یک مدل دو سطحی برای برنامه ریزی یک سیستم تولیدی و مقایسه ی آن با مدل یک پارچه

فرهاد سنچولی
مدرس دانشگاه آزاد اسلامی واحد علی آباد کتول
fsanchooli@yahoo.com
حسین تقی زاده کاخکی
استادیار دانشکده علوم ریاضی دانشگاه فردوسی مشهد
Taghizad@math.um.ac.ir

چکیده

در این مقاله به بررسی فرآیند تولید کارخانه نان قدس رضوی می پردازیم و مدلی برای بهینه کردن عملکرد آن ارائه می دهیم. برای این منظور از دو روش مدل یک پارچه و مدل طبقه ای استفاده می کنیم و به مقایسه ی این نتایج این دو می پردازیم. همچنین علاوه بر روش استفاده از مدل یک پارچه که یک مسأله برنامه ریزی خطی عدد صحیح با ابعاد بزرگ است، در این مقاله به معرفی یک روش طراحی تولید طبقه ای می پردازیم که مدل یک پارچه را به یک سری مسائل برنامه ریزی خطی عدد صحیح با ابعاد کوچکتر اِفراز می کند.

کلمات کلیدی: فرآیند تولید، مدل یک پارچه، مدل طبقه ای، برنامه ریزی تولید طبقه ای[1](HPP).

۱. مقدمه

در تمامی سیستم های تولیدی مهم ترین مسأله برای مدیران تولید، داشتن برنامه ای است که اهداف مورد نظر سیستم را به بهترین نحو ممکن برآورده سازد. از عمومی ترین اهداف مورد نظر در سیستم های تولیدی کاهش هزینه ها شامل هزینه های تولید، هزینه های نگهداری و هزینه های متفرقه سیستم، در عین برآورده نمودن تقاضاهای سیستم می باشد.
برنامه ریزی تولید، وظیفه پیچیده ای است که نیاز به همکاری میان واحدهای چندگانه ی تابعه در یک سازمان دارد و دنباله ای از یک سلسله تصمیمات است که با موضوعات متفاوت در محیط تولید سروکار دارد. برنامه ریزی تولید، مقادیر تولید سیستم را در یک دنباله از دوره های زمانی به منظور بهینه کردن یک یا چند معیار معین که محدودیت هایی مانند ظرفیت منابع را برآورده سازد، تعیین می کند.
این مسأله با در نظر گرفتن حوادث گوناگون، که ممکن است قابل پیش بینی (مانند کمبود منابع) و یا غیر قابل پیش بینی (مانند تأخیر در تحویل مواد اولیه یا تغییرات غیر منتظره در تقاضا) باشند، پیچیده تر می شود که در نتیجه مسألهء بهینه سازی به دست آمده بسیار بزرگ و پیچیده می شود و لذا در این بحث از این حوادث چشم پوشی شده است.
در این جا دو مدل مجزا برای برنامه ریزی تولید ارائه می نماییم:

---

[1] **Hierarchical Production Planning**

الف) مدل یک پارچه: که در آن مسأله ی عمومی به عنوان یک مسأله ی برنامه ریزی خطی عدد صحیح با ابعاد بزرگ مدل شده است.

ب) مدل طبقه ای: که مسأله ی عمومی را به یک دنباله از زیر مسائل که به سطوح متفاوت مرتبط است، اِفراز می کند. این زیر مسائل متوالیاً حل شده و جواب در هر مرحله محدودیت های روی جواب در سطح پایین تر دنباله اِعمال می کند.

برنامه ریزی تولید طبقه ای دامنه ی تصمیم گیری های بزرگ تر را به سطوح مختلف موافق با ساختار سازمانی شرکت تقسیم می کند. سازگاری میان برنامه های تولید در سطوح پایین تر به وسیله مکانیزم پیوند موجود بین سطوح متوالی سیستم به دست می آید. جواب یک سطح بالاتر سیستم، یک محدودیت ارائه می کند که بر سطح بعدی سیستم تحمیل می شود، و بنابراین تصمیمات در هر سطح یک زنجیر را تشکیل می دهد. [۴]

هر چند مسأله ی بهینه سازی برای فرموله کردن به صورت یک پارچه بسیار مشکل نیست لیکن بنابر دلایل زیر نمی توان آن را به سادگی حل نمود و یا در عمل به کار برد:

- برنامه ریزی یک پارچه برای سیستم تولیدی و افق برنامه ریزی واقعی دارای ابعاد بسیار بزرگی می باشد.
- اطلاعات جزئی در مورد تقاضای نوع محصول در افق ورودی نامشخص است.
- تقاضا، به علت لغو سفارشات و پذیرش سفارشات جدید که نیاز به محاسبات مجدد دارند، موضوعی برای تغییر است.
- این روش فرمول بندی به معیارهای متفاوت اجازه نمی دهد تا در سطوح مختلف از سلسله مراتب استفاده شوند.

در ادامه نخست به بررسی تاریخچه و کاربردهای مختلف روش طبقه ای می پردازیم. سپس مسأله ی مورد نظر در بخش ۳ تشریح می شود. مدل یک پارچه در بخش ۴ و مدل طبقه ای در بخش ۵ ارائه می شوند. بالاخره نتایج بدست آمده از حل مدل ها در بخش ۶ آورده شده اند.

۲. مرور تاریخچه

مفهوم برنامه ریزی تولید طبقه ای برای اولین بار توسط هِکس و مِیل در سال ۱۹۷۵ [۸] و گابای [۶] و نیز گَلَوین [۷] در همان سال مطرح شد. طرح ارائه شده توسط هِکس و مِیل دارای سه سطح بود.

بیتران و هِکس در سال ۱۹۷۷ [۳]، این طرح تولید طبقه ای را با استفاده از مسأله ی کوله پشتی محدب فرموله کردند تا مقادیر به دست آمده برای انواع محصول به خانواده ها و مقادیر خانواده ها به اجناس تجزیه شوند. در این روش افق زمانی تنها به زمان های کلی تقسیم شده و سیستم یک مرحله ای در نظر گرفته می شود.

از آن پس کارهای تئوری زیادی در این زمینه انجام شد. از آن جمله می توان به کارهای بیتران و همکاران در سال ۱۹۸۱، بیتران و هِکس در سال ۱۹۸۱، آکساتِر و جانسون در سال ۱۹۸۴، هِکس و کندی در سال ۱۹۸۴، اِرشلر و همکاران در سال ۱۹۸۶، پینکوز و توکژیلووسکی در سال ۱۹۹۳ و اوزدامار و همکاران در سال ۱۹۹۶ اشاره کرد. [۱۰]

اما به موازات کارهای تئوری انجام شده بر روی این مسأله، کاربردهای عملی آن در صنایع گوناگون نیز مورد استفاده قرار گرفت که از آن می توان به نمونه هایی در صنعت کاشی (لیبراتور و میلر در سال ۱۹۸۵)، تولید استیل (بوورس و جرویس ۱۹۹۲؛ لین و مودی در سال ۱۹۸۹؛ ماکولاک و همکاران در سال ۱۹۸۰)، قوطی سازی (اوزدامار و همکاران در سال ۱۹۹۶)، فولادسازی (گِلدِرس و اِستِلند در سال ۱۹۸۰)، تولید کفش (کاراویلا و درسوسا در سال ۱۹۹۵)، صنعت موتور (سوبون و سوگاوارا در سال ۱۹۸۷) و تولید شیر خشک (روتن در سال ۱۹۹۳) اشاره نمود.[۱۰] مروری کلی بر کاربردهای مختلف آن در [۵] بیان شده است.

هر چند مفهوم تعریف شده برای برنامه ریزی تولید در ابتدا به صورت سه سطحی و با طبقه بندی محصولات به انواع محصول، خانواده ها و اجناس، و نیز افق زمانی تولید، تنها، به دوره های زمانی کلی تعریف شده بود و اغلب از این روش استفاده می شد، ولی بنابر نوع مسأله و دید طراح سیستم می توان نوع طبقه بندی و تعداد سطوح را تغییر داد، چرا که اعتقاد بر این است که همواره طراح سیستم بهترین دید را نسبت به طرح دارد.

هرمن و همکاران در سال ۱۹۹۴ [۹]، یک سیستم برنامه ریزی تولید طبقه ای چندمرحله ای ارائه نمودند که در آن علاوه بر طبقه بندی محصولات، افق زمانی نیز به زمان های کلی و زمان های جزئی و مرحله ی تولید به مراکز کاری تشکیل دهنده ی آن، طبقه بندی می

شوند. همچنین اوزدامار و همکاران [۱۰] الگوریتم هایی برای فرآیند تجزیه ی انواع محصولات به خانواده ها و تجزیه ی خانواده ها به اجناسِ آن ارائه نمودند.

۳. تعریف مسأله

کارخانه نان قدس رضوی یک کارخانه ی تولید انواع کیک و شیرینی است که دارای قدمتی در حدود ۴۰ سال می باشد و از این لحاظ یکی از پیشگامان این صنعت در داخل کشور محسوب می شود. مدیریت این کارخانه تحت نظر آستان قدس رضوی قرار دارد و تولید کارخانه تقریباً صرف پاسخگویی به نیاز داخل کشور می گردد (هرچند مقداری از محصول نیز صادر می شود). فروش کارخانه تقریباً سراسر کشور را فرامی گیرد و از این نظر، کارخانه را در ردیف یکی از بزرگترین کارخانجات تولید کیک و شیرینی در کشور قرار می دهد.
این کارخانه دارای چهار واحد تولیدی مجزا است که هر کدام به طور مستقل تولید یک گروه از محصولات را به عهده دارد. تمامی واحدها زیر نظر واحد کنترل تولید و مواد مشغول به کار هستند و برنامه ی کار و میزان تولید خود را از این واحد دریافت می کنند. همچنین دارای انبار مشترک برای مواد اولیه ی تمام واحدهای تولیدی می باشد که دستور تحویل مواد خام برای تولید به هر واحد نیز توسط واحد کنترل تولید و مواد صادر می گردد.
مواد اولیه مورد استفاده در این کارخانه بالغ بر صد مورد است که به دو گروه مواد اولیه تولید و مواد اولیه بسته بندی تقسیم می شوند. این مواد توسط مسئولین خرید کارخانه و با تایید مدیریت، در صورت لزوم خریداری می شوند. اما از این میان تنها سه ماده آرد، روغن و شکر به صورت سهمیه از وزارت بازرگانی و با قیمت یارانه ای به طور دوره ای تهیه می شوند. اما این سه محصول سهم عمده ای در ترکیب تولید محصولات دارند (حدود ۷۰ تا ۷۵ درصد هر محصول) و نیز در صورت تهیه ی این مواد با قیمت غیریارانه ای، قیمت تمام شده برای هر محصول به میزان قابل توجهی افزایش می یابد و این امر بر سوددهی کارخانه تأثیر منفی می گذارد، لذا می بایست در طرح تولید برای کارخانه، این مساءله لحاظ گردد. اما به علت درصد پایین سایر مواد اولیه به نسبت تعدادشان و جهت جلوگیری از پیچیدگی غیرضروری مدل، از پرداختن به آن ها صرف نظر می کنیم هرچند در صورت لزوم و جهت تأکید بیشتر می توان به آن ها نیز پرداخت. واحدهای تولید را با نام های واحد کیک اسفنجی، واحد کیک روغنی، واحد نان سفید و واحد شیرینی نام گذاری می نماییم.
واحد تولید کیک اسفنجی، دارای دو خط تولید است. این واحد به طور شبانه روزی کار می کند که ۱۶ ساعت آن را کار عادی و ۸ ساعت دیگر را اضافه کار فرض می نماییم. این واحد محصولات متنوعی تولید می نماید که از آن جمله می توان به کیک رضوی پرتقالی داخلی، کیک رضوی پرتقالی صادراتی، کیک رضوی لیمویی، کیک رضوی موزی، کیک رضوی شکلاتی داخلی، کیک رضوی شکلاتی صادراتی، کیک رضوی کاکائویی داخلی، کیک رضوی کاکائویی صادراتی اشاره نمود. با توجه به این که بعضی از این محصولات تنها در اسانس و بعضی افزودنی ها با یکدیگر تفاوت دارند وبا توجه به نسبت میزان تولید آن ها و گاه مقطعی بودن آن، جهت سهولت، این محصولات را به عنوان سه جنس کیک رضوی پرتقالی، کیک رضوی شکلاتی و کیک رضوی کاکائویی می شناسیم. با توجه به پیش بینی تقاضاها، مشاهده می نماییم که محصولات این واحد، سهمی حدود ۸۰ درصد تولید کارخانه را به خود اختصاص می دهند که این خود دلیل واضحی بر حساسیت ویژه ی مدیریت در مورد این واحد می باشد و این واحد را در اولویت اول تصمیم گیری قرار داده است.
واحد دوم، واحد کیک روغنی می باشد. این واحد روزانه ۸ ساعت کار عادی و در صورت نیاز حداکثر روزانه ۸ ساعت اضافه کار انجام می دهد. محصولات این واحد نیز مشتمل برکیک عصرانه ۵۰ گرمی، کیک شکرین ۵۰ گرمی، کیک شکرین ۸۰ گرمی، کیک صبحانه، کلوچه قند عسل تکی، کلوچه قند عسل دوقلو، کلوچه قند عسل جعبه ای و دونات می باشند. این واحد حدود ۱۳ درصد از تولید این کارخانه را شامل می شود که از این نظر این واحد را در اولویت دوم اهمیت قرار می دهد.
واحد تولید نان سفید و واحد شیرینی نیز همانند واحد کیک روغنی روزانه ۸ ساعت کار عادی و در صورت لزوم ۸ ساعت اضافه کاری خواهند داشت.
محصولات واحد نان سفید شامل نان کایزرول، نان باگت، نان همبرگر، نان جو، نان قندی، نان ساندویچی، نان شیرمال و نان سبوس دار است. این محصولات چیزی حدود ۵ درصد تولید را تشکیل می دهند.

واحد شیرینی، محصولات زیر را تولید می کند: شیرینی دانمارکی، شیرینی زبان، شیرینی پادرازی، شیرینی کشمشی، شیرینی شکری، شیرینی نارنجک، شیرینی تر، شیرینی رولت، شیرینی ناپلئونی، شیرینی سولی، شیرینی بهشتی، شیرینی تزئینی، شیرینی برشتوک، شیرینی شیرمرغی، شیرینی نخودی، شیرینی قندی، زولبیا و بامیه. که تولید این واحد نیز حدود ۱ درصد تولید کل کارخانه را تشکیل می دهد.
به دلیل درصد کم تولید و فروش واحدهای نان سفید و شیرینی و فصلی بودن اغلب محصولات آن و از همه مهمتر در دسترس نبودن اطلاعات جزئی این واحدها، در این مساءله بالاجبار تمامی محصولات هر یک از این واحدها را تنها یک محصول فرض کرده و به عنوان نام واحدهایشان از آن ها یاد می کنیم، هرچند با داشتن اطلاعات کامل تری می توان با تفصیل بیشتری روی این واحدها عمل نمود.
کارخانه به طور متوالی ۶ روز در هفته کار می کند. با این وجود به خاطر مسائل گوناگون، تعطیلاتی نیز در این روزها به وجود می آیند. به طور کلی حداکثر ساعات کار عادی و اضافه کار برای هر واحد مشخص است.
هزینه های تولید را به سه دسته تقسیم می نماییم.

هزینه های دستمزد: هزینه های دستمزد شامل دو گروه دستمزد مستقیم و دستمزد غیر مستقیم می باشد. دستمزد مستقیم به دستمزد کارگران واحد های تولید اطلاق می شود که به طور مستقیم بر روی خط تولید مشغول به کار هستند که این نیز به دو بخش دستمزد ساعات کار عادی و ساعات کار اضافه کاری تقسیم می شود. دستمزد غیر مستقیم به دستمزد کارمندان اداری، مسئولین، سرپرستان، مدیران، کارگران خدماتی و سایر افرادی که به طور مستقیم نقشی در خطوط تولید ندارند، تقسیم می شود. از طرفی چون ساعات کار این گروه اغلب معین می باشد و ارتباط مستقیمی با میزان تولید ندارد، به گونه ای مقدار آن ثابت تلقی می شود و لذا از در نظر گرفتن این هزینه ها به طور مستقیم در مدل مساءله صرف نظر نموده و آن ها را در بخش هزینه های متفرقه تولید، اعمال می کنیم.
هزینه های انبار: شامل هزینه های نگهداری محصولات جهت فروش در ماه های آتی می باشد.
هزینه های متفرقه تولید: شامل هزینه مواد اولیه، هزینه های توزیع و فروش، مالیات، ضایعات، هزینه های سربار مانند تبلیغات، بازاریابی، هزینه های سرمایه و استهلاک و هم چنان که ذکر شد هزینه های اداری تشکیلات و دستمزد غیر مستقیم می باشد.

۴. مدل یک پارچه

ابتدا مدل مستقیم مورد نظر را به صورت یک پارچه ارائه می نماییم، سپس مدل طبقه ای سیستم را به طور تفصیلی بیان می کنیم. در اینجا تنها مدل تجزیهء اجناس را روی واحدهایی که اطلاعات کامل تری از آن ها در اختیار داریم، اعمال می نماییم.
جهت سهولت در ارائهء مدل ها و تفهیم بهتر آن، محدودیت های مسأله را به صورت زیر تقسیم می کنیم.

- قیود ظرفیت
- قیود تعادل
- قیود تحدید

قیود ظرفیت؛ قیودی هستند که هر نوع محدودیت چه از نظر میزان دسترسی به مواد اولیه، چه از نظر ظرفیت کارآیی هر واحد و چه از نظر زمان در دسترس برای هر واحد تولیدی را شامل می شوند.
قیود تعادل؛ تعادل بین محصولات تولید شده، انبار شده و فروخته شده را برقرار می سازند.
قیود تحدید؛ که میزان فروش و انبار را در یک کران خاص محدود می کنند.

در مدل یک پارچه تمام واحد ها و محصولات را یکسان فرض می کنیم و تعریف می کنیم:
$Rawmat$= مواد اولیه= { روغن، شکر، آرد}
$item$ = محصولات (اجناس نهایی) = { شیرینی، نان، ... ، رضوی شکلاتی، رضوی پرتقالی}= {۱،۲،...،۱۳}
$time$ = دوره های زمانی = { اسفند، ... ، اردیبهشت، فروردین}= {۱،۲،...،۱۲}
$type$= واحد های تولیدی (خانواده ها) ={شیرینی، نان، کیک روغنی، کیک اسفنجی}= {۱،۲،۳،۴}

متغیرهای تصمیم

Z_{it}: مقدار فروش جنس i در دوره ی t

X_{it}: مقدار تولید جنس i در دوره ی t

I_{it} : مقدار انبار جنس i در دوره ی t

O_{it}: ساعات تولید اضافه کار لازم برای محصول i در دوره ی t

W_{it}: ساعات تولید کار عادی لازم برای محصول i در دوره ی t

مدل یک پارچه ی برنامه ریزی تولید

$$\max \quad \sum_{i=1}^{13}\sum_{t=1}^{12}\left(g_{it}Z_{it} - (c_{it}X_{it} + cr_{it}W_{it} + co_{it}O_{it} + h_{it}I_{it}) - \sum_{j=1}^{3}\left(k_j R_{ij} X_{it}\right)\right) \qquad (1)$$

S.T. :

$$\mathrm{X_{it}} \le (W_{it} + O_{it})N_i \qquad i \in item \quad ; t \in time \qquad (2)$$

$$\sum_{\mathrm{i}=1}^{13} R_{ij}X_{it} \le M_j \qquad j = Rawmat \quad ; t \in time \qquad (3)$$

$$X_{it} + I_{i(t-1)} = Z_{it} + I_{it} \qquad i \in item \quad ; t \in time \qquad (4)$$

$$\mathrm{SS_{it}} \le I \le d^1_{i(t+1)} \qquad i \in item \quad ; t \in time \qquad (5)$$

$$d^1_{it} \le Z_{it} \le d^2_{it} \qquad i \in item \quad ; t \in time \qquad (6)$$

$$W_{1t} + W_{2t} + W_{3t} \le pw_{1t} \qquad ; t \in time \qquad (7)$$

$$W_{4t} + \Lambda + W_{11t} \le pw_{2t} \qquad ; t \in time \qquad (8)$$

$$W_{12t} \le pw_{3t} \qquad ; t \in time \qquad (9)$$

$$W_{13t} \le pw_{4t} \qquad ; t \in time \qquad (10)$$

$$O_{1t} + O_{2t} + O_{3t} \le po_{1t} \qquad ; t \in time \qquad (11)$$

$$O_{4t} + \Lambda + O_{11t} \le po_{2t} \qquad ; t \in time \qquad (12)$$

$$O_{12t} \le po_{3t} \qquad ; t \in time \qquad (13)$$

$$O_{13t} \le po_{4t} \qquad ; t \in time \qquad (14)$$

$$X_{it}, Z_{it}, I_{it} \in \mathrm{Z} \qquad i \in item - \{12,13\} \quad ; t \in time \qquad (15)$$

$$X_{it}, Z_{it}, I_{it}, W_{it}, O_{it} \ge 0 \qquad i \in item \quad ; t \in time \qquad (16)$$

پارامتر ها:

g_{it} : قیمت فروش واحد جنس i در دوره ی t

h_{it} : هزینهء انبار واحد جنس i دردوره ی t

c_{it} : هزینهء تولید واحد جنس i در دوره ی t

co_{it}: هزینهء اضافه کاری هر نفر- ساعت در دوره ی t برای جنس i

cr_{it}: هزینهء زمان عادی کار هر نفر- ساعت در دوره ی t برای جنس i

N_i : مقدار تولید در ساعت جنس i

d_{it}^1 : حداقل پیش بینی تقاضای موثر جنس i در دوره ی t

d_{it}^2: حداکثر پیش بینی تقاضای موثر جنس i در دوره ی t

SS_{it}: مقدار ذخیره ی اطمینان جنس i در دوره ی t

k_j: هزینه خرید ماده اولیه ی نوع j

R_{ij}: مقدار ماده اولیه ی نوع j به کار رفته در تولید جنس i

M_j: مقدار ماده اولیه ی نوع j در دسترس در هر دوره

pw_{it} : حداکثر ساعات تولید کار عادی در دسترس در دوره ی t برای جنس i

po_{it} : حداکثر ساعات تولید اضافه کار در دسترس در دوره ی t برای جنس i

که در آن تابع هدف (رابطه ی (۱)) بیشینه کننده ی سود است. محدودیت (۲) بیانگر ظرفیت تولید دستگاه هاست. رابطه ی (۳) محدودیت منابع اولیه دردسترس است. رابطه ی (۴) محدودیت تعادل را نشان می دهد. روابط (۵) و (۶) قیود تحدید روی محصولات انبار شده و میزان فروش می باشند. روابط (۷) تا (۱۴) محدودیت زمان کار عادی و زمان اضافه کار دردسترس را بیان می کنند. رابطه ی (۱۵) محدودیت عدد صحیح بودن تولیدات و در نهایت رابطه ی (۱۶) غیر منفی بودن متغیرها را عنوان می نماید.

۵. مدل طبقه ای

برای نوشتن مدل طبقه ای سیستم، ابتدا باید دسته بندی های لازم را جهت تشکیل طبقات مورد نظر انجام داد. با توجه به تشابه محصولات هر واحد و اشتراک داشتن در ماشین آلات تولید، کارگران واحد و مواد اولیه، تصمیم گرفتیم از یک سلسله مراتب دو طبقه ای استفاده کنیم که در سطح اول محصولات کارخانه را به خانواده ها تقسیم کرده و در مرحله ی دوم هر خانواده را به اجناس متعلق به آن خانواده تفکیک می کنیم. با توجه به شرایط مسأله، محصولات هر واحد تولیدی را در یک خانواده ی مجزا قرار می دهیم. مدل ریاضی طبقه ای را به صورت زیر می توان نوشت:

۱,۵. مدل کلی (سطح خانواده)

متغیرهای تصمیم

Z_{it}: مقدار فروش خانواده i در دوره ی t

X_{it}: مقدار تولید خانواده i در دوره ی t

I_{it} : مقدار انبار خانواده i در دوره ی t

O_{it}: ساعات تولید اضافه کار لازم برای خانواده i در دوره ی t

W_{it}: ساعات تولید کار عادی لازم برای خانواده i در دوره ی t

پارامتر ها:

g_{it}: قیمت فروش هر واحد خانواده i در دورهء t

h_{it}: هزینه ی انبار هر واحد خانواده i دردوره ی t

c_{it}: هزینه ی تولید هر واحد خانواده i در دوره ی t

co_{it}: هزینه ی اضافه کاری هر نفر- ساعت در دوره ی t برای خانواده i

cr_{it}: هزینه ی زمان عادی کار هر نفر- ساعت در دوره ی t برای خانواده i

N_i : مقدار تولید در ساعت خانواده i

d_{it}^1: حداقل پیش بینی تقاضای موثر خانواده i در دوره ی t

d_{it}^2: حداکثر پیش بینی تقاضای موثر خانواده i در دوره ی t

SS_{it}: مقدار ذخیره ی اطمینان خانواده i در دوره ی t

k_j: هزینه خرید ماده اولیه ی نوع j

R_{ij}: مقدار ماده اولیه ی نوع j به کار رفته در تولید خانواده i

M_j: مقدار ماده اولیه ی نوع j در دسترس در هر دوره

pw_{it} : حداکثر ساعات تولید کار عادی در دسترس در دوره ی t برای خانواده i

po_{it} : حداکثر ساعات تولید اضافه کار در دسترس در دوره ی t برای خانواده i

$$\max \quad \sum_{i=1}^{4}\sum_{t=1}^{12}\left(g_{it}Z_{it} - (c_{it}X_{it} + cr_{it}W_{it} + co_{it}O_{it} + h_{it}I_{it}) - \sum_{j=1}^{3}\left(k_j R_{ij} X_{it}\right)\right) \qquad (17)$$

S.T. :

$$\mathrm{X_{it}} \le (W_{it} + O_{it})N_i \qquad i \in type \qquad ;t \in time \qquad (18)$$

$$\sum_{\mathrm{i=1}}^{4} R_{ij}X_{it} \le M_j \qquad j = Rawmat \qquad ;t \in time \qquad (19)$$

$$X_{it} + I_{i(t-1)} = Z_{it} + I_{it} \qquad i \in type \qquad ;t \in time \qquad (20)$$

$$\mathrm{SS_{it}} \le I_{it} \le d_{i(t+1)}^1 \qquad i \in type \qquad ;t \in time \qquad (21)$$

$$d_{it}^1 \le Z_{it} \le d_{it}^2 \qquad i \in type \qquad ;t \in time \qquad (22)$$

$$W_{it} \le pw_{it} \qquad i \in type \qquad ;t \in time \qquad (23)$$

$$O_{it} \le po_{it} \qquad i \in type \qquad ;t \in time \qquad (24)$$

$$X_{it}, Z_{it}, I_{it} \in \mathrm{Z} \qquad i \in type - \{3,4\} \qquad ;t \in time \qquad (25)$$

$$X_{it}, Z_{it}, I_{it}, W_{it}, O_{it} \ge 0 \qquad i \in type \qquad ;t \in time \qquad (26)$$

در مدل خانواده تابع هدف (رابطه ی (۱۷)) بیشینه کنندهء سود است. محدودیت (۱۸) بیانگر ظرفیت تولید دستگاه هاست. رابطه ی (۱۹) محدودیت منابع اولیه دردسترس است. رابطه ی (۲۰) محدودیت تعادل را نشان می دهد. روابط (۲۱) و (۲۲) قیود تحدید روی محصولات انبار شده و میزان فروش می باشند. روابط (۲۳) و (۲۴) محدودیت زمان کار عادی و زمان اضافه کار دردسترس را بیان می کنند. رابطه ی (۲۵) محدودیت عدد صحیح بودن تولیدات و رابطه ی (۲۶) غیر منفی بودن متغیرها را عنوان می نماید.

۲,۵. مدل جزئی (سطح محصول)

همان گونه که بیان شد، مقادیر تولید به دست آمده برای خانواده ی معین i در دوره ی مشخص t در سطح کلی به سطح جزئی منتقل می شوند تا به مقادیر تولید اجناس در آن خانواده تبدیل شوند. لذا هر مقدار تولید خانواده، یک محدودیت بر روی تولید اجناس آن خانواده اعمال می کند.

مدل طراحی سطح

$$\text{M}ax \qquad \sum_{k\in K(i)} g_{kit} z_{kit} \qquad (27)$$

$$S.T:$$

$$\sum_{k\in K(i)} z_{kit} = Z_{it} \qquad (28)$$

$$\sum_{k\in K(i)} y_{kit} = X_{it} \qquad (29)$$

$$d^1_{kit} \le z_{kit} \le d^2_{kit} \qquad k\in K(i) \qquad (30)$$

$$lb_{kit} \le y_{kit} - z_{kit} \le ub_{kit} \qquad k\in K(i) \qquad (31)$$

$$lb_{kit} = -e_{ki(t-1)} \qquad k\in K(i) \qquad (32)$$

$$ub_{kit} = I_{it} - e_{ki(t-1)} \qquad k\in K(i) \qquad (33)$$

متغیر های تصمیم:

y_{kit} : مقدار تولید جنس k از خانواده ی i در دوره ی t

z_{kit} : مقدار فروش جنس k از خانواده ی i در دوره ی t

پارامتر ها:

g_{kit} : قیمت فروش واحد جنس k از خانواده ی i در دوره ی t

X_{it} : مقدار تولید خانواده ی i دردوره ی t

Z_{it} : مقدار فروش خانواده ی i در دوره ی t

d^1_{kit} : حداقل تقاضای موثر جنس k از خانواده ی i در دوره ی t

d^2_{kit}: حداکثر تقاضای موثر جنس k از خانواده ی i در دوره ی t

e_{kit}: موجودی انبار جنس k از خانواده ی i در دوره ی t

I_{it}: موجودی انبار خانواده ی i در دوره ی t

در مدل سطحی محصول، هدف ماکزیمم سود فروش می باشد (رابطه ی (۲۷)). محدودیت های (۲۸) و (۲۹) بیان می کند که مجموع مقدار تولید و مقدار فروش محصولات متعلق به هر خانواده در هر دوره می بایست برابر میزان تولید و میزان فروش همان خانواده در آن دوره باشد. محدودیت (۳۰) میزان فروش هر محصول را بین کران پایین و کران بالای تقاضا محدود می کند. روابط (۳۱)، (۳۲) و (۳۳) کران هایی روی تفاضل مقدار تولید و مقدار فروش هر محصول تعریف می کنند.

۶. نتیجه

این مدل ها توسط نرم افزار LINGO حل شده و جواب ها به دست آمده اند. از نکات حائز اهمیت در حل این مسأله، استفاده از دو نرم افزار LINGO و EXCEL و سود بردن از توانایی های این دو نرم افزار در پیوند با یکدیگر می باشد. همانگونه که می دانیم یکی از مشکلات مسائل واقعی، حجم بسیار بالا و گستردگی اطلاعات و داده های مورد استفاده در سیستم است که استفاده و کاربرد آن ها را

مشکل می نماید. از سوی دیگر نوشتن مدل هایی در این اندازه از داده و وارد نمودن این حجم وسیع از اطلاعات، به طور مستقیم، هم بسیار سخت و طاقت فرساست و هم آن که خوانایی مدل را به شدت پایین می آورد و امکان اشکال زدایی و تغییر مدل را مشکل می سازد.
اما از یک سو نرم افزار EXCEL، به عنوان یک نرم افزار داده پرداز، از قدرت بالایی برای مدیریت داده ها برخوردار است و ورود و دسترسی و دسته بندی داده ها، و در نتیجه خوانایی اطلاعات، در آن بسیار ساده است و لذا به عنوان بانک اطلاعاتی داده ها در سیستم از آن استفاده شده است.از سوی دیگر نرم افزار LINGO علاوه بر آن که امکان وارد نمودن مدل به صورت کلی را داراست و با استفاده از دستورات گوناگون از تکرار محدودیت ها و متغیرهای مشابه جلوگیری می کند و لذا از حجم مدل کاسته و بر خوانایی آن می افزاید، امکان پیوند با نرم افزار EXCEL را نیز داراست و می تواند از این نرم افزار به عنوان بانک اطلاعاتی پشتیبان استفاده نماید.
نرم افزار LINGO به سادگی می تواند داده ها را به صورت ماتریس در ابعاد گوناگون از فایلهای EXCEL خوانده و آن گاه جواب ها را نیز به صورت ماتریس هایی در مکان های تعیین شده از فایل های EXCEL وارد نماید، که این کار باعث سهولت حل مدل های برنامه ریزی می شود.
با نگاهی سطحی به مدل ها می توان به تفاوت این دو روش و در عین حال برتری و تأثیر مدل های طبقه ای پی برد. پس از حل مدل ها و نگاهی به آمار به دست آمده، این دلایل روشن تر می شوند.
بخشی از این آمار در جدول زیر آورده شده اند، با توجه به حجم مسائل و میزان اطلاعات مورد نیاز برای هر روش و نیز زمان تلف شده برای هر مسأله (مدل ها بر روی یک رایانه ی PIII 800 اجرا شده اند) و با مقایسه ی جواب های به دست آمده، مشاهده می نماییم که روش مدل طبقه ای به طور قابل ملاحظه ای کارآمدتر است. همچنین با در نظر گرفتن این مطلب که در مسائل واقعی و بزرگتر، این تفاوت حجم اطلاعات و محدودیت ها بیشتر خواهد بود و این که امکان اِعمال نظر در هر سطح توسط مدیران در جهت مصالح شرکت، امتیاز بزرگی برای این روش است.

پارامترهای مقایسه	مدل یک پارچه	سطح خانواده مدل طبقه ای	سطح محصول مدل طبقه ای
زمان (S)	۱۲	۳	۰
حجم حافظه (KB)	۲۵۶	۹۵	۵
تعداد تکرار	۵۰۷	۱۶۶	۳
تعداد ضرایب غیر صفر	۳۳۹۵	۱۰۲۸	۲۵
تعداد متغیرها	۷۸۰	۲۴۰	۶
تعداد محدودیت ها	۷۵۷	۲۸۹	۹

منابع

[1] Bitran, G.R., Haas, E.A. and Hax, A.C., " Hierarchical production planning: A multi- stage system", Technical Report No. 179, Operations Research Center, M.I.T. 1980.

[2] Bitran, G.R., Haas, E.A. and Hax, A.C., " Hierarchical production planning: A single stage system", Operations Research, 29, 1981, 717-743.

[3] Bitran, G.R. and Hax, A.C.," On the design of hierarchical production planning systems", Decision Sciences 8, 1977, 28-55.

[4] Bitran, G.R. and Hax, A.C.," Disaggregation and resource allocation using convex knapsack problems with bounded variables", Management Science 27, 1981, 431-441.

[5] Bitran, G.R. and Tripati, D.," Hierarchical production planning", in: S.C. Graves, A.H.G. Rinnooy-kan and P.H. Zipkin(eds.), Logistics of Production and Inventory, North- Holland Amsterdam, 1993.

[6] Gabbay, H.," A hierarchical approach to production planning", Technical Report No. 120, Operation Research Center, MIT, USA, 1975.

[7] Golovin, J.J.," Hierarchical integration of production planning and control", Technical Report No. 116, Operation Research Center, MIT, USA, 1975.

[8] Hax, A.C. and Meal, H.C.," Hierarchical integration of production planning and scheduling", in: M. Geisler (ed.), TIMS Studies in Management Science, Vol. 1, Logistics, North-Holland, American Elsevier, New York, 1975.

[9] Herrmann, J.W., Mehra, A.,Minis, I. and Porth, J.M.," Hierarchical production planning with part, spatial and time aggregation", 2000.

[10] Ozdamar, L., Yetis, N. and Alti, A.O.," A modified hierarchical production planning system integrated with MRP: A case Study", Production Planning and Control 8, 1996a.

[11] Ozdamar, L., Alti, A.O. and Bozyel, M.A.," Heuristic family disaggregation techniques for Hierarchical production planning systems", International Journal of Production Research 34, 1996b, 2613-2628.