مقدار اقتصادی سفارش برای دوره ای با تقا ضا ومقدار موجودی اولیه تصادفی

رسول حجی – دانشگاه صنعتی شریف

مهدی بیجاری – دانشگاه صنعتی شریف

چکیده

مسئله ا حتمالی یک دوره ای که به عنوان مسئله روزنامه فروش نیز شناخته می شود تعیین مقدار سفارش جهت حداکثر کردن سود یا کمینه کردن هزینه در یک دوره با تقاضای احتمالی است. در این مقاله مسئله روزنامه فروش در حالتی که موجودی ابتدای دوره یک متغیر تصادفی است بررسی شده است. مدل پیشنهادی هنگامی کاربرد دارد که قبل از دوره اصلی باید برای سفارش کالا اقدام کرد. در زمان تصمیم گیری موقعیت موجودی معلوم است، اما قبل از شروع وره اصلی تقاضا موقعیت موجودی به دلایل مختلف کاهش میابد. درنتیجه موقعیت موجودی در ابتدای دوره یک متغیر تصادفی است. در مقاله حاضر روش تعیین مقدار بهینه سفارش برای مدل پیشنهادی ارائه شده است.

کلید واژه : تقاضای احتمالی، مدل یک دوره ای، مقدار بهینه سفارش، موجودی اولیه تصادفی

مقدمه

مدل احتمالی یک دوره ای (SPP)از مدل های پایه کنترل موجودی است.در این مدل تقاضای دوره مورد نظر احتمالی است. در صورتیکه تقاضا بیش از موجودی در دست باشد فروشنده یک مقدار سود از دست می دهد. در انتهای دوره کالای با قیمانده با قیمت کمتر از قیمت خرید فروخته می شود و یا از رده خارج می شوند. این مدل غالبا به تصمیم گیری در مورد کالاهای فصلی، سبک روز و فاسد شدنی در تولید عمده فروشی و خرده فروشی کمک می کند [۱]. مدل احتمالی یک دوره ای کار برد گسترده ای دارد. با کاهش دوره عمر محصولات اهمیت و کاربرد این مدل افزایش یافته است [۲].

در طی سالهای اخیر علاقه به این مساله افزایش یافته است. خوجا [۲] در یک مقاله مروری کار های انجام شده دراین زمینه را که بیش از نود مورد بوده ارائه کرده است. در کتاب سیلور و همکارن [۳] نیز برخی از توسعه های ارائه شده در زمینه این مدل بررسی شده است. تحقیقات اخیر در مدل احتمالی یک دوره ای توسط ویراکتاراکیس [۴]، رحیم و همکاران [۵] و مونسر [۶] انجام شده است. لیکن تا کنون تحقیقی که در ان موجودی اولیه متغیر تصادفی باشد ارائه نشده است. در این مقاله موجودی اولیه در ابتدای دوره بصورت یک متغیر تصادفی در نظر گرفته شده است. ما این مسئله را "SPPSI" می نامیم.

تعریف مسئله

برای یک کالای خاص تقاضای اصلی در یک دوره اتفاق می افتد. این کالا باید قبل از دوره مورد نظر سفارش داده شود. پس از این زمان امکان سفارش دهی مجدد وجود ندارد. تقاضای دوره مورد نظر تصادفی بوده و توزیع آن مشخص است. برای تامین تقاضا در دوره اصلی سفارشی با مقدار Q مدتی قبل از شروع دوره صادر می شود. این سفارش در شروع دوره در دسترس خواهد بود. موجودی اولیه در شروع دوره درست یک لحظه قبل از رسیدن سفارش یک متغیر تصادفی با توزیع معلوم است. به عنوان مثال یک توزیع کننده عمده ضد یخ باید دو ماه فبل از زمستان سفارش خرید خود را بدهد. در زمان سفارش موجودی در دست برابر I_m است ، اما در طول دو ماه قبل از زمستان تقاضای جزئی وجود دارد و یا به دلایلی مانند خرابی ،تبخیر و مواردی از این قبیل ، موقعیت موجودی کاهش می‌یابد. در نتیجه سطح موجودی در ابتدای دوره اصلی یک متغیر تصادفی خواهد بود. تصمیم گیرنده می خواهد بر اساس این متغیر تصادفی تصمیم بگیرد.

برای حل مدل احتمالی یک دورهای دو رهیافت وجود دارد. در رهیافت اول هزینه های مورد انتظار کمینه می شود ودر رهیافت دوم سود بیشبنه می گردد. هر دو مورد به یک نتیجه منجر می شود. در مقاله حاضر از رهیافت اول در SPP [۷] و تعمیم آن به SPPSI استفاده می شود.

فرضیات و نمادها

در این مقاله تمام فرضیات مدل کلاسیک SPP برقرار است. بعلاوه فرض می شود که:

۱- کالا باید قبل از شروع دوره سفارش داده شود. در زمان سفارش مقدار موجودی در دست برابر I_m است.

۲- موجودی در دست در شروع دوره اصلی یک متغیر تصادفی غیر منفی با توزیع معلوم است.

نمادهای استفاده شده در مقاله به شرح زیرند:

X تقاضا در دوره اصلی، یک متغیر تصادفی

$f(x)$ تابع چگالی احتمال تقاضا

$F(x)$ تابع تجمعی تقاضا

C هزینه خرید یک واحد کالا

V قیمت فروش یک واحد کالا

H هزینه نگهداری یک واحد کالادر پایان دوره

Q مقدار سفارش

I موجودی اولیه در شروع دوره اصلی قبل از رسیدن سفارش، متغیر تصادفی

$g(i)$ تابع چگالی موجودی اولیه

I_m حداکثر سطح موجودی اولیه

I_n حداقل سطح موجودی اولیه

R سطح موجودی در ابتدای دوره اصلی بعد از رسیدن سفارش

۳- مدل احتمالی یک دوره ای

در مدل احتمالی یک دوره ای، مسئله تعین سطح بهینه موجودی در دست در ابتدای دوره است بطوریکه امید ریاضی هزینه کمینه شود. هنگامی که مقدار بهینه سطح موجودی مشخص شد، مقدار سفارش برابر $\max(0,R^*-I)$ خواهد بود [۷] و [۳] ، که I موجودی در دست در زمان سفارش است. امید ریاضی هزینه دوره شامل مجموع هزینه های خرید کالا، نگهداری موجودی و کمبود است. امید ریاضی هزینه دوره در SPP به صورت زیر نوشته می شود [۷] :

$$E(K(R))=C(R-I)+H\int_0^R (R-x)f(x)dx+V\int_R^\infty (x-R)f(x)dx \qquad (۱)$$

هزینه مورد انتظار با مقدار مناسب R کمینه می شود. R^* از حل رابطه زیر بدست می اید:

$$F(R^*)=\frac{V-C}{V+H} \qquad (۲)$$

بنابر این سیاست بهینه ،سفارش مقدار Q است، که برابر است با [۷]:

$$\begin{cases} Q = R^*-I & , \text{ if } R^*>I \\ Q=0 & , \text{ if } R^*<=I \end{cases} \qquad (۳)$$

۴- مدل SPP با موجودی تصادفی در ابتدای دوره

اگر موجودی اولیه یک متغیر تصادفی باشد، آنگاه R یک متغیر تصادفی خواهد بود.می توان نوشت:

$$E(K(R)) = E(K(Q+I))$$

برای تعیین هزینه مورد انتظار وقتیکه مقدار سفارش Q باشد، روی مقدار موجودی اولیه شرط می کنیم [۸]، یعنی :

$$E[K(Q+I)] = E[E[K(Q+I) \mid I]]$$

پس برای $I=i$ از (۱) و اینکه $R= Q + I$ می توان نوشت:

$$E(K(Q+I) \mid I=i) = CQ + H\int_0^{Q+i}(Q+i-x)f(x)dx + V\int_{Q+i}^{\infty}(x-Q-i)f(x)dx \qquad (٤)$$

حال با بر داشتن شرط از I خواهیم داشت:

$$E(K(Q+I)) = \int_{I_n}^{I_m}\left[CQ + H\int_0^{Q+i}(Q+i-x)f(x)\,dx + V\int_{Q+i}^{\infty}(x-Q-i)f(x)\,dx\right]g(i)\,di \qquad (٥)$$

با توجه به اینکه $\int_{I_n}^{I_m} g(i)\,di$ رابطه (۵) به صورت زیر نوشته می شود:

(٦)

$$E(K(Q+I)) = CQ + H\int_{I_n}^{I_m}\int_0^{Q+i}(Q+i-x)f(x)g(i)\,dx\,di + V\int_{I_n}^{I_m}\int_{Q+i}^{\infty}(x-Q-i)f(x)g(i)\,dx\,di$$

مشتق اول $E[K(Q+I)]$ برحسب Q برابر می شود با:

$$\text{a)۷(}\qquad \frac{dE(K(Q+I))}{dQ} = C + H\int_{I_n}^{I_m}\int_0^{Q+i}f(x)g(i)\,dx\,di - V\int_{I_n}^{I_m}\int_{Q+i}^{\infty}f(x)g(i)\,dx\,di$$

یا :

$$\text{b)۷ (}\qquad \frac{dE(K(Q+I))}{dQ} = C - V + (H+V)\int_{I_n}^{I_m}F(Q+i)\,g(i)\,di$$

و مشتق دوم رابطه (۶) برابر است با:

$$\frac{d^2E(K(Q+I))}{dQ^2} = (H+V)\int_{I_n}^{I_m}f(Q+i)\,g(i)\,di \qquad (٨)$$

بدلیل غیر منفی بودن توابع f و g مشتق دوم $E[K(Q+I)]$ مثبت است. یا بعبارت دیگر $E[K(Q+I)]$ یک تابع محدب است.
مشتق اول را مساوی صفر قرار داده و تساوی (۹) را بدست می آوریم:

$$C - V + (H+V)\int_{I_n}^{I_m}F(Q^*+i)\,g(i)\,di = 0 \qquad (٩)$$

یا:

$$\int_{I_n}^{I_m}F(Q^*+i)\,g(i)\,di = \frac{V-C}{V+H} \qquad (a١٠)$$

یا بعبارت دیگر می توان نوشت:

$$P(X \le Q^* + I) = \frac{V-C}{V+H}$$ ۱۰)(b

اگر (۱۰) دارای جواب غیر منفی باشد از تحدب *E[K(Q+I)]* نتیجه می شود که جواب بهینه *SPPSI* بدست آمده است.توجه کنید که اگر:

$$\int_{I_n}^{I_m} F(i)\, g(i)\, di > \frac{V-C}{V+H}$$

آنگاه (۱۰) برقرار نمی شود و (۹) جواب غیر منفی ندارد. از تحدب *E[K(Q+I)]* و این حقیقت که مشتق اول آن در *Q=0* مثبت است، نتیجه میشود که Q بهینه صفر است.

مثال:

تقاضای کالایی در دوره اصلی فروش یک متغیر تصادفی نمایی با میانگین ۱۰۰ واحد است. کالا باید دو هفته قبل از شروع دوره سفارش داده شود. قیمت خرید هر واحد ۱ واحد پول، قیمت فروش ۵ و هزینه نگهداری کالا های بافیمانده در انتهای دوره ۳ واحد پول است. در زمان سفارش ۳۰ واحد موجودی در دست است. تا شروع دوره اصلی فروش موقعیت موجودی به دلایل مختلف کاهش می یابدو در شروع دوره اصلی فروش یک متغیر تصادفی یکنواخت بین ۱۰ تا ۳۰ واحد خواهد بود. مقدار بهینه سفارش با استفاده از معادله (۱۰a) بدست می آید.

$$F(Q+i) = 1 - e^{-(0.01)(Q+i)}$$

$$\int_{10}^{30} \left(1 - e^{-(0.01)(Q+i)}\right)\left(\frac{1}{20}\right) di = \frac{5-1}{5+3}$$

از حل رابطه فوق ، Q^* ۴۹/۴۸ بدسیت می آید.

فرض کنید که تصمیم گیرنده در زمان سفارش مقدار قطعی موجودی در شروع دوره را می داند. در نتیجه وی مطابق رابطه (۳) سفارش میدهد. امید ریاضی مقدار سفارش بهینه این فرد در صورتیکه موجودی اولیه را به صورت متغیر تصادفی در نظر بگیریم، به صورت زیر نوشته می شود:

$$E(Q_B^*) = \int_{I_n}^{R^*} (R^* - i) g(i) di = \int_{I_n}^{I_m} (R^* - i) g(i) di - \int_{R^*}^{I_m} (R^* - i) g(i) di$$

$$= R^* - E(I) + \int_{R^*}^{I_m} (i - R^*) g(i) di$$

ممکن است برخی تصور کنند که مقدار بهینه سفارش برای مسئله SPPSI از رابطه فوق می تواند بدست آید. اما این مطلب صحیح نیست. مقدار سفارش بهینه در SPPSI باید از رابطه (۱۰) بدست آید. به عنوان مثال در مثال ۱ ، $E(Q_B^*)$ مساوی ۴۹/۳۱ است، در حالیکه Q^* ۴۹/۴۸ است.

توزیع نرمال

اگر تقاضا و موجودی اولیه ابتدای دوره هر دو دارای توزیع نرمال باشند، یک رابطه ساده برای محاسبه مقدار سفارش بدست می آوریم. U را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$U = X - I$$

ازتساوی (۱۰) می توان نوشت:

$$F_U(Q^*) = \frac{V-C}{V+H}$$

که $F_U(u)$ تابع توزیع تجمعی U است.

U یک متغیر نرمال است. امید ریاضی و واریانس این متغیر از روابط زیر بدست می آید:

$$E(U) = E(X) - E(I)$$

$$Var(U) = \sigma_X^2 + \sigma_I^2$$

K را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$k = \frac{Q^* - E(U)}{\sigma_U}$$

و K از رابطه زیر بدست می آید :

$$P_Z(k) = \frac{V - C}{V + H}$$

که $P_z(k)$ احتمال اینستکه یک متغیر تصادفی نرمال استاندارد مقداری کوچکتر یا مساوی K داشته باشد.

می توان نوشت:

$$Q^* = E(U) + k\sigma_U$$

یا:

$$Q^* = E(X) - E(I) + k\left(\sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_I^2}\right) \tag{۱۱}$$

۵- نتیجه گیری

در این مقاله یک حالت جدید از مسئله روزنامه فروش بررسی شده است. در مدل ارائه شده موجودی اولیه در ابتدای دوره به صورت یک متغیر تصادفی در نظر گرفته شده است. روش تعیین مقدار بهینه سفارش در مدل ارائه شده بدست آمده است. همچنین برای توزیع نرمال تقاضا و موجودی ابتدای دوره یک رابطه ساده ارائه شده است.

برای تحقیقات اینده می توان مسئله را در حالت چند محصولی با محدودیت در نظر گرفت.همچنین یافتن روابط ساده برای تعیین مقدار بهینه سفارش با توزیع های احتمالی مختلف تقاضا وتوزیع های احتمالی مختلف موجودی ابتدای دوره نظیر یکنواخت ، نمایی، پواسون و ... پیشنهاد می شود.

مراجع:

[1] Gallego,G and I. Moon, 1993 ,"The distribution free newsboy problem: review and extensions" Journal of the Operational Research Society 44, 825-834.

[2] Khouja, M. , 1999, "The single-period (news-vendor) problem: literature review and suggestions for future research" , Omega International Journal of Management Science 27, 537-553.

[3] Silver, E. A., F.D. Pyke, and R. Peterson, 1998, Inventory Management and Production Planning and Scheduling ,John Wily,New York,Third Edition, 385-397.

[4] Vairaktarakis, G, 2000,"Robust multi-item newsboy models with a budget constraint", International Journal of Production Economics 66, 213-226.

[5] Hariga, M. A. , 1998,"Single period inventory models with two levels of storage", Production Planning and Control 9, 553-560.

[6] . Rahim, M. A, S. N. Kabadi and P. K. Barnerjee, 2000," A single-period perishable inventory model where deterioration begins at a random point in time ", International Journal of Systems Science 31, 131-139.
[7] Johnson , L.A. and D.C. Montgomery, 1974, Operations Research in Production Planning, Scheduling and Inventory control, John Wiley, New York, 48-50.
[8] Ross, S. M., 1983, Stochastic process, John wily & sons, New York.