تعیین تابع شکست مواد معدنی با استفاده از نرم افزار BFDS

علی اصغر یوسفی*[۱]، مهدی ایران‌نژاد[۲]، اکبر فرزانگان[۳]

۱- کارشناس ارشد استخراج معدن – پایگاه ملی داده‌های علو زمین کشور

۲- عضو هیأت علمی دانشگاه صنعتی امیر کبیر

۳- عضو هیأت علمی دانشگاه کاشان

E-mail: yousefi@ngdir.ir

چکیده

پارامترهای اصلی در مدلسازی آسیا عبارتند از توابع شکست (Breakage Function)، توزیع زمان ماند (RTD) و انتخاب (Selection Function) که تعیین آنها برای شبیه‌سازی توزیع دانه‌بندی محصول آسیا لازم است. نرم‌افزار BFDS (Breakage Function Determination Software) به منظور تسهیل انجام محاسبات مربوط به تخمین تابع شکست و انتخاب توسعه داده شده است.

این نرم‌افزار بر مبنای روش‌های محاسباتی بقوبه (Berube)، هربست و فیورستنا (Herbst & Fuerstenau) و روش اصلاح شدهH&F توسعه داده شده است. در این روش‌ها که بر میزان مواد باقی‌مانده روی سرند یا میزان تجمعی باقی مانده یا عبور کرده از سرند در زمان‌های معین مبتنی هستند، پارامترهای نرخ تولید ذرات نرمه، تابع انتخاب و پارامترهای رگرسیونی بدست می آید که با استفاده از این پارامترها تابع شکست محاسبه می‌شود.

نرم افزار BFDS که در محیط ویندوز اجرا می‌شود دارای قابلیت‌هایی نظیر سرعت اجرای بالا، کاربری آسان، راهنمای جامع، جستجوی پارامترهای رگرسیونی غیر خطی و امکانات پرینت نتایج به صورت انتخابی می‌باشد. این نرم‌افزار با نرم‌افزارهای OLD BREAK و Excel مقایسه شده است که نتایج بدست آمده نشان‌گر صحت و دقت این نرم‌افزار است.

کلمات کلیدی فارسی : تابع شکست ، تابع انتخاب ، آسیا ، خردایش

۱- مقدمه

عملیات آسیاکردن یکی از مهمترین و در عین حال پر هزینه‌ترین مراحل فرآوری مواد معدنی است که حدود ٪۷۰ از انرژی مصرفی کارخانه را به خود اختصاص می دهد. از سوی دیگر به دلیل تأثیر بسیار زیاد دانه‌بنـدی

* فلکه دوم صادقیه – بلوار شهدای صادقیه شمالی – شماره ٦ کد پستی : ١٤٦١٦٥٥٦٩٤

محصول آسیا بر فرآیندهای بعدی ، غالباً این محصول بایستی دارای خصوصیات از پیش تعیین شده‌ای از نظر توزیع دانه‌بندی باشد. بنابراین بهینه‌سازی آسیاها برای دستیابی به محصول با کیفیت مورد نظر مـی توانـد از اولین اهداف در بالابردن کیفیت عملکرد در کارخانه باشد. از عواملی که در کارایی آسیاها دخالت دارنـد و در بهینه سازی باید مورد توجه قرار گیرند می‌تـوان بـه گلولـه‌هـا (تعـداد، ابعـاد و دانسـیته) ، نـوع آسـتر، نـرخ خوراک‌دهی و دبی پالپ اشاره کرد. بررسی تأثیر این پارامترها بصورت "درخط" (online) بسـیار وقـت گیـر و پرهزینه است. از این رو برای بهینه‌سازی آسیاها از تکنیک‌های مدلسازی ریاضـی و شـبیه‌سـازی کـامپیوتری استفاده می‌گردد. در همین رابطه برای انجام محاسبات تعیـین تـابع شکسـت کـه از ملزومـات شـبیه سـازی ریاضی است استفاده از رایانه ضروری است. در این راستا نرم‌افزار BFDS توسـعه داده شـده اسـت. نتـایج بـه دست آمده از این نرم‌افزار با نرم‌افزارهای OLD BREAK (که توسط محققـین کانـادایی تهیـه شـده اسـت)، Excel و Quatro pro مقایسه شده است. نتایج بدست آمده از مقایسه BFDS با این نرم‌افزارها نشان مـی‌دهـد نتایج چهار نرم‌افزار کاملاً با یکدیگر مطابقت دارد.

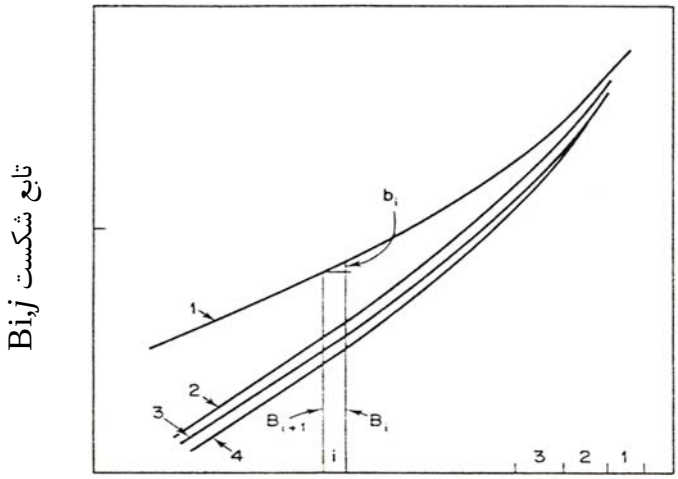
۲- روش تحقیق

۲-۱- تعریف تابع توزیع شکست

تابع شکست تجمعی که با $B_{i,j}$ نشان داده می‌شود ، نسبتی از مواد با ابعادj است کـه وقتـی یـک‌بـار شکسـته می‌شوند به ابعاد کوچک‌تر از i می‌رسند. i, j معرف طبقات سرندی هستند و بنابراین بـازه‌ای از انـدازه ذره به جای اندازه یک ذره خاص در نظر گرفتـه مـی‌شـود. $B_{i,j}$ بـه عنـوان تـابع شکسـت تجمعـی(Cumulative Breakage Function) نامیده می‌شود و در مقابل تـابع شکسـت غیـر تجمعـی(Non-Cumulative Breakage Function)، $b_{i,j}$ ، بصورت نسبتی از مواد که پس از شکسته شدن از اندازه j در طبقه اندازه i ظاهر می گردد تعریف می‌شود. بنابراین مقدار$b_{i,j}$ از رابطه (۱) قابل محاسبه است [۱].

$$b_{i,j} = B_{i-1,j} - B_{i,j} \qquad (۱)$$

تغییرات تابع شکست نسبت به ابعاد ذرات در شکل (۱) برای مواد معدنی مختلف نشان داده شده است. مقادیر تابع شکست در مقیاس نیمه لگاریتمی رسم شده است. همان‌طور که در این شکل معلوم است، شکل‌کلی منحنی تابع شکست برای مواد مختلف نسبت به ابعاد ذرات در تمام موارد مشابه است.



شکل۱- تغییرات تابع شکست نسبت به اندازه ذرات ۱-کلینکر سیمان
۲- سیلیکون کاربید ۳- آنتراسیت ۴- کوارتز [۱]

برخی شواهد تجربی وجود دارد که نشان می دهد در بسیاری از موارد تابع شکست نرمال‌شونده (Normalizable) است، بدین معنی که تابع شکست متناسب با نسبت اندازه‌های بالایی فاصله‌های ابعادی i, j است و داریم [۱]:

$$B_{i,j} = B_{i+1,j+1} = B_{i+k,j+k} \qquad (۲)$$

همچنین نشان داده شده است که تابع توزیع شکست مستقل از متغیرهای قطر آسیا، چگالی گلوله ها و مقدار بار گلوله‌ها (دامنه محدود) است.

بنابراین تابع شکست تقریباً مستقل از شرایط عملیاتی است و می توان مقادیر محاسبه شده در آزمایشگاه را مستقیماً در شرایط واقعی به کار برد.

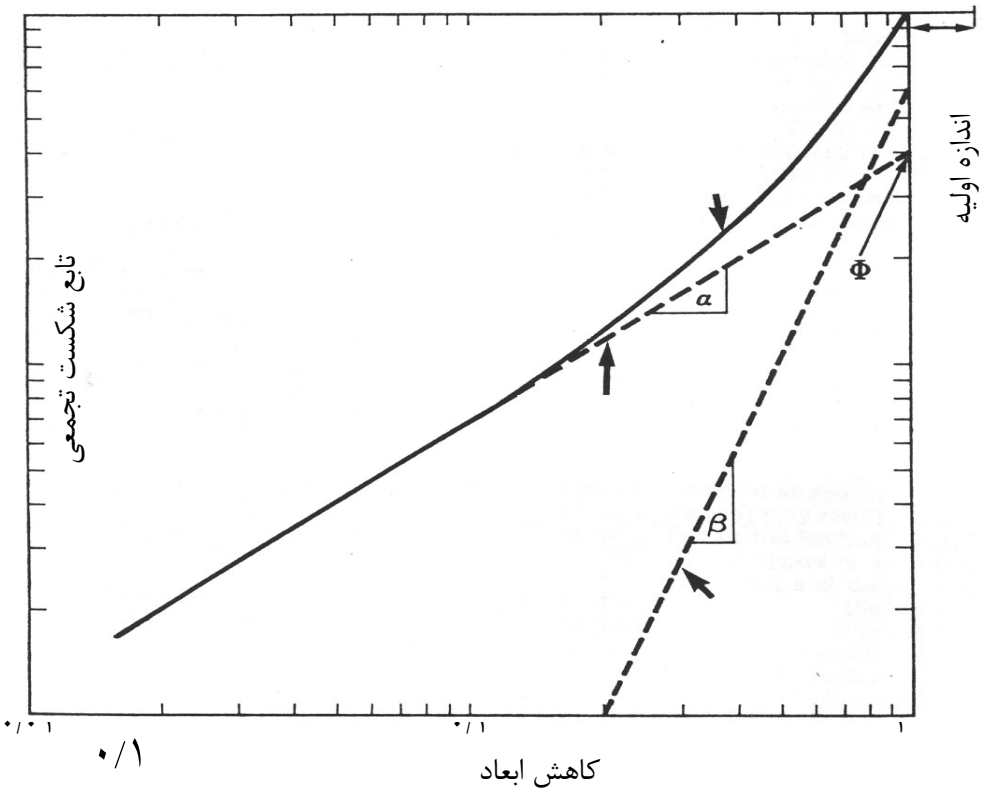
۲-۲- نمایش ریاضی تابع شکست

معادله‌ای که به بهترین صورت می‌تواند تابع شکست را برازش کند، به صورت زیر توسط برادبنت و کلکات (Broadbent & Collcott) ارائه شد [۲]:

$$B_{i,j} = \Phi\left(\frac{x_{i-1}}{x_j}\right)^{\alpha} + (1-\Phi)\left(\frac{x_{i-1}}{x_j}\right)^{\beta} \qquad (۳)$$

که در آن: x_j, x_{i-1} اندازه ذرات به ترتیب در طبقه i-۱ ام و j ام است و $0 \le \Phi \le 1$ و $j \le i \le n$

معادله (۳) در شکل (۲) نمایش داده شده است. منحنی از ترکیب دو خط راست با شیب‌های α, β به وجود آمده است. محل تقاطع خط با شیب α با خط قائمی که از ماکزیمم R می‌گذرد مقدار Φ را مشخص می‌کند که در آن $R = x_{i-1}/x_j$.



شکل ۲- نمایش تابع توزیع شکست معادله (۳)[۲]

۲-۳- تعیین تابع شکست

روش‌های محاسباتی زیر برای تعیین تابع شکست استفاده می‌شود:

الف - روش بقوبه

این روش برای اولین بار توسط بقوبه (Berube) استفاده شد و به همین نام نیز معروف گردید. روش بقوبه در حقیقت رگرسیونی از درصد ذرات درشت‌تر از چشمه سرند iام و زمان است. معادله رگرسیون آن به صورت زیر نوشته می شود [۳] :

$$Ln(M_i) = b_0(i) + b_1(i).t + b_2(i).t^2 \qquad (۴)$$

که در آن ، M_i درصد جرم ذرات درشت‌تر از سرند i و $b(i)$ ها پارامترهای رگرسیون و t زمان است.
تابع شکست تجمعی نیز از رابطه (۵) قابل محاسبه است :

$$B_{i,1} = \frac{b_1(i)}{b_1(1)} \qquad (۵)$$

ب - روش هربست و فیورستنا ((H & F)

هربست و فیورستنا (Herbst & Fuerstneau) روشی را برای تعیین تابع شکست توسعه دادند . این روش از خوراک محدود شده به درشت‌ترین طبقه ابعادی استفاده می‌کند و فرض بر این است که تابع شکست نرمال شونده است. این روش بر مبنای ثابت نرخ تولید نرمه در آسیای گلوله‌ای می‌باشد. در این سیستمها تغییرات در تجمع ذرات با معادله (۶) می تواند تشریح شود[۴].

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = F_i \qquad (۶)$$

که در آن $Y_i(t)$ نرخ تولید ذرات نرمه و F_i ثابت نرخ می‌باشد. ارتباط تابع شکست و تابع انتخاب (S_j) به صورت زیر پیشنهاد شده است [۴] :

$$B_{ij}S_j = F_i \qquad j = 1,2,\ldots,i-1 \qquad (۷)$$

بنابراین برای تخمین تابع شکست، با رگرسیون خطی $Y_i(t)$ نسبت به زمان، شیب خط که برابر $B_{i,1}S_1$ است تعیین شده و با تقسیم بر تابع انتخاب طبقه اول، تابع شکست بدست می‌آید، یعنی :

$$B_{i,1} = \frac{F_i}{S_1}$$

(۸)

ج - روش اصلاح شده هربست و فیورستنا (Modified H & F)

هربست و فیورستنا اصلاحاتی را در روش قبلی خود انجام دادند و روش جدید را روش اصلاح شدهٔ هربست و فیورستنا (M.H&F) نامیده و در سال ۱۹۶۸ معرفی کردند.

در این روش داریم [۴و ۵] :

$$\frac{dY_i(t)}{1-Y_i(t)} = F_i dt \qquad (۹)$$

از حل معادله فوق F_i به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Ln[1-Y_i(t)] = -F_i t \Rightarrow F_i = -\frac{Ln[1-Y_i(t)]}{t} \qquad (۱۰)$$

و بنابراین تابع شکست برابر است با :

$$B_{i,1} = -\frac{Ln[1-Y_i(t)]}{S_1.t} \qquad (۱۱)$$

بنابراین برای تخمین تابع شکست باید با رگرسیون خطی نیمه لگاریتمی $1-Y_i(t)$ نسبت به زمان، شیب خط را که برابر $B_{i,1}S_1$ است تعیین و با تقسیم بر تابع انتخاب طبقه اول، تابع شکست را بدست آورد (معادله ۸).

۲-۴- تعیین تابع انتخاب

عبور مواد از داخل یک طبقه سرندی در مورد آسیای گلوله‌ای در بیشتر موارد از سینتیک مرتبه اول پیروی می‌کند و نرخ عبور مواد متناسب با مقدار موادی است که شکسته می شوند. بنابراین می‌توان رابطه (۱۲) را برای فرآیند خردایش نوشت :

$$-\frac{d}{dt}M_j(t) = S_j M_j(t) \qquad (۱۲)$$

اگر S_j نسبت به زمان ثابت باشد، معادله فوق را به صورت زیر می‌توان حل کرد :

$$Ln\left[\frac{M_j(t)}{M_j(0)}\right] = -S_j * t \qquad (۱۳)$$

یا :

$$M_j(t) = M_j(0) * \exp(-S_j * t) \qquad (۱۴)$$

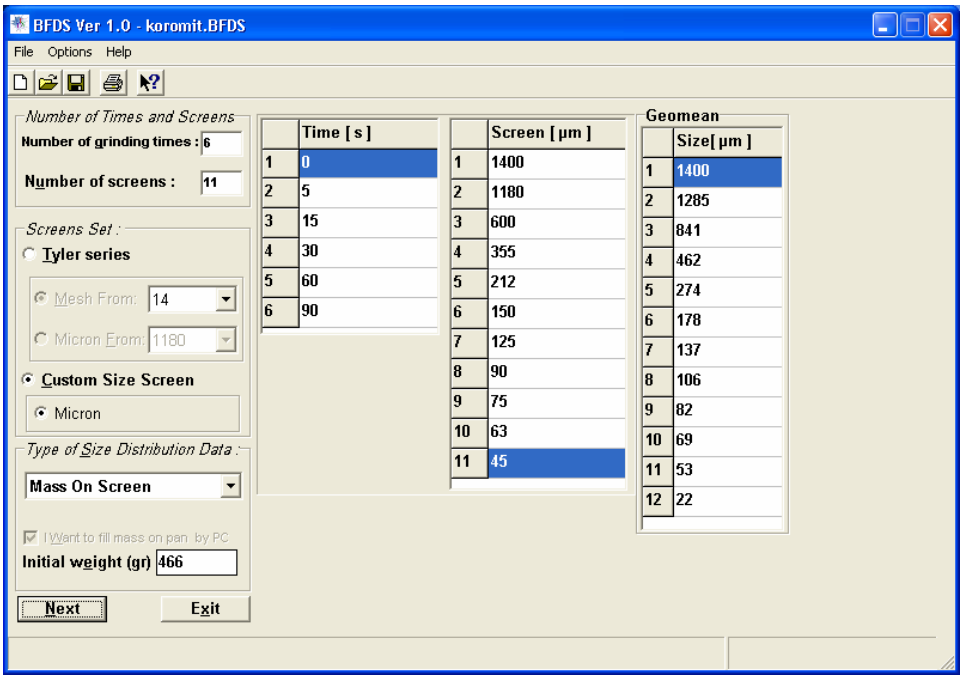
بنابراین اگر لگاریتم نپرین $M_j(t)/M_j(0)$ نسبت به t رسم شود خطی با شیب منفی بدست می‌آید. شیب این خط (بدون علامت منفی) بیان کننده تابع انتخاب مربوط به آن طبقه سرندی خواهد بود.

۳- نتایج، بحث و بررسی

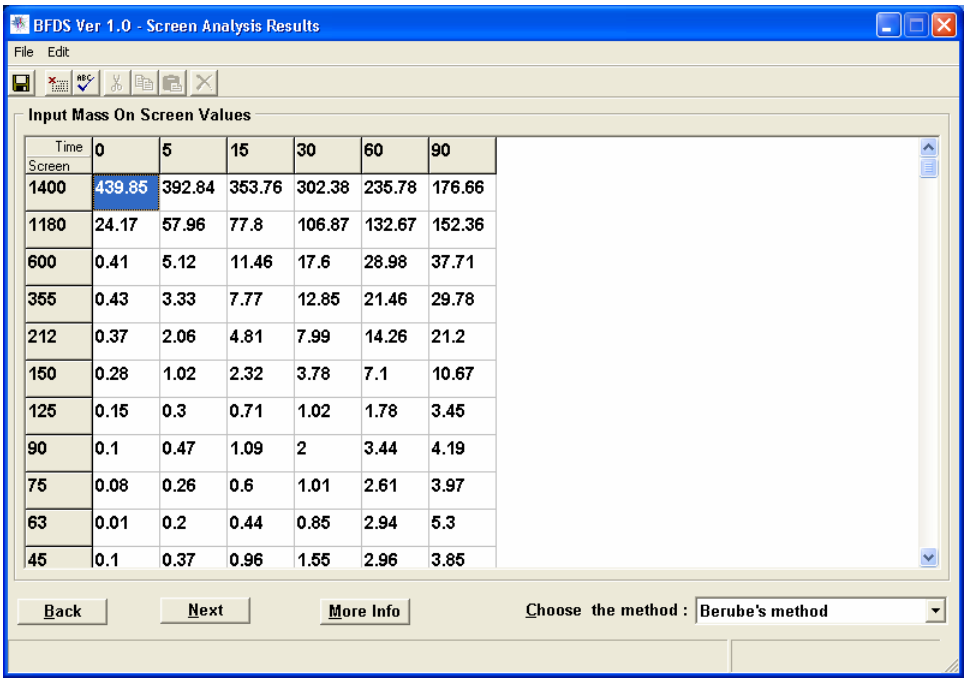
نرم‌افزار BFDS به زبان دلفی(Delphi) نگارش ۶ نوشته شده است. این نرم‌افزار در محیط ویندوز اجرا می‌شود ، کار با آن بسیار ساده بوده و دارای تمام امکانات برنامه‌های ویندوز نظیر ذخیره، بازیابی، امکانات "کمک(Help) " ، چاپ و ... است.

شکل (۳) صفحه اولیه نرم افزار را نشان می‌دهد. در این صفحه مقادیری از قبیل تعداد زمان‌هایی (دفعاتی) که خردایش صورت می‌گیرد و مقادیر این زمان‌ها (بر حسب ثانیه)، تعداد و شماره سرندهای مورد استفاده (سری تایلر(Tyler) یا سرندهای استاندارد دیگر)، نوع داده‌های آنالیز سرندی (جرم باقی مانده روی سرند، درصد باقی‌مانده روی هر سرند و درصد تجمعی عبورکرده) و در صورت نیاز وزن مواد اولیه را باید وارد نمود .
شکل (۴) صفحه ورود اطلاعات آنالیز سرندی و انتخاب روش محاسبه تابع شکست را نشان می‌دهد. نکته قابل توجه در این نرم افزار این است که در هنگام ورود اطلاعات توسط کاربر اجازه وارد کردن کاراکترهای نادرست مثل حروف، اعداد بیشتر از ۱۰۰ درصد، مقادیر وزن بیشتر از مقدار اولیه، ممیزهای نابجا و ... را نمی دهد.

از مقادیر این جدول، جداول درصد تجمعی مواد درشت تر از سرند، درصد تجمعی عبور کرده از سرند، و درصد مواد باقی مانده روی سرند محاسبه می شود که با دکمه More Info قابل دسترسی است.



شکل ۳- صفحه اولیه نرم‌افزار BFDS [۷]

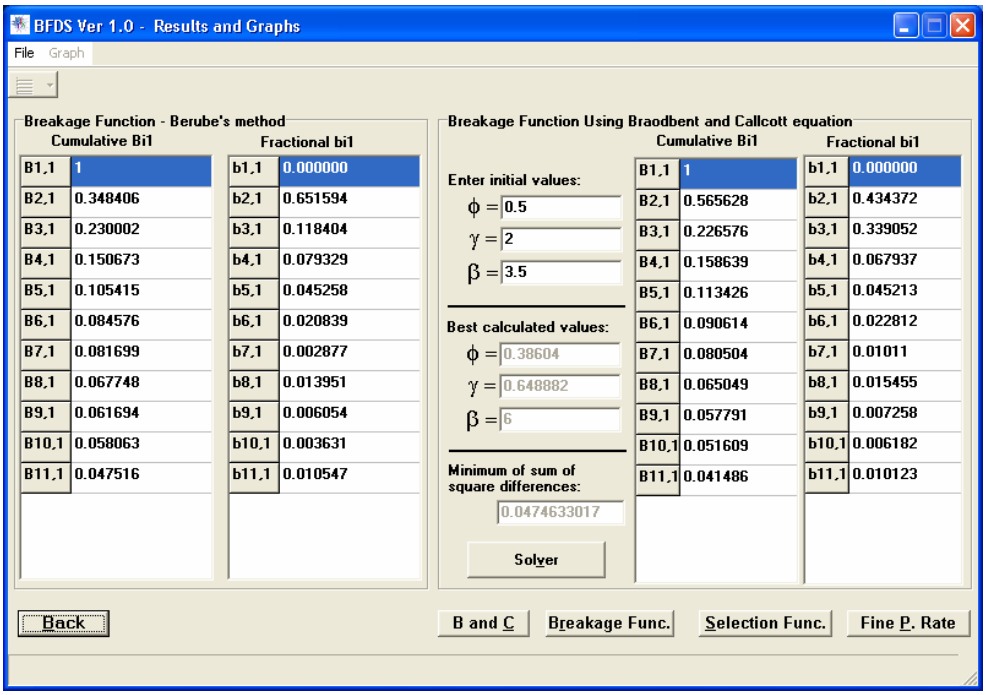


Time / Screen	0	5	15	30	60	90
1400	439.85	392.84	353.76	302.38	235.78	176.66
1180	24.17	57.96	77.8	106.87	132.67	152.36
600	0.41	5.12	11.46	17.6	28.98	37.71
355	0.43	3.33	7.77	12.85	21.46	29.78
212	0.37	2.06	4.81	7.99	14.26	21.2
150	0.28	1.02	2.32	3.78	7.1	10.67
125	0.15	0.3	0.71	1.02	1.78	3.45
90	0.1	0.47	1.09	2	3.44	4.19
75	0.08	0.26	0.6	1.01	2.61	3.97
63	0.01	0.2	0.44	0.85	2.94	5.3
45	0.1	0.37	0.96	1.55	2.96	3.85

شکل ۴- صفحه ورود اطلاعات آنالیز سرندی و انتخاب روش محاسبه [۷]

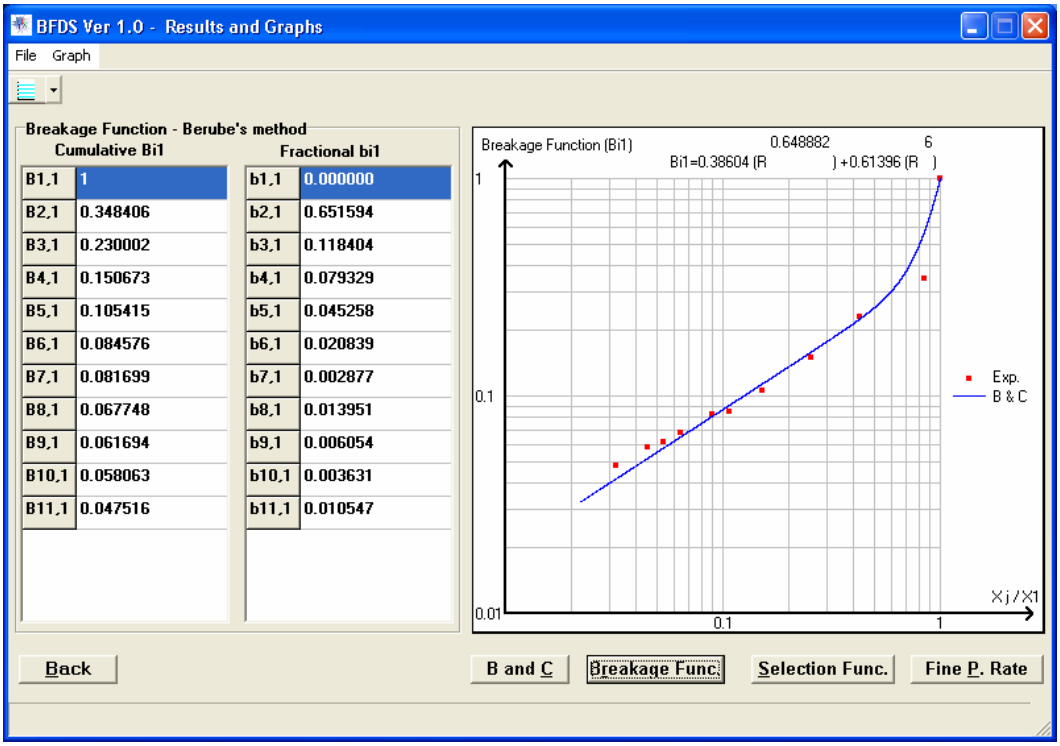
شکل (۵) نیز صفحه نهایی نرم‌افزار را نشان می‌دهد. در این پنجره اطلاعات نشان داده شده عبارتند از: تابع شکست تجمعی و غیر تجمعی و مقادیر بهینه α, β, Φ محاسبه شده از برازش منحنی به رابطه برادبنت و کالکات با روش بهینه سازی رزنبراک (که بر مبنی محاسبات عددی است) [۶] .

مقادیر پارامتر های α, β, Φ برای اولین بار با مقادیر اولیه نشان داده شده در قسمت Enter initial value محاسبه می شوند. دکمه Solver برای تعیین مجدد مقادیر پارامتر ها با مقدار اولیه دلخواه در نظر گرفته شده است.



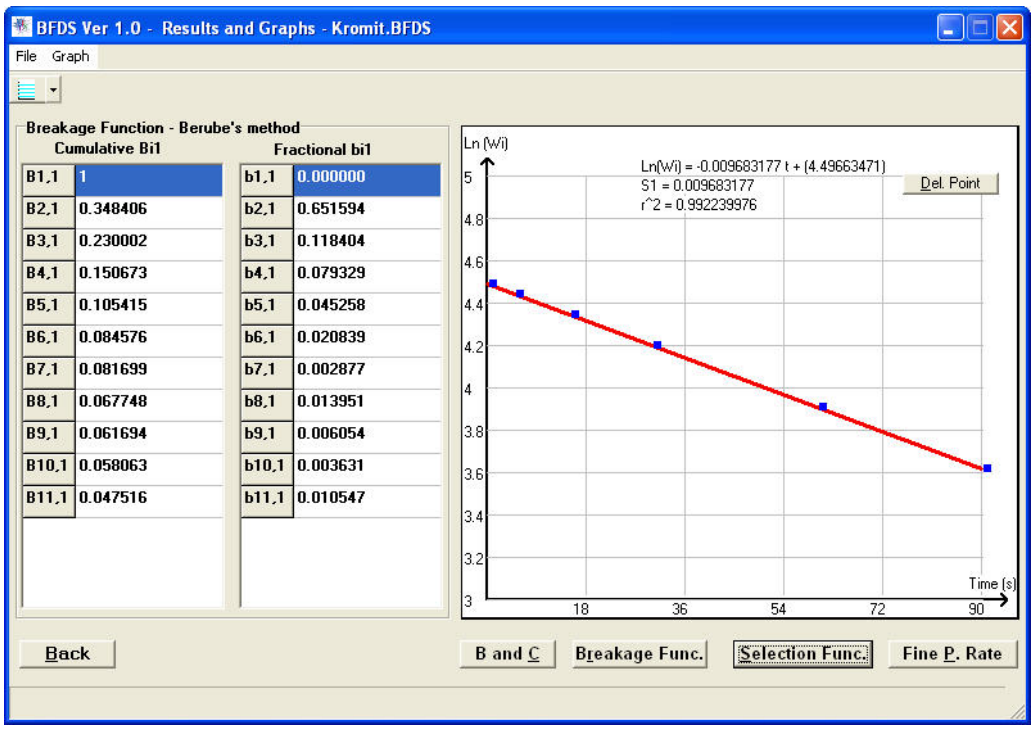
شکل ۵- صفحه نهایی نرم افزارBFDS [۷]

با کلیک بر .Breakage Func نمودار تابع شکست رسم می شود. در این نمودار نقاط قرمز رنگ مقادیر محاسبه شده در آزمایشگاه و خط آبی رنگ نمودار برازش شده به این نقاط است. معادله خط برازش شده نیز نمایش داده شده است.



شکل ۶- نمودار تابع شکست رسم شده توسط نرم‌افزار BFDS [۷]

با کلیک بر دکمه .Selection Func نمودار تابع انتخاب برای اولین طبقه سرندی رسم می شود که در شکل (۷) نمایش داده شده است. در کنار نمودار مقدار تابع انتخاب و معادله رگرسیون آن نیز نشان داده شده است.

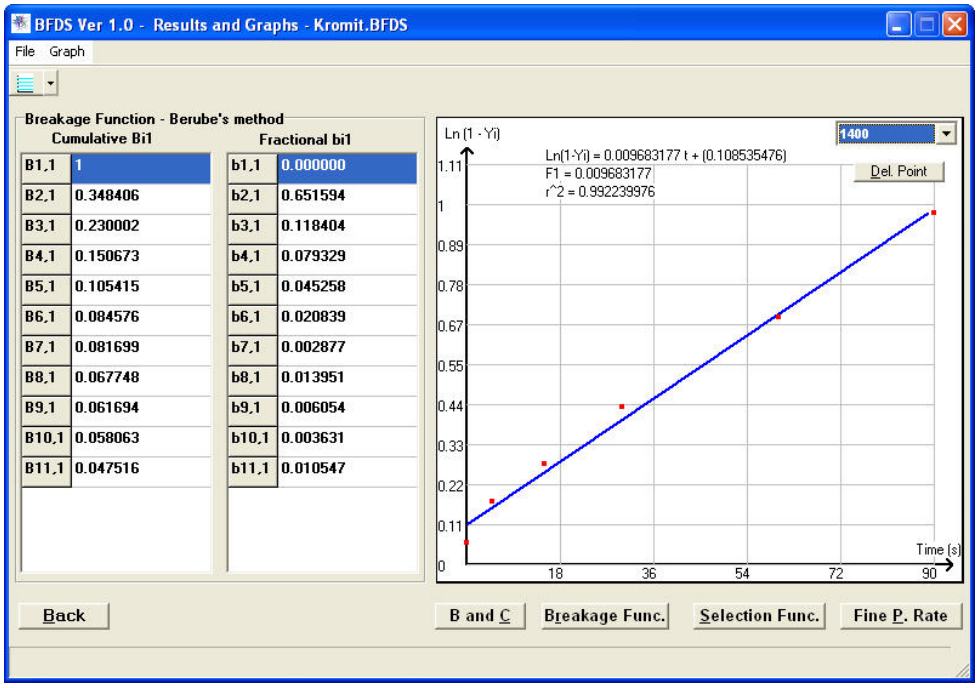


شکل ۷- نمودار تابع انتخاب رسم شده توسط نرم‌افزار BFDS [۷]

گاهی در آزمایشات خطاهایی وجود می کند که به صورت به آنومالی در نمودار تابع انتخاب نمایان می گردد و باعث می شود که خط رگرسیون با خطای بالایی رسم شود. برای حذف این آنومالی در هنگام مشاهده نتایج Del. Point در نظر گرفته شده است که با استفاده از آن می توان نتایج آنتالیز سرندی را در یکی از زمان های دلخواه حذف کرد.

شکل (۸) نمودار نرخ تولید ذرات نرمه را با زمان که توسط نرم افزار رسم شده است برای یکی از طبقات سرندی نشان می دهد. این نمودار با کلیک بر دکمه Fine P. Rate از صفحه پایانی قابل مشاهده است. همچنین این نمودار برای تمامی طبقات سرندی وجود دارد که با انتخاب طبقه سرندی از قسمت بالا سمت راست می توان آن را مشاهده نمود. گزینه Del Point در اینجا نیز همان کاربرد توضیح داده شده قبلی را دارد.

معادله خط رگرسیون و ثابت نرخ تولید ذرات نرمه در بالای نمودار نمایش داده می شود. تمامی نمودارها قابلیت نمایش به صورت تمام صفحه و پرینت جداگانه دارند. همچنین می توان خطوط شبکه بندی را نیز حذف نمود.



شکل ۸- نمودار نرخ تولید ذرات نرمه رسم شده توسط نرم‌افزار BFDS [۷]

در جداول ۱و ۲ نتایج بدست آمده از این نرم‌افزار با نرم‌افزار OLD BREAK و Excel درج شده است و تابع شکست با هر سه نرم‌افزار محاسبه گردیده است. داده‌های آنالیز سرندی که درصد روی سرند است مطابق جدول (۱) می‌باشد.

جدول ۱- داده‌های آنالیز سرندی مربوط به تعیین تابع شکست (زمان و ابعاد بر حسب ثانیه و میکرون)

	درصد باقیمانده روی سرند						
زمان / سرند	۰	۵	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰
۱۵۰	۹۷/۳۳۵	۹۴/۹۸۲	۹۲/۹۲۶	۸۹/۴۹۶	۸۵/۸۳۲	۸۲/۶۹۴	۷۹/۴۶۱
۱۰۵	۲/۶۶۵	۳/۶۷۷	۴/۸	۶/۱۷۳	۷/۷۵۲	۸/۹۲۶	۱۰/۱۹۱
۷۵	۰	۰/۴۲۴	۰/۷۷۳	۱/۴۳۴	۲/۲۴۱	۲/۹۳۱	۳/۵۴۴
۵۳	۰	۰/۳۸۹	۰/۶۴۸	۱/۰۰۹	۱/۷۱	۲/۳۳۷	۳/۱۲
۳۸	۰	۰/۱۷۲	۰/۳۴۹	۰/۹۶۳	۱/۰۹۹	۱/۳۷۴	۱/۵۵۵

نتایج تابع شکست بدست آمده از سه نرم‌افزار در جدول (۲) آورده شده است.

جدول ۲- مقایسه نتایج بدست آمده از طریق نرم‌افزارهای BFDS , OLD BREAK , Excel

روش	نرم‌افزار BFDS		نرم‌افزار OLD BREAK		نرم افزار Excel	
	b_{i1}	B_{i1}	b_{i1}	B_{i1}	b_{i1}	B_{i1}
روش Berube	۰	۱	۰	۱	۰	۱
	۰/۴۸۷۲۶	۰/۵۱۲۷۴	۰/۴۶۱۰۷۸	۰/۵۳۸۹۲۲	۰/۴۸۸۳۷۲	۰/۵۱۱۶۲۸
	۰/۱۷۹۶۵۷	۰/۳۳۳۰۸۳	۰/۱۹۳۸۶۲	۰/۳۴۵۰۶	۰/۱۸۶۰۴۷	۰/۳۲۵۵۸۱
	۰/۱۰۰۸۷۴	۰/۲۳۲۲۰۹	۰/۱۵۷۹۳۴	۰/۱۸۷۱۲۶	۰/۰۹۳۰۲۳	۰/۲۳۲۵۵۸
	۰/۱۲۲۱۰۳	۰/۱۱۰۱۰۶	۰/۰۸۲۳۳۶	۰/۱۰۴۷۹	۰/۱۱۶۲۷۹	۰/۱۱۶۲۷۹
روش H&F	۰	۱	۰	۱	۰	۱
	۰/۴۸۹۲۶۶	۰/۵۱۰۷۳۴	۰/۴۸۹۲۷	۰/۵۱۰۷۳	۰/۴۸۹۲۷۱	۰/۵۱۰۷۲۹
	۰/۱۷۷۵۵۵	۰/۳۳۳۱۷۹	۰/۱۷۷۵۵	۰/۳۳۳۱۷	۰/۱۷۷۶۴۵	۰/۳۳۳۰۸۴
	۰/۱۴۹۴۶۷	۰/۱۸۳۷۱۲	۰/۱۴۹۴۷	۰/۱۸۳۷۱	۰/۱۴۹۴۵۱	۰/۱۸۳۶۳۳
	۰/۰۸۰۱۵۳	۰/۱۰۳۵۵۹	۰/۰۸۰۱۵۳	۰/۱۰۳۵۶	۰/۰۸۰۰۹	۰/۱۰۳۵۴۳
روش اصلاح شده H & F	۰	۱	-	-	۰	۱
	۰/۴۶۱۰۴۷	۰/۵۳۸۹۵۳	-	-	۰/۴۶۱۰۷۸	۰/۵۳۸۹۲۲
	۰/۱۹۳۹۳۳	۰/۳۴۵۰۲	-	-	۰/۱۹۳۸۶۲	۰/۳۴۵۰۶
	۰/۱۵۷۷۷۳	۰/۱۸۷۲۴۷	-	-	۰/۱۵۷۹۳۴	۰/۱۸۷۱۲۶
	۰/۰۸۲۵۶۷	۰/۱۰۴۶۸	-	-	۰/۰۸۲۳۳۶	۰/۱۰۴۷۹

۴- نتیجه گیری

- ✓ محاسبه تابع شکست اغلب بسیار زمان‌بر است و استفاده از نرم‌افزارها برای تعیین آن ضروری است.
- ✓ نرم‌افزار BFDS برای محیط ویندوز تهیه شده و تمام قابلیتهای محیط ویندوز را دارا می‌باشد.
- ✓ BFDS قابلیت رسم نمودارهای تابع انتخاب و شکست و نرخ تولید ذرات نرمه را دارا می‌باشد.
- ✓ BFDSبرای تمامی صفحات دارای راهنما می‌باشد که از بروز خطاها جلوگیری می‌کند.
- ✓ BFDS برخلاف نرم‌افزار OLD BREAK (که دو روش محاسبه دارد) از هر سه روش استفاده می‌کند.
- ✓ BFDS پارامترهای رابطه برادبنت و کلکات را با روش جستجوی عددی و با سرعت بسیار بالا تعیین می‌کند.
- ✓ در BFDS امکان تغییر پارامترهای رابطه برادبنت و کلکات و مشاهده هم زمان تغییرات نمودار تابع شکست وجود دارد.
- ✓ در BFDS امکان پرینت داده‌های ورودی و نتایج به صورت انتخابی وجود دارد.
- ✓ امکان حذف نتایج آزمایشگاهی نادرست در حین محاسبات وجود دارد.
- ✓ نرم افزار از ورود داده های نادرست در هنگام ورود اطلاعات توسط کاربر جلوگیری می کند.

مراجع

[۱] Prasher, C.L., (۱۹۸۷), "*Crushing and Grinding Process Handbook*"

[۲] Kelly, E.G. and D.J. Spottiswood., (۱۹۸۹), "*The Breakage Function ; What is it Really?*", Minerals Engineering Vol. ۳, pp ٤۰٥-٤۱٤

[۳] D. Hodouin and M.A. Berube and M.D. Everell, (۱۹۷۸) "*Modelling Industrial Grinding Circuit And Application In Design*", CIM Bulletin ۷۹۷, PP ۱۳۸-۱٤٦

[٤] Herbst, J.A., and D.W. Fuerstenau, (۱۹٦۸) "*The Zero Order Production of Fine Sizes in Comminution and its Implication in Simulation*", Transaction, SME, AIME. Colorado ۲٤۱, PP ٥۳۸-٥٤۸

[٥] Banisi, S. and A.R. Laplante, (۱۹۹۱) "*The Behaviour of Gold in Hemlo Mines LTD. Grinding Circuit*", Dept. of Mining and Metallurgical Engineering, McGill University.

[٦] RosenBrock, H.H., (۱۹٦۰) "*An Automatic Method for finding the greatest r least value of a function*" The Computer Journal, Vol. ۳, pp ۱۷٥-۱۸٤

[۷] یوسفی، علی اصغر، (۱۳۸۱)، "*توسعه نرم‌افزاری به منظور تعیین توابع شکست مواد معدنی*"، پایان نامه کارشناسی ارشد، دانشکده مهندسی معدن، متالورژی و نفت، دانشگاه صنعتی امیر کبیر تهران