end{Bmatrix}}{n^3 l\left(l+\frac{1}{2}\right)\left(l+1\right)}$$

$$\Delta E = \Delta E^{(1)} + \Delta E^{(2)} \Rightarrow \Delta E = \frac{-1}{2}mc^2\left(z\alpha\right)^4 \frac{1}{n^3}\left[\frac{1}{j+\frac{1}{2}} - \frac{3}{4\pi}\right]$$

اثر لمب- رادرفورد

رادرفورد حتی باکوانتوم نسبیتی قابل توصیف نیست وتوسط تئوری الکترودینامیک ← اثر لمب قابل پیش بینی استQEDکوانتومی

Vaccum quantizaticn

اطراف یک بار (الکترون یا پروتون) ابری از الکترون ها و پوزیترون ها قرار دارند،حال اگر بگوییم دراین محفظه فقط یک بار وجود دارد پس این ابری را که بوجود می‌آورد قانون بقای جرم رانقص می‌کند در صورتیکه نقص قانون بقای جرم نداریم.

نکته

هم در اثر بیهنجار و بهنجار میدان مغناطیسی خارجی است باید ذکر کرد که در اثر اشتارک میدان الکتریکی برقرار است

در اثر بی هنجار اسپین وارد می شود به طوری که در ساختار ریز تکانه مداری الکترون با اسپین الکترون هم پوشانی می کنند اما در ساختار فوق ریز تکانه مداری هسته و اسپین هسته هم پوشانی می کنند

برای اثر بی هنجار داریم

$$(1)\quad S=0 \rightarrow H^{(1)}=-\vec{M}_l \cdot \vec{B}$$
$$(2)\quad S\neq 0 \rightarrow H^{(1)}=-\vec{M}_l \cdot \vec{B}-\vec{M}_S \cdot \vec{B}$$

$$\vec{M}_L=\frac{-g_l e}{2mc}\vec{L}, g_l \approx 1 \quad , \quad \vec{M}_S=-\frac{g_S e}{2mc}\vec{S}, g_S \approx 2$$

$$H^{(1)}=\frac{e}{2mc}\left(\vec{L}+2\vec{S}\right)\cdot \vec{B}$$

اثر بی هنجار زیمن تراز ها را به اندازه زیر جابه جا می کند

$$\Delta E=\frac{e\hbar B}{2mc} mj\left(1 \pm \frac{1}{2l+1}\right)_{j=l\pm\frac{1}{2}}$$

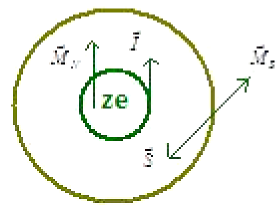
ساختار فوق ریز (Hyper fine Structure)

شکافتگی های بسیار ریز نزدیک به هم را د راتم را بررسی می‌کند

1891تداخل سنج مایکلیسون

1924پاولی:هسته ها اسین دارند ممان مغناطیسی.

در ساختار ریز همان هسته $\vec{M}_n$ و الکترون $\vec{M}_s$ روی هم اثر می‌کند.



مقدار جابه جایی تراز در ساختار فوق ریز برابر است با

$$\Rightarrow \Delta E = \langle H^{(1)} \rangle = \alpha \frac{1}{2} \begin{cases} I & F=1 \\ -I-1 & F=0 \end{cases}$$

ساختار فوق ریز دلیلی است که ما طول موج اتم هیدروژن را 21 سانتی متر مشاهده می کنیم