

معرفی شاخص جدید کارایی فرآیند چند متغیره

مهندس محمدرضا عبدالله زاده
دانشجوی کارشناسی ارشد
دانشکده مهندسی صنایع
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
mr_abdollahzadeh@sina.kntu.ac.ir

دکتر حمید شهرياری
عضو هیئت علمی
دانشکده مهندسی صنایع
دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی
hshahriari@kntu.ac.ir

واژه‌های کلیدی

کنترل کیفیت چند متغیره، شاخص های کارایی فرآیند چند متغیره، توزیع نرمال چند متغیره، ناحیه ترانس تعدیل شده

چکیده

شاخصهای کارایی فرآیند نظیر C_p و C_{pk} در صنایع تولیدی به عنوان ابزارهای سنجش قابلیت و کارایی فرآیند موارد استفاده وسیعی دارند. این شاخصها معیاری جهت ارزیابی دقت، صحت و عملکرد فرآیندهای تولیدی می‌باشند. طی دو دهه گذشته تحقیقات وسیعی در خصوص شاخصهای کارایی فرآیند تک متغیره انجام پذیرفته است، لیکن شاخصهای کارایی فرآیند چند متغیره در این بین کمتر مورد توجه قرار گرفته‌اند. این شاخصها که جهت ارزیابی وضعیت فرآیندهای تولیدی با چندین مشخصه همبسته (نظیر وزن، طول و عرض) مورد استفاده می‌باشند، امروزه با گسترش سیستمهای اتوماتیک کنترل محصول و امکان دسترسی به حجم بالاتری از داده‌های کمی و کیفی در رابطه با فرآیند، کاربرد وسیع‌تری در صنعت یافته‌اند. در این تحقیق ابتدا شاخصهای فعلی کارایی فرآیند چند متغیره معرفی گشته و سپس به معرفی شاخص جدیدی در این زمینه پرداخته شده است. این شاخص با رویکرد جدیدی بر تعریف متداول شاخصهای کارایی فرآیند چند متغیره که مبتنی بر نسبت احجام ناحیه ترانس و ناحیه فرآیند می‌باشد، ارائه گردیده است. در انتهای تحقیق نیز عملکرد این شاخص جدید در شرایط مختلف با بهترین شاخصهای فعلی مقایسه گردیده و نتایج این مقایسه ارائه شده است. نتایج مقایسه حاکی از بهبود عملکرد شاخصهای فعلی کارایی فرآیند توسط بردار کارایی فرآیند چند متغیره پیشنهادی NMPCV است. این امر، به خصوص در فرآیندهای با همبستگی بالا بین مشخصه‌ها و فرآیندهایی با کارایی مطلوب برای تعدادی از مشخصه‌ها و کارایی نامطلوب برای تعدادی دیگر از مشخصه‌ها مشهودتر می‌باشد.

۱- مقدمه

کیفیت محصولات در تمامی فعالیتهای تولیدی و صنعتی طی ادوار مختلف، یکی از مهمترین دغدغه‌های صنعتگران بوده است. مفهوم کیفیت طی سالیان مختلف دستخوش تغییرات اساسی شده است و این امر به نوبه خود باعث پیشرفتهایی در مفاهیم کنترل کیفیت از بازرسی ساده محصولات تولید شده در سالهای آغازین قرن بیستم تا مفاهیم پیشرفته مدیریت کیفیت جامع (TQM) و Six Sigma طی سالهای اخیر شده است. یکی از موضوعات اساسی که طی این سالها بدان پرداخته شده است بررسی کارایی یک فرآیند می‌باشد. تحقیقات

زیادی در رابطه با بحث کارایی فرآیند یک متغیره طی سالیان اخیر انجام پذیرفته است، لیکن در این میان کمتر به مفاهیم چند متغیره پرداخته شده است. این در حالی است که طی سالیان اخیر با استفاده از سیستمهای اتوماتیک بازرسی محصول، امکان دسترسی به حجم بیشتری از داده‌های کیفی و کمی در رابطه با یک فرآیند وجود داشته و به دلیل همبستگی بسیاری از این داده‌ها به یکدیگر، نیاز به استفاده از روشهای چند متغیره در مطالعات کارایی فرآیند احساس می‌گردد. در این تحقیق سعی بر بررسی شاخص‌های فعلی کارایی فرآیند یک و چند متغیره و معرفی یک شاخص جدید و نیز نحوه کاربرد آن شده است.

۱-۱- تحت کنترل بودن و کارا بودن یک فرآیند

نمودارهای کنترلی به عنوان مهمترین ابزار در کنترل آماری فرآیند مطرح می‌باشند. این نمودارها با فراهم نمودن اطلاعات مورد نیاز، امکان کاهش تغییرات را فراهم می‌آورند. از طرفی شاخص‌های کارایی فرآیند با در نظر گرفتن الزامات تعیین شده از سوی مشتری، استانداردها و داده‌های واقعی اخذ شده از فرآیند، امکان مقایسه آنچه که رخ داده در مقایسه با آنچه که باید باشد را فراهم می‌نماید. به طور خلاصه نمودارهای کنترلی ابزاری جهت شناسایی و از بین بردن علل خاص^۱ می‌باشند در حالیکه مطالعه کارایی فرآیند^۲ ابزاری جهت کاهش علل عام^۳ و تغییرات ذاتی در یک فرآیند می‌باشند. علل خاص که شامل دلایل قابل شناسایی و محدود در فرآیند می‌باشند، تأثیر بسیاری بر محصول خروجی داشته و با حذف آنها فرآیند تحت کنترل قرار خواهد گرفت. علل عام شامل دلایل کوچک و بسیار زیادی در فرآیند بوده که نمی‌توان آنها را از ذات فرآیند جدا نمود. این علل کم اثر بوده و لیکن با شناسایی و حذف آنها پراکندگی کاهش و کارایی فرآیند افزایش می‌یابد. با توجه به توضیحات فوق اهمیت مطالعات کارایی فرآیند در کنار تحت کنترل قرار دادن فرآیند کاملاً مشخص می‌شود.

۱-۲- نیاز به استفاده از شاخص‌های مختلف کارایی فرآیند

هنگامی که فرآیند از نظر ثبات تحت کنترل باشد سه دلیل عمده می‌تواند باعث کیفیت پایین محصولات و عدم کارایی فرآیند شود. این سه دلیل عمده عبارتند از:

- پراکندگی بالای فرآیند
 - عدم انطباق مناسب میانگین فرآیند بر مرکز حدود تolerانس (مقدار هدف)
 - عدم انطباق میانگین فرآیند بر مرکز حدود تolerانس و پراکندگی بالای فرآیند
- در طول سالیان اخیر شاخص‌های مختلفی برای نمایش سه وضعیت فوق ارائه شده‌اند. تعدادی از این شاخصها فقط پراکندگی فرآیند را در نظر می‌گیرند (مانند C_p) و برخی دیگر تغییرات و مرکزیت فرآیند را به صورت همزمان در نظر گرفته‌اند (مانند C_{pk}). توضیحات جامع و مرور کاملی در خصوص این شاخصها به همراه فرمولهای محاسباتی هر یک، در مراجع [1], [9], [12], [13] و [16] قابل دسترسی هستند.

۱-۳- معرفی شاخص‌های کارایی فرآیند تک متغیره

مهمترین شاخص‌های کارایی فرآیند تک متغیره شامل شاخص‌های C_p ، C_{pk} و C_{pkm} می‌باشند. شاخص C_p در مرجع [14] به صورت زیر تعریف شده است.

(۱)

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma}$$

۱- Special Causes (Assignable Causes)

۲- Process Capability Study

۳- Common Causes (Random Causes)

در رابطه فوق USL , LSL به ترتیب حد بالای مشخصه فنی^۱ و حد پایین مشخصه فنی^۲ می‌باشند و σ برابر با انحراف معیار فرآیند می‌باشد. شاخص کارایی فرآیند C_p به مکان واقع شدن میانگین فرآیند نسبت به حدود مشخصات فنی توجهی ندارد. در صورتی که عدم تمرکز میانگین فرآیند باعث کاهش کارایی فرآیند می‌گردد. جهت رفع این نقیصه شاخص C_{pk} در مرجع [14] به صورت زیر تعریف شده است:

(۲)

$$C_{PK} = \min \left\{ \frac{USL - \mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right\}$$

در رابطه فوق μ برابر با میانگین فرآیند می‌باشد.

با در نظر گرفتن تابع زیان شاخص C_{pkm} در مرجع [14] به صورت زیر تعریف گردیده است:

(۳)

$$C_{pkm} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

در رابطه فوق T برابر با مرکز حدود مشخصات فنی است و معمولاً به صورت $T = \frac{1}{2}(LSL + USL)$ تعریف می‌گردد.

۴-۱- شاخصهای کارایی فرآیند چند متغیره

شاخصهای کارایی فرآیند چند متغیره که در دهه ۹۰ میلادی مورد توجه قرار گرفتند به منظور اندازه گیری کارایی فرآیندهایی با چندین مشخصه همبسته مورد استفاده قرار می‌گیرند. به طور کلی این شاخصها در ۵ گروه کلی قابل دسته بندی می‌باشند:

- (۱) شاخصهای بر مبنای تقسیم حجم ناحیه تolerانس بر ناحیه فرآیند: دو شاخص عمده در این دسته شامل شاخص ارائه شده توسط شهریاری و همکاران [1995] و شاخص ارائه شده توسط تام و همکاران [1993] می‌باشد.
- (۲) شاخصهای بر مبنای احتمال تولید محصول نامنطبق: این شاخصها شامل شاخص ارائه شده توسط پولانسکی [2001]، شاخص ارائه شده توسط سوراجیت پال [1999] و شاخص ارائه شده توسط چن [1994] می‌باشد.
- (۳) شاخص کارایی فرآیند بر مبنای آنالیز مؤلفه‌های اصلی: این شاخص توسط وانگ و چن [1999] ارائه شده است.
- (۴) شاخصهای کارایی فرآیند چند متغیره بر مبنای بسط شاخصهای یک متغیره: این دسته شامل شاخصهای ارائه شده توسط هولمز و مرگن [1999] و شاخص ارائه شده توسط چن و همکاران [2003] می‌باشد.
- (۵) سایر شاخصها: از دیگر شاخصهایی که در دسته‌های فوق‌الذکر قابل تعریف نیستند می‌توان به شاخص ارائه شده توسط ویورز [1998] و شاخص ارائه شده توسط بویلز [1996] اشاره نمود.

در این بخش ۳ شاخص مطرح کارایی فرآیند چند متغیره به صورت مختصر معرفی می‌گردند و خواننده در صورت علاقه می‌تواند به مراجع ارائه شده برای هر یک از شاخصها مراجعه نماید.

۴-۱-۱- فرضیات و علائم به کار رفته در معرفی شاخصهای کارایی فرآیند چند متغیره با متغیرهای وابسته

در حالت چند متغیره، X به صورت یک بردار v بعدی با توزیع نرمال چند متغیره با بردار میانگین μ و ماتریس واریانس-کواریانس Σ تعریف می‌شود. لذا یک نمونه به اندازه n از فرآیند را می‌توان به صورت یک ماتریس $v \times n$ و به صورتی که در شکل ۱ آمده نمایش داد. \bar{X} یک بردار با v مولفه بوده که شامل میانگین نمونه‌ای v مشخصه می‌باشد و S یک ماتریس $v \times v$ است که اجزاء آن شامل واریانس و کواریانسهای نمونه‌ای می‌باشند.

اجزای ماتریس واریانس-کواریانس نمونه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌گردند:

۱- Upper Specification Limit

۲- Lower Specification Limit

$$s_{ij} = \frac{\sum_{k=1}^n ((x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j))}{n-1} \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (4)$$

	مشاهدات						\bar{x}	
	1	2	.	.	.	n		
تخت بررسی مشخصه های	1	x_{11}	x_{12}	.	.	.	x_{1n}	\bar{x}_1
	2	x_{21}	x_{22}	.	.	.	x_{2n}	\bar{x}_2

	v	x_{v1}	x_{v2}	.	.	.	x_{vn}	\bar{x}_v

شکل ۱- نمایش عمومی داده‌های فرآیند

همچنین حدود بالا و پایین هر مشخصه X_i به ترتیب با USL_i و LSL_i مشخص گردیده و حدود بالا و پایین برای کلیه مشخصه‌ها به صورت بردارهای $1 \times v$ ، USL و LSL نمایش داده می‌شوند. از طرفی درجه چند همخطی^۱ که مشخص کننده درجه همبستگی بین مشخصه‌های کیفی فرآیند است با δ نمایش داده شده و به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$\delta = \frac{1}{|\rho|} \quad (5)$$

در رابطه فوق ρ نمایانگر ماتریس همبستگی مشخصه‌های تحت بررسی بوده که اجزای آن برابر با ضریب همبستگی بین مشخصه‌ها می‌باشند.

(۶)

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \dots & \rho_{1v} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \dots & \rho_{2v} \\ \rho_{v1} & \rho_{v2} & \dots & \rho_{vv} \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\rho_{ij} = \frac{\text{cov}(x_i, x_j)}{\sqrt{\text{var}(x_i)} \sqrt{\text{var}(x_j)}} = \frac{\sigma_{ij}}{\sqrt{\sigma_{ii}} \sqrt{\sigma_{jj}}}$$

شکل کانتورهای توزیع نرمال در حالت دو متغیره به شکل یک بیضی و درحالتی که تعداد متغیرها از ۲ بیشتر باشد به شکل یک ابربیضی می‌باشند [۱۰]. این کانتورها بصورت مسیرهایی از مقادیر x که یک مقدار ثابت را برای تابع چگالی معین می‌کنند تعریف گردیده و از رابطه زیر پیروی می‌نمایند:

(۸)

$$(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) = c^2$$

این بیضی‌ها (ابریضی‌ها) دارای مرکز μ بوده و محورهای آن برابر با $\pm c\sqrt{\lambda_i} e_i$ بوده و طول قطرهای آن $2c\sqrt{\lambda_i}$ می‌باشند.

همچنین متغیر تصادفی $Y = (X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu)$ دارای توزیع χ^2_v می‌باشد. [۱۰]

به عبارت دیگر :

(۹)

$$p\{(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \leq x^2_{(v, \alpha)}\} = 1 - \alpha$$

در روابط فوق λ_i و e_i به ترتیب برابر مقدار ویژه i ام و بردار ویژه i ام ماتریس واریانس-کواریانس می‌باشند.

^۱-Multicollinearity

۲-۴-۱- شاخص CPM

این شاخص توسط شهریاری و همکاران [1995] مطرح گشته است. شاخص مطرح شده در حقیقت بسط شاخص کارایی فرآیند دو متغیره مطرح شده توسط هیوبل^۱ و همکاران [1991] می‌باشد. از آنجایی که شاخص مطرح شده دارای سه مؤلفه بوده و به صورت یک بردار می‌باشد، در ادامه از آن به عنوان بردار کارایی فرآیند چند متغیره^۲ یاد می‌گردد. در محاسبه این شاخص فرض بر نرمال چند متغیره بودن توزیع داده‌ها می‌باشد. ناحیه تفرانس در حالت ۲ بعدی به شکل یک مستطیل در حالت ۳ بعدی به شکل یک مکعب مستطیل و در ابعاد بالاتر به شکل یک ابر مستطیل می‌باشد. در این روش ناحیه فرآیند توسط کوچکترین مستطیل (مکعب مستطیل) که قابلیت محیط نمودن بیضی را داشته باشد، تعدیل می‌شود. ناحیه تفرانس و ناحیه ۹۹٫۷۳٪ فرآیند برای یک فرآیند با توزیع نرمال دو متغیره در شکل ۲ نمایش داده شده است. نخستین مؤلفه بردار کارایی فرآیند که در حقیقت شاخص کارایی فرآیند چند متغیره CPM نامیده می‌شود برابر با حجم ناحیه تفرانس به حجم ناحیه فرآیند تعدیل شده می‌باشد. با توجه به اینکه نسبت مذکور به اندازه v وابسته است، از ریشه v ام این نسبت استفاده می‌گردد.

(۱۰)

$$C_{PM} = \left[\frac{\prod_{i=1}^v (USL_i - LSL_i)}{\prod_{i=1}^v (UPL_i - LPL_i)} \right]^{\frac{1}{v}}$$

این نسبت مفهومی مشابه شاخص C_p داشته و مقادیر بزرگتر از ۱ آن نمایشگر این است که پراکندگی در فرآیند از پراکندگی مجاز که توسط حدود تفرانس تعیین می‌گردند، کمتر می‌باشد.

مؤلفه دوم جهت بررسی موقعیت مرکز فرآیند نسبت به مقدار هدف تعریف گشته است. این مؤلفه مقدار p-Value آزمون $H_0: \mu = T$ در برابر $H_1: \mu \neq T$ می‌باشد.

در این حالت می‌توان سطح معنی‌داری نظیر $\alpha = 5\%$ انتخاب نموده و هر گاه $PV > \alpha$ باشد، این امر نشان‌دهنده کارایی مطلوب فرآیند از نظر نزدیکی به مقدار هدف در سطح معنی دار مورد نظر می‌باشد.

مؤلفه سوم از بردار مورد بحث شاخص مکانی^۳ LI می‌باشد. این شاخص در بردارنده اطلاعاتی در رابطه با موقعیت مکانی اضلاع مستطیل فرآیند (ناحیه فرآیند تعدیل شده) نسبت به اضلاع ناحیه تفرانس می‌باشد، این شاخص به صورت رابطه زیر تعریف می‌گردد. [۲۴]

$$LI = \begin{cases} 1 & \text{هنگامی که ناحیه فرآیند تعدیل شده کاملاً در درون ناحیه تفرانس می‌باشد} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (۱۱)$$

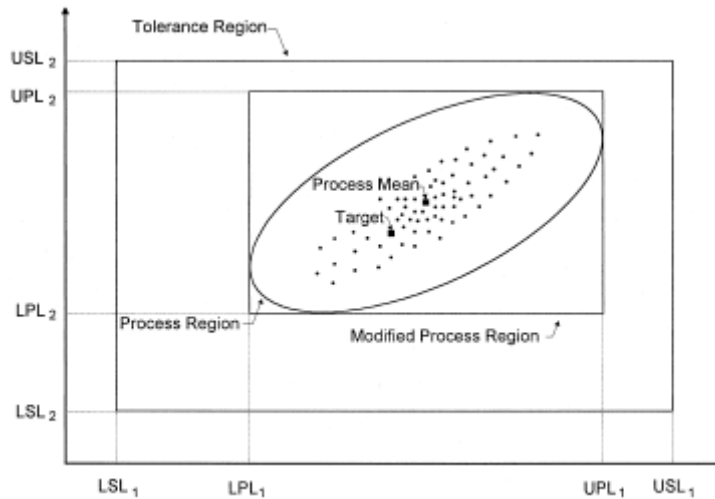
در نهایت بردار کارایی فرآیند چند متغیره به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$MPCV = [C_{pm}, PV, LI] \quad (۱۲)$$

^۱-Hubele, N.F.

^۲- Multivariate Process Capability Vector

^۳- Location Index



شکل ۲- ناحیه فرآیند اصلی و تعدیل شده برای فرآیند با تابع توزیع نرمال دو متغیره

۳-۴-۱- شاخص MC_{pm}

این شاخص که توسط تام^۱ و همکاران [1993] مطرح گردیده است، در حقیقت بسط شاخص یک متغیره C_{pkm} می‌باشد. کارل^۲ و همکاران [1994] این شاخص را برای حالت اندازه‌گذاری و تolerانس دهی هندسی^۳ بسط داده‌اند. تام این شاخص را به صورت زیر تعریف نموده است.

$$MC_{pm} = \frac{Vol.(R_1)}{Vol.(R_2)} \times D \quad (13)$$

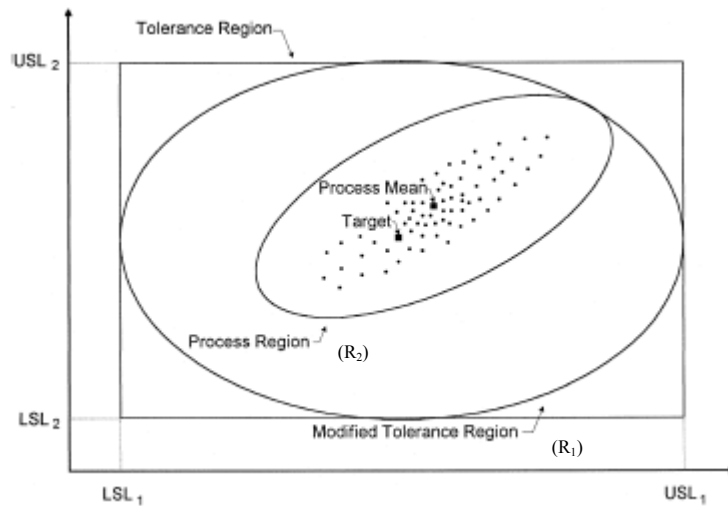
همانگونه که از رابطه فوق مشخص است، این شاخص در حقیقت نسبت حجم دو ناحیه R_1 و R_2 می‌باشد. R_1 ناحیه تolerانس تعدیل شده و R_2 ناحیه فرآیند (در مقیاس % ۹۹,۷۳) می‌باشد. ناحیه تolerانس تعدیل شده بزرگترین بیضی (بیضوی) می‌باشد که مرکز آن بر مقدار هدف واقع بوده و کاملاً در داخل ناحیه تolerانس اصلی قرار گیرد. شکل ۳ وضعیت ناحیه تolerانس اصلی و تعدیل شده را در کنار ناحیه فرآیند ۹۹,۷۳٪ برای یک فرآیند با تابع توزیع نرمال دو متغیره نمایش می‌دهد. مقدار MC_{pm} با توجه به رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$MC_{pm} = \frac{Vol.(R_1)}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}} \cdot (\pi \chi_{(v,0.0027)}^2)^{\frac{v}{2}} \cdot (\Gamma(1 + \frac{v}{2}))^{-1}} \times [1 + (\mu - T)' \Sigma^{-1} (\mu - T)]^{-\frac{1}{2}} \quad (14)$$

^۱-Taam, Winson

^۲-Karl, D.P.

^۳-Geometric Dimensioning and Tolerancing



شکل ۳- ناحیه تلرانس اصلی و تعدیل شده برای فرآیند با توزیع نرمال

هنگامی که μ در داخل ناحیه فرآیند تعدیل شده قرار نگیرد، مقدار MC_{pm} معادل صفر تعریف می‌گردد.

۴-۴-۱- شاخص $MC_{p(pc)}$

این شاخص توسط وانگ^۱ و چن^۲ [1999] مطرح شده است. وانگ این شاخص را با استفاده از تجزیه و تحلیل مؤلفه‌های اصلی بنا نهاده است. مهمترین مزیت‌های این شاخص سادگی کار با آن و همچنین عدم وابستگی به فرض نرمال بودن مقادیر فرآیند می‌باشند [۲۳]. رویه مطرح در این روش به این صورت است که یک نمونه n تایی از فرآیند با v مشخصه گرفته می‌شود و آماره‌های \bar{X} , S محاسبه می‌شوند. آنگاه بردارهای ویژه و مقادیر ویژه برای ماتریس S به دست می‌آیند. سپس مؤلفه اصلی λ_1 به صورت زیر تعریف می‌گردد.

(۱۵)

$$PC_i = e_i' X \quad i = 1, 2, \dots, v$$

نسبت مقدار ویژه λ_1 به جمع مقادیر ویژه برابر با درصد پراکندگی می‌باشد که به مؤلفه اصلی λ_1 مربوط می‌باشد.

$$\text{درصد پراکندگی مرتبط با مؤلفه اصلی } i \text{ ام} = \frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^v \lambda_i} \quad (16)$$

همچنین حدود مشخصه پایین و بالا، مقدار هدف و واریانس نمونه‌های مؤلفه‌های اصلی از روابط زیر قابل محاسبه هستند:

(۱۷)

$$\begin{cases} LSL_{pci} = e_i' LSL \\ USL_{pci} = e_i' USL \\ T_{pci} = e_i' T \\ S_{pci} = e_i' S e_i \end{cases}$$

معمولاً تعداد کمی از مؤلفه‌های اصلی حدود ۹۰-۸۰٪ از پراکندگی فرآیند را در خود دارند به این ترتیب با در نظر گرفتن این مؤلفه‌های اصلی می‌توان ابعاد مسئله را کاهش داد. برای بررسی اینکه چه مؤلفه‌های اصلی می‌بایست در تجزیه و تحلیل مورد توجه قرار گیرند، از آزمون مطرح شده در مرجع [۲۲] استفاده می‌گردد.

در نهایت شاخص کارایی فرآیند چند متغیره $MC_{p(pc)}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

^۱-Wang, F.K.

^۲-Chen, J.C.

(۱۸)

$$MC_{p(pc)} = \sqrt[k]{\prod_{i=1}^k C_{p,pci}}$$

در رابطه فوق k برابر با تعداد مولفه‌های اصلی مورد نظر در تجزیه و تحلیل، S_{pci} برابر با واریانس نمونه ای مولفه اصلی i ام و $C_{p,pci}$ شاخص کارایی فرآیند متناظر با i امین مولفه اصلی می‌باشد و از رابطه زیر قابل محاسبه است:

(۱۹)

$$C_{p,pci} = \frac{USL_{pci} - LSL_{pci}}{S_{pci}}$$

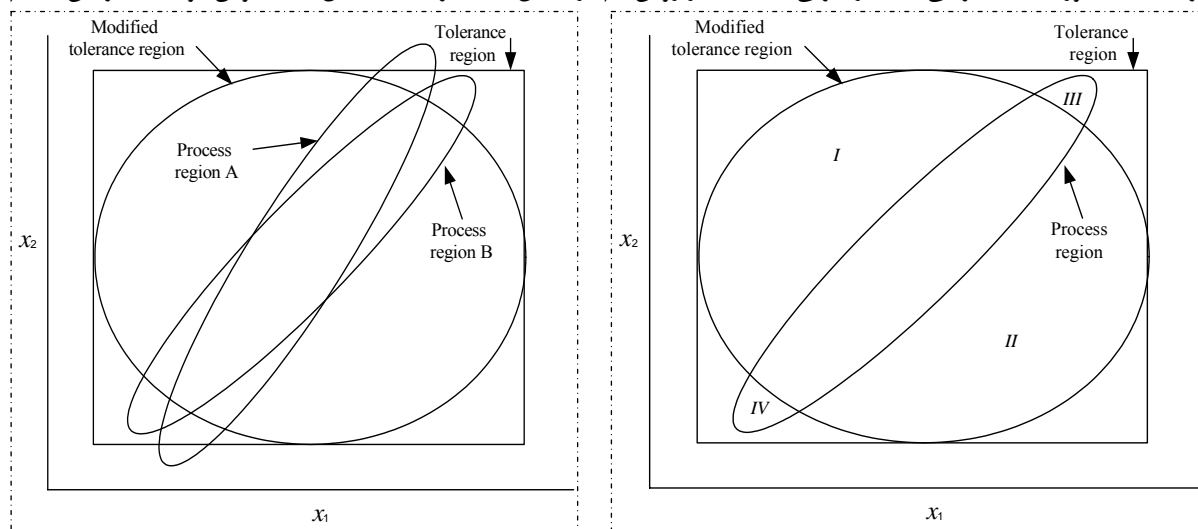
۲- معرفی بردار کارایی فرآیند چند متغیره پیشنهادی NMPCV

همانگونه که در فصل قبل اشاره گردید شاخص MC_{pm} توسط تام و همکاران [1993] مطرح گردیده است. در تعریف شاخص MC_{pm} ، ناحیه تolerانس مهندسی با بزرگترین بیضی محاط در داخل این ناحیه تعدیل می‌گردد. به اعتقاد نگارنده روش به کار رفته در تعدیل ناحیه تolerانس مهندسی دارای ایراداتی می‌باشد، زیرا با بررسی این روش تعدیل ناحیه تolerانس، به خوبی مشخص می‌گردد که شکل، موقعیت و جهت ناحیه فرآیند (بیضی فرآیند) در تعدیل ناحیه تolerانس اثری ندارد. اشکالات وارد بر این روش از دو جهت قابل بررسی می‌باشد:

الف) با دقت در شکل ۴ که نمایشگر یک ناحیه تolerانس مستطیل شکل، یک ناحیه تolerانس تعدیل شده و یک ناحیه فرآیند متفاوت است، مشخص می‌شود که احتمال قرار گرفتن داده‌ها در قسمت‌های I و II بسیار پایین بوده و این قسمت‌ها عملاً جزء فضای بلااستفاده ناحیه تolerانس می‌باشند که در نظر گرفتن آنها در محاسبه حجم (سطح) ناحیه تolerانس به منظور محاسبه شاخص کارایی فرآیند باعث ایجاد خطا در محاسبه می‌گردد. در نتیجه فضاهای I و II می‌بایست در تعدیل ناحیه تolerانس حذف گردند. از طرفی چنانچه از روش تام در تعدیل ناحیه تolerانس استفاده گردد، نواحی III و IV در شکل ۴ از ناحیه تolerانس حذف می‌گردند، در صورتی که کاملاً مشخص است که این فضاها جزء فضاهای موثر ناحیه تolerانس بوده و احتمال واقع شدن مشاهدات در این نواحی بسیار بالا می‌باشد. در نتیجه در تعدیل ناحیه تolerانس حذف این نواحی باعث ایجاد خطا در برآورد ناحیه تolerانس موثر می‌گردد.

ب) در تعدیل ناحیه تolerانس با استفاده از روش تام، شکل و جهت قطر اصلی بیضی فرآیند مدنظر قرار نمی‌گیرند. به عنوان مثال ناحیه تolerانس نمایش داده شده در شکل ۵ را که دارای دو ناحیه فرآیند متفاوت در دو دوره متفاوت زمانی (به دلیل ایجاد تغییراتی در فرآیند) می‌باشد را مدنظر قرار دهید (لازم به ذکر است که هر دو فرآیند در دو دوره زمانی مورد اشاره تحت کنترل می‌باشند):

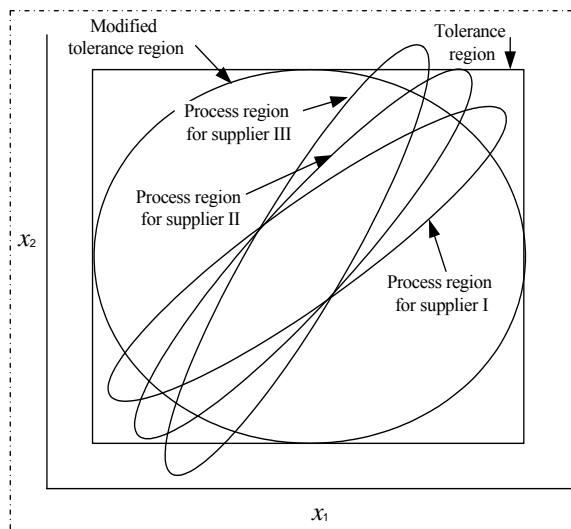
سطح نواحی فرآیند a و b با یکدیگر برابر می‌باشد، لیکن زاویه بین قطر اصلی ناحیه فرآیند b با محور X_1 از زاویه بین قطر اصلی ناحیه فرآیند a با محور X_1 بیشتر می‌باشد. از طرفی با استفاده از روش تام در تعدیل ناحیه فرآیند، به دلیل مشابه بودن دو ناحیه تolerانس، حجم



شکل ۵- نواحی فرآیند و تolerانس تعدیل شده برای دو

شکل ۴- فضاهای موثر و غیر موثر ناحیه تolerانس

ناحیه تolerانس تعدیل شده a و b برابر می‌باشند. در نتیجه مقدار شاخص کارایی فرآیند در دو فرآیند a و b برابر می‌باشند. این در حالی است که در فرآیند b به وضوح مقدار ضایعات تولیدی (محصول تولیدی خارج از حدود تolerانس) بیشتر از فرآیند a می‌باشد. از طرفی یکی از کاربردهای مهم شاخص های کارایی فرآیند، انتخاب تامین کنندگان می باشد. به عنوان مثال شرکتی را در نظر بگیرید که قصد انتخاب تامین کننده اصلی خود را از بین ۳ تولید کننده دارا می باشد. با فرض اینکه سایر شرایط ارائه شده از سوی تولید کنندگان یکسان می باشد، این شرکت قصد دارد از شاخص کارایی فرآیند به عنوان معیار انتخاب



شکل ۶- ناحیه تolerانس اصلی و تعدیل شده برای سه ناحیه فرآیند مربوط به سه تولید کننده متفاوت

تامین کننده اصلی استفاده نماید. شکل ۶ نمایشگر ناحیه تolerانس اصلی و تعدیل شده به روش تام و سه ناحیه فرآیند مختلف (مربوط به سه تولید کننده) با توجه به نمونه های گرفته شده از خطوط تولید این تولید کنندگان می باشد. در این شرایط چنانچه از روش تام به منظور محاسبه شاخص کارایی فرآیند چند متغیره استفاده شود، مقدار شاخص کارایی فرآیند محاسبه شده برای سه تولید کننده یکسان خواهد بود در صورتی که کاملاً مشخص است که مقدار ضایعات تولیدی برای این سه تولید کننده یکسان نبوده و تولید کننده I وضعیت بهتری نسبت به دو تولید کننده دیگر خواهد داشت و این امر در نهایت باعث ایجاد خطا در فرآیند تصمیم گیری می شود.

توضیحات فوق لزوم اثرگذاری شکل ناحیه فرآیند (که خود متأثر از ماتریس واریانس- کوواریانس می‌باشد) را در تعدیل ناحیه تolerانس در حالت چند متغیره به خوبی نشان می‌دهد. با در نظر گرفتن دو مورد فوق الذکر، نیاز به اصلاح روش تعدیل ناحیه تolerانس کاملاً ضروری به نظر می‌رسد.

با بررسی دقیق روشهای متفاوت در تعدیل ناحیه تolerانس با توجه به شکل ناحیه فرآیند، بهترین انتخاب بزرگترین بیضی (ابر بیضی) می‌باشد که قطرهای آن با قطرهای بیضی فرآیند موازی بوده و در ناحیه تolerانس محاط باشد. بدیهی است که شکل بیضی فرآیند توسط ماتریس واریانس- کوواریانس و موقعیت مکانی (مرکز) بیضی فرآیند توسط بردار میانگین تعیین می‌گردند. این بیضی فرآیند در سطح $100\%(1 - \alpha)$ به صورت زیر تعریف می‌گردد [۱۷]:

(۲۰)

$$(X - \mu)' \Sigma^{-1} (X - \mu) \leq \chi^2_{(\alpha, v)}$$

از طرفی زاویه بین قطرهای بیضی فرآیند و محورهای مختصات توسط بردارهای ویژه ماتریس واریانس- کوواریانس تعیین می‌گردند. در نتیجه تنها فاکتور تأثیرگذار در شکل ابربیضی فرآیند و جهت قطرهای آن، ساختار ماتریس واریانس- کوواریانس بوده و به منظور هم شکل بودن و هم جهت بودن قطرهای اصلی ابربیضی تolerانس (بزرگترین ابربیضی با قطرهای هم جهت ابربیضی فرآیند در داخل ناحیه تolerانس) با ابربیضی فرآیند، ساختار ماتریس واریانس- کوواریانس هر دو می‌بایست مشابه باشد. از طرفی دیگر بزرگترین ابربیضی در داخل ناحیه تolerانس زمانی به دست می‌آید که مرکز آن بر مرکز حدود تolerانس منطبق باشد. در نتیجه این ابربیضی به صورت زیر تخمین زده می‌شود:

$$(x - T)' (k\Sigma)^{-1} (x - T) \leq c^2 \quad (۲۱)$$

$$(x - T)' \Sigma^{-1} (x - T) \leq kc^2 \quad (۲۲)$$

در روابط فوق k برابر مقدار ثابتی بوده که جهت مشخص نمودن ماتریس واریانس- کوواریانس ابربیضی تolerانس در آن ضرب گردیده است. اکنون به منظور مشخص نمودن ابربیضی فرآیند، تنها مسئله به دست آوردن مقدار ثابت c' می‌باشد. با دقت در نحوه محاط نمودن ابربیضی در داخل ناحیه تolerانس کاملاً مشخص است که این ابربیضی حداقل از دو جهت (دوجهد موازی) با ناحیه تolerانس در تماس خواهد بود. و از جهات دیگر با ناحیه تolerانس در تماس نمی‌باشد. در بهترین حالت ممکن است که این بیضی با تمام اضلاع ناحیه تolerانس در تماس باشد. در

این حالت این ابربیضی دقیق‌ترین ابربیضی ممکن برای تعدیل ناحیه تفرانس خواهد بود. اکنون با الگوگیری از روش بکاررفته در مرجع [۱۷] می‌توان مقدار c' را بدست آورد.

$$\begin{cases} UPL_i = USL_i = T_i + \sqrt{\frac{c_i'^2 \det(\Sigma_i^{-1})}{\det(\Sigma^{-1})}} \\ LPL_i = LSL_i = T_i - \sqrt{\frac{c_i'^2 \det(\Sigma_i^{-1})}{\det(\Sigma^{-1})}} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, v \quad (23)$$

نکته قابل توجه در دستگاه معادلات فوق آن است که اولاً اگر مقدار T در مرکز حدود تفرانس فرض گردد، برای مشخصه i مقدار ثابت c'_i بدست آمده و ثانیاً با توجه به تعداد نقاط تماس بزرگترین ابربیضی با ناحیه تفرانس، حداکثر v مقدار برای c'_i به دست خواهد آمد. لیکن اگر از کوچکترین مقدار c'_i استفاده نگردد، ابربیضی، ناحیه تفرانس را قطع کرده و در داخل آن محاط نخواهد بود. در نتیجه مقدار c' با توجه به رابطه زیر تعیین می‌گردد:

(24)

$$c' = \min\{c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_v\}$$

جهت ساده‌سازی رابطه فوق، می‌توان از رابطه ارائه شده در مرجع [۶] استفاده نمود:

(25)

$$c' = \min\left\{\frac{(USL_i - T_i)}{\sqrt{\sigma_{ii}}}, \quad i = 1, 2, \dots, v\right\}$$

در رابطه فوق مقدار σ_{ii} برابر با واریانس مشخصه i ام می‌باشد. در نهایت معادله و حجم ناحیه ابربیضی تفرانس با توجه به روابط زیر تعریف و محاسبه می‌گردند.

(26)

$$\text{ابریضی تفرانس} : \{(x-T)' \Sigma^{-1} (x-T) \leq c'^2\}$$

(27)

$$\text{حجم ابربیضی تفرانس} = 2 \times \frac{(\pi)^{\frac{v}{2}}}{v} \Gamma\left(\frac{v}{2}\right) |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} (c')^v$$

حال با توجه به رابطه ارائه شده توسط تام و مفهوم معمول شاخص کارایی فرآیند، مقدار این شاخص را به صورت زیر تعریف می‌نماییم:

$$NMC_{pm} = \frac{\text{حجم ابربیضی تفرانس}}{\text{حجم ابربیضی ۹۹/۷۳٪ فرآیند ناحیه تفرانس}} \times \frac{1}{v} \quad \text{فاکتور موقعیت مرکز ابربیضی فرآیند نسبت به ابربیضی تفرانس} \quad (28)$$

$$= \left(\frac{2(\pi)^{\frac{v}{2}} / v \Gamma(v/2) |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} (c')^v}{2(\pi)^{\frac{v}{2}} / v \Gamma(v/2) |\Sigma|^{-\frac{1}{2}} (x^2(0.05, v))^{\frac{v}{2}}} \right)^{\frac{1}{v}} \times D \quad (29)$$

$$NMC_{pm} = \frac{c'}{\sqrt{\chi^2_{(0.0027, v)}}} \times D$$

با توجه به اینکه مقدار Σ توسط S و مقدار D توسط \hat{D} برآورد می‌گردد، برآورد NMC_{pm} نیز به صورت زیر تعریف می‌گردد:

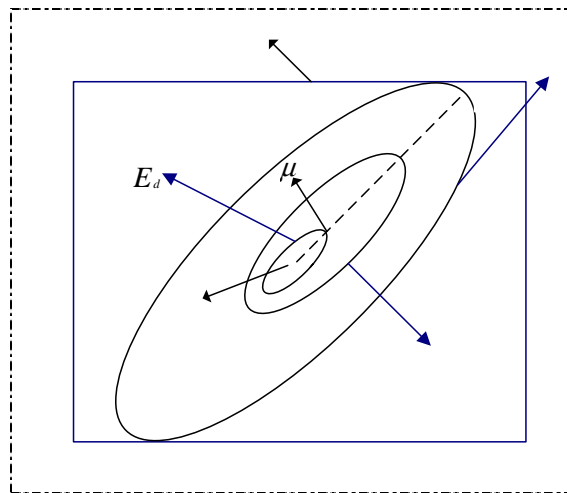
(۳۰)

$$\widehat{NMC}_{pm} = \frac{c'}{\sqrt{\chi^2_{(0.0027, \nu)}}} \times \widehat{D}$$

جهت محاسبه مقدار D نیز سه روش متفاوت پیشنهاد می‌گردد.

۱-۲- محاسبه شاخص مرکزیت فرآیند

پیشنهاد ۱: به منظور مشخص نمودن مقدار D ، انحراف مرکز فرآیند از مرکز حدود تolerانس باتوجه به فاصله حدود تolerانس و فاصله مجاز انحراف تعریف می‌گردد. به منظور تشریح بهتر این مطلب از شکل ۷ استفاده می‌گردد. در این حالت میزان حرکت قابل قبول مرکز فرآیند قبل از خارج شدن از حدود ناحیه تolerانس تعدیل شده، برابر با فاصله نقطه T از نقطه A می‌باشد. در نتیجه انحراف مرکز فرآیند از مرکز حدود تolerانس (فاصله μ از T) می‌بایست نسبت به این طول حرکت مجاز (فاصله A از T) تعیین گردد. به منظور محاسبه این طول حرکت مجاز ابتدا باید مختصات نقطه A مشخص گردد. بدین منظور ابتدا بیضی فرضی E_d به مرکز T طوری ترسیم می‌گردد که از نقطه μ عبور نماید. شکل این بیضی دقیقاً مشابه شکل بیضی فرآیند (در ابعاد متفاوت) فرض می‌گردد در نتیجه ماتریس واریانس - کواریانس آن نیز مشابه ماتریس واریانس - کواریانس فرآیند خواهد بود.



شکل ۷- میزان انحراف مرکز فرآیند از مقدار هدف نسبت به انحراف مجاز

در حالت کلی این ابربیضی مطابق رابطه زیر تعریف می‌گردد.

(۳۱)

$$Ed : \{(\mu - T)' \Sigma^{-1} (\mu - T) \leq c'^2\}$$

اکنون نسبت d به صورت زیر تعریف می‌گردد:

(۳۲)

$$d = \frac{\sqrt{(A - T)' \Sigma^{-1} (A - T)}}{\sqrt{(\mu - T)' \Sigma^{-1} (\mu - T)}}$$

مقدار $(A - T)' \Sigma^{-1} (A - T)$ با توجه به اینکه بر روی بیضی تolerانس قرار دارد معادل مقدار c'^2 خواهد بود. در نتیجه d را می‌توان به

Original tolerance region

(۳۳)

$$d = \frac{c'}{\sqrt{(\mu - T)' \Sigma^{-1} (\mu - T)}}$$

در نهایت مختصات نقطه A با توجه به رابطه زیر قابل محاسبه می‌باشد.

$$(34)$$

$$A = T + (\mu - T)'d$$

فاکتور مربوط به میزان انحراف مرکز فرآیند از مرکز حدود تفرانس، نسبت به میزان انحراف مجاز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(35)$$

$$D = (1 - K)$$

$$(36)$$

$$K = \left(\frac{\sqrt{(\mu - T)'(\mu - T)}}{(A - T)'(A - T)} \right) = \left(\frac{(\mu - T)'(\mu - T)}{(A - T)'(A - T)} \right)^{\frac{1}{2}}$$

هرگاه مقدار μ به مرکز حدود تفرانس منطبق باشد، مقدار D برابر ۱ بوده و هرگاه مقدار μ در روی حدود تفرانس و یا خارج از آن قرار گیرد، مقدار D برابر صفر بوده و مقدار شاخص NMC_{pm} نیز معادل صفر خواهد بود.

پیشنهاد ۲: در این روش پیشنهاد می‌شود که با حذف D از NMC_{pm} این شاخص به عنوان شاخص اندازه‌گیری پراکندگی فرآیند در مقایسه با پراکندگی مجاز مطرح گردیده و از یک بردار کارایی فرآیند با سه مولفه نظیر روش پیشنهادی توسط شهریار و همکاران [1995] استفاده گردد. در این حالت به منظور مشخص نمودن فاصله نسبی مرکز فرآیند از مرکز حدود تفرانس (مقدار هدف) از آماره آزمون T^2 استفاده گردیده و مقدار p-Value آزمون زیر به عنوان شاخص موقعیت مرکز فرآیند نسبت به مرکز حدود تفرانس مطرح می‌شود.

$$\begin{cases} H_0: \mu = \mu_0 \\ H_1: \mu \neq \mu_0 \end{cases}$$

در رابطه فوق $\mu_0 = T$ در نظر گرفته می‌شود. آماره این آزمون به صورت زیر تعریف می‌گردد: [۱۷]

$$(37)$$

$$T^2 = n(\bar{X} - \mu_0)'S^{-1}(\bar{X} - \mu_0)$$

که T^2 که آماره هاتلینگ بوده و دارای توزیع زیر می‌باشد:

$$(38)$$

$$T^2 \approx \frac{\nu(n-1)}{n-\nu} F(\nu, n-\nu)$$

که در رابطه فوق $F(\nu, n-\nu)$ یک متغیر تصادفی با توزیع فیشر و درجات آزادی ν و $n-\nu$ می‌باشد. به طور خلاصه مقدار PV این آزمون به صورت زیر تعریف می‌گردد.

$$(39)$$

$$\begin{aligned} PV &= P\left(T^2 > \frac{\nu(n-1)}{n-\nu} F(\nu, n-\nu)\right) \\ &= P\left(\frac{(n-\nu)}{\nu(n-1)} T^2 > F(\nu, n-\nu)\right) \end{aligned}$$

در این آزمون فرض صفر رد می‌گردد، هرگاه سطح معنی‌دار آن یعنی α از PV به دست آمده بزرگتر باشد. در صورتیکه از این روش جهت تعیین موقعیت نسبی مرکز فرآیند نسبت به مرکز حدود تفرانس استفاده گردد، پیشنهاد می‌گردد که شاخص کارایی فرآیند به صورت یک بردار کارایی فرآیند با سه مولفه مطرح شود. بردار NMPCV¹ به صورت زیر تعریف می‌گردد:

¹-New Multivariate Process Capability Vector



(۴۰)

$$NMPCV = \left[\frac{NMC_{pm}}{D}, PV, LI \right] = [NMC'_{pm}, PV, LI]$$

که NMC'_{pm} برابر با $\frac{NMC_{pm}}{D}$ و یا به صورت زیر تعریف می‌گردد:

(۴۱)

$$NMC'_{pm} = \frac{c'}{\sqrt{\chi^2_{(0.0027, v)}}}$$

پیشنهاد ۳: در نهایت روش سوم پیشنهادی جهت تعیین شاخص مرکزیت فرآیند مشابه با روش پیشنهاد شده توسط تام [1993] می‌باشد. در این حالت D به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$D = \frac{1}{[1 + (\mu - T)' \Sigma^{-1} (\mu - T)]^{\frac{1}{2}}}$$

در این حالت اگر مرکز فرآیند (μ) بر مرکز مقدار هدف (T) منطبق نباشد، مقدار D برابر با عدد یک بوده و اگر اختلافی بین مرکز فرآیند و مقدار هدف وجود داشته باشد، D برابر با مقداری کوچکتر از یک بوده که با بزرگتر شدن این اختلاف مقدار D به سمت صفر میل خواهد نمود. به منظور برآورد D از روش ارائه شده توسط تام و همکاران [1993] استفاده می‌گردد:

$$\hat{D} = \left[1 + \frac{n}{n-1} (\bar{X} - T') \hat{\Sigma}^{-1} (\bar{X} - T) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \left[1 + \frac{n}{n-1} (\bar{X} - T') S^{-1} (\bar{X} - T) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

۱-۱-۲- بررسی و انتخاب شاخص مناسب مرکزیت فرآیند

با بررسی سه پیشنهاد فوق‌الذکر در نهایت پیشنهاد ۲ به عنوان بهترین پیشنهاد جهت ارزیابی مرکزیت فرآیند پذیرفته می‌شود. مهمترین مزیت این روش را می‌توان امکان انجام آزمون فرض در رابطه با انطباق مرکز فرآیند و مقدار هدف در سطوح اطمینان مختلف دانست که به استفاده کننده این امکان را می‌دهد که با یک روش آماری دقیق انطباق مرکز فرآیند را با مقدار هدف مورد آزمون قرار دهد. از ایرادات وارد بر این روش نیز می‌توان عدم امکان ترکیب شاخص مرکزیت به دست آمده با شاخص مربوط به پراکندگی فرآیند و ارائه یک شاخص واحد به عنوان شاخص کارایی فرآیند نام برد. اگر چه جانسون و کاتز [1993] استفاده از تنها یک عدد و تفسیر آن را به عنوان شاخص کارایی فرآیند در حالت چند متغیره غیر منطقی و موجب تفسیر نادرست از وضعیت فرآیند می‌دانند. در نهایت بردار کارایی فرآیند چند متغیره NMPCV به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$NMPCV = [NMC'_{pm}, PV, LI]$$

دو مولفه اول در بخشهای قبلی به صورت تفصیلی مورد بررسی قرار گرفتند. مولفه سوم نیز مشابه با شاخص LI ارائه شده در مرجع [۲۴] تعریف می‌گردد. این شاخص نشان دهنده تقاطع / عدم تقاطع ناحیه فرآیند و ناحیه تolerانس اصلی می‌باشد.

$$LI = \begin{cases} 1 & \text{ناحیه فرآیند در داخل ناحیه تolerانس واقع باشد.} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$$

بسته به سطح اطمینان انتخاب شده کانتورهای ناحیه فرآیند، این شاخص معیاری جهت قضاوت در خصوص وجود / عدم وجود قطعات معیوب در سطح اطمینان انتخاب شده می‌باشد.

۳- تشریح نحوه محاسبه و عملکرد شاخصهای کارایی فرآیند چند متغیره

در بخشهای گذشته شاخصهای فعلی کارایی فرآیند چند متغیره مورد بررسی قرار گرفته و شاخص جدید کارایی فرآیند چند متغیره ارائه گردیدند. در این بخش با یک مثال و با استفاده از روشهای گرافیکی و محاسباتی و در سطوح مختلف کانتورهای احتمالی، نحوه محاسبه شاخص جدید و عملکرد این شاخص در شرایط مختلف نسبت به شاخصهای فعلی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۱- داده‌های این مثال مربوط به ۵ فرآیند مختلف با ۲ مشخصه و خروجی با توزیع نرمال چند متغیره می‌باشند. تفاوت بین این ۵ فرآیند در همبستگی بین دو مشخصه و اختلاف زیاد بین دو پراکندگی مقادیر دو مشخصه در فرآیند پنجم می‌باشد. در جدول ۱ ماتریس واریانس-کواریانس، حدود تolerانس، میانگین فرآیند و سایر مشخصات این ۵ فرآیند ارائه شده است.

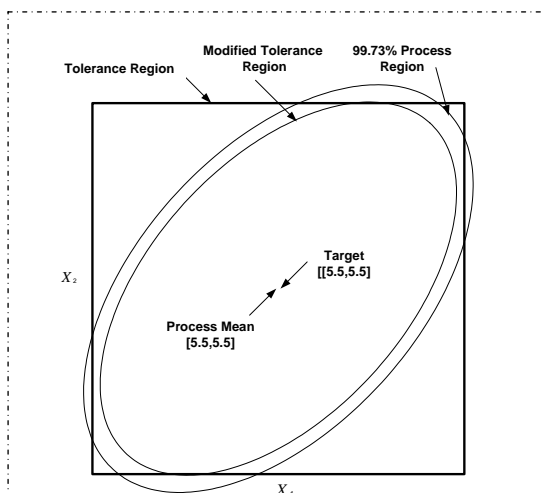
جدول ۱- مشخصات فرآیندهای مورد بررسی در مثال ۱

ضریب همبستگی	حدود ترانس برای هر دو مشخصه	بردار میانگین	ماتریس واریانس-کواریانس	همبستگی بین دو مشخصه	فرآیند
0.38	(2.5,8.5)	$\mu' = (5.5, 5.5)$	$\begin{bmatrix} 0.8093 & 0.3043 \\ 0.3043 & 0.8007 \end{bmatrix}$	همبستگی ضعیف	۱
0.51	(2.5,8.5)	$\mu' = (5.5, 5.5)$	$\begin{bmatrix} 0.8349 & 0.4448 \\ 0.4448 & 0.9178 \end{bmatrix}$	همبستگی متوسط	۲
0.88	(2.5,8.5)	$\mu' = (5.5, 5.5)$	$\begin{bmatrix} 0.5843 & 0.6337 \\ 0.6337 & 0.8761 \end{bmatrix}$	همبستگی بالا	۳
0.99	(2.5,8.5)	$\mu' = (5.5, 5.5)$	$\begin{bmatrix} 0.8579 & 0.9385 \\ 0.9385 & 1.0441 \end{bmatrix}$	همبستگی بسیار بالا	۴
-0.94	(2.5,8.5)	$\mu' = (5.5, 5.5)$	$\begin{bmatrix} 0.4 & -0.65 \\ -0.65 & 1.2 \end{bmatrix}$	همبستگی بالا و اختلاف بین پراکندگی دو مشخصه زیاد	۵

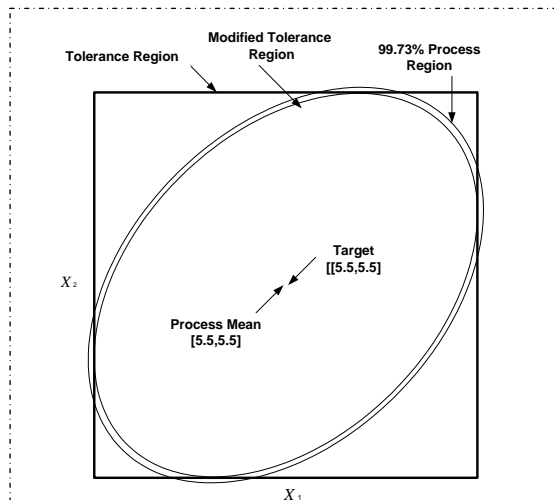
در شکل‌های ۸ تا ۱۲ وضعیت ناحیه ۹۹٫۷۳٪ فرآیند در مقابل ناحیه ترانس برای ۵ فرآیند به نمایش درآمده است. در جدول ۲ مقادیر شاخصهای پیشنهادی و فعلی برای ۵ فرآیند فوق‌الذکر ارائه شده است.

جدول ۲- شاخصهای کارایی فرآیند چند متغیره برای داده‌های مثال ۱

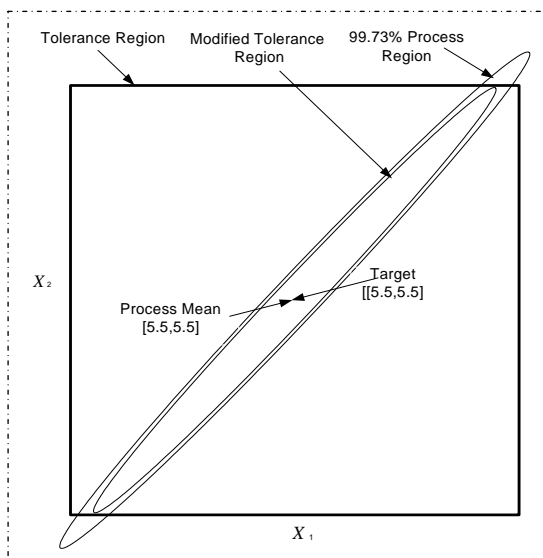
شاخص جدید	شاخصهای فعلی			فرآیند
	MC _{pc}	MC _{pm}	MPCV	
[0.969, 1, 0]	1.63	$\frac{1.02}{1} = 1.02$	[0.972, 1, 0]	۱
[0.91, 1, 0]	1.62	$\frac{1.01}{1} = 1.01$	[0.932, 1, 0]	۲
[0.93, 1, 0]	1.19	$\frac{2.29}{1} = 2.29$	[1.03, 1, 0]	۳
[0.853, 1, 0]	1.02	$\frac{6.22}{1} = 6.22$	[0.896, 1, 0]	۴
[0.796, 1, 0]	1.09	$\frac{3.17}{1} = 3.17$	[1.04, 1, 0]	۵



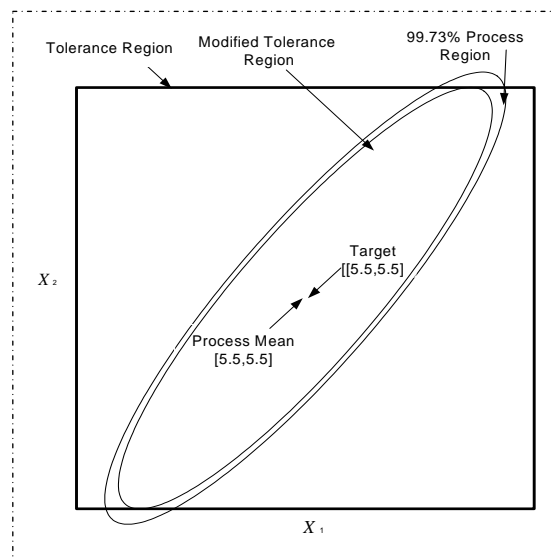
شکل ۹- نواحی ۹۹,۷۳٪ فرآیند و تolerانس اصلی و تعدیل شده برای فرآیند ۲ از مثال ۱



شکل ۸- نواحی ۹۹,۷۳٪ فرآیند و تolerانس اصلی و تعدیل شده برای فرآیند ۱ از مثال ۱



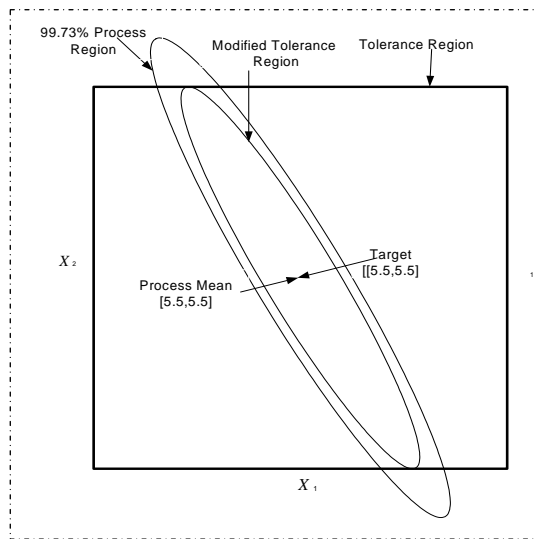
شکل ۱۱- نواحی ۹۹,۷۳٪ فرآیند و تolerانس اصلی و تعدیل شده برای فرآیند ۴ از مثال ۱



شکل ۱۰- نواحی ۹۹,۷۳٪ فرآیند و تolerانس اصلی و تعدیل شده برای فرآیند ۳ از مثال ۱

در فرآیند ۱ مشخصه‌ها دارای همبستگی ضعیفی بوده و با توجه به شکل ۸ میزان پراکندگی بالاتر از حد مجاز می‌باشد. در این حالت تنها مولفه‌های اول بردارهای کارایی فرآیند MPCV و NMPCV این نقص در فرآیند را منعکس می‌نمایند. در این وضعیت با توجه به همبستگی پایین بین مشخصه‌ها شاخص MC_{pm} علی‌رغم وجود خطا در نمایش صحیح وضعیت فرآیند، عملکرد بهتری نسبت به زمانی که همبستگی بین مشخصه‌های فرآیند بالا است، دارد.

همانگونه که در شکل‌های ۸ تا ۱۲ مشخص است، بردار کارایی فرآیند NMPCV در کلیه حالات نتایج بهتری نسبت به سایر شاخص‌ها حاصل می‌کند. این اختلاف به خصوص در حالاتی که ضریب همبستگی بین مشخصه‌ها بالا باشد، نمود بیشتری پیدا می‌کند. به عنوان مثال در فرآیند ۴ که در آن مشخصه‌ها دارای ضریب همبستگی بالایی می‌باشند، ناحیه فرآیند به طرز چشمگیری خارج از حدود تolerانس بوده و نرخ تولید محصولات نامنطبق بالاتر از ۰,۲۷٪ می‌باشد، لیکن شاخص MC_{pm} مقداری بسیار بزرگ را نمایش می‌دهد. این امر با توجه



شکل ۱۲- ناحیه ۹۹,۷۳٪ فرآیند و تolerانس اصلی و
تعدیل شده برای فرآیند ۵ از مثال ۱

به توضیحات پی‌نوشت شکل ۴ کاملاً گویای وجود نقیصه در این شاخص می‌باشد در حالیکه شاخص جدید NMPCV کاملاً این مشکل را مرتفع می‌نماید. از طرفی در حالتیکه فرآیند نسبت به یکی از مشخصه‌ها کارایی بالا (مشخصه ۲ از فرآیند ۵) و نسبت به مشخصه دیگر کارایی پایینی داشته باشد (مشخصه ۱ از فرآیند ۵)، مولفه اول بردار کارایی فرآیند NMPCV نسبت به مولفه اول بردار کارایی فرآیند MPCV نتایج بهتری حاصل می‌کند. این موضوع در شکل ۱۲ کاملاً مشخص می‌باشد. زیرا در فرآیند مورد اشاره در این شکل پراکندگی بالاتر از حدود مجاز (حدود تolerانس) می‌باشد (به علت تقاطع آشکار ناحیه فرآیند و ناحیه تolerانس)، لیکن در این حالت مولفه اول بردار کارایی فرآیند MPCV مقداری بزرگتر از یک را اعلام می‌نماید در حالیکه مؤلفه اول بردار کارایی فرآیند NMPCV کاملاً گویای این نقیصه در فرآیند می‌باشد.

۴- نتیجه گیری

با توجه به مثال ارائه شده در بخش قبل و بررسی مقایسه‌ای عملکرد شاخصها در شرایط مختلف، مشخص می‌گردد که بردار کارایی فرآیند NMPCV در شرایطی که همبستگی بین مشخصه‌های فرآیند بالا باشد، نسبت به سایر شاخصها به صورت کلی و نسبت به شاخص MC_{pm} به صورت خاص عملکرد مناسب‌تری دارد. دلیل این امر را می‌توان در تعدیل مناسب و حذف نواحی غیر مفید ناحیه تolerانس، توسط روش جدید تعدیل ناحیه تolerانس جستجو نمود. همچنین در حالتی که فرآیند نسبت به تعدادی از مشخصه‌ها دارای کارایی بالا و نسبت به تعدادی دیگر از مشخصه‌ها دارای کارایی پایینی باشد (نظیر فرآیند ۵ از مثال ۱) مولفه اول بردار کارایی فرآیند پیشنهادی نسبت به مولفه اول بردار کارایی فرآیند MPCV عملکرد بهتری خواهد داشت. در این حالت سایر شاخصها نسبت به وجود فضای زائد در ناحیه تolerانس حساس می‌باشند، لیکن بردار کارایی فرآیند جدید NMPCV نسبت به این ناحیه زائد حساس نمی‌باشد (به شکل ۴ مراجعه شود). به عبارت دیگر مقدار سایر شاخصها با تغییر حدود تolerانس زائد (که عملاً تأثیری در مقدار تولید محصولات منطبق ندارند) تغییر می‌نماید در حالیکه شاخص جدید نسبت به حذف و یا افزایش حدود تolerانس زائد حساس نمی‌باشد.

۵- منابع و ماخذ

- 1) Bothe, D.R., Measuring Process Capability, McGraw-Hill, New York, 1997
- 2) Boyles, R.A., Exploratory Capability Analysis, Journal of Quality Technology, Vol.28, No.1, 1996
- 3) Castagliola, P., New Process Capability Indices for Two Quality Characteristics, In 5th International Industrial Engineering Conference, Quebec, Canada, October 2003
- 4) Chen, H.F., A Multivariate Process Capability Index over a Rectangular Solid Tolerance Zone, Statistica Sinica, Vol.4, 1994
- 5) Chen, K.S., Pearn, W.L., Lin, P.C., Capability Measures for Process with Multiple Characteristics, Quality and Reliability Engineering International, Vol. 11, 2003
- 6) Hardle, W., Simar, L., Applied Multivariate Statistical Analysis, Springer Verlag, Berlin, 2003
- 7) Holmes, D.S., Mergen, A.E., Measuring Process Performance for Multiple Variables, Quality Engineering, Vol.11, No.1, 1999
- 8) Hubele, N.F., Shahriari, H., Cheng, C.S., "A Bivariate Process Capability Vector", Statistical Process Control in manufacturing, Keats & Montgomery, Editors, Marcel Dekker, New York, pp.299-310, 1991



- 9) Johnson, N.L. and Kotz, S. Process Capability Indices, Chapman 7 Hall, London, 1993
- 10) Johnson, R.A, Wichern ,D.N., Applied Multivariate Statistical Analysis, Prentice Hall: Englewood Cliffs, 1992
- 11) Karl, D.P., Morisette, J., Taam, W., Some Application of A Multivariate Capability Index in Geometric Dimensioning and Tolerancing, Quality Engineering, Vol. 6, No. 4, 1994
- 12) Kotz, S. and Cynthia, R.L., Process capability indices in theory and practice , Oxford university press. 1998
- 13) Kotz, S. and Johnson, N.L., “Process Capability Indices” A review ,1992-2000 , Journal of Quality Technology, Vol.34, No.1, 2000
- 14) Montgomery, D.C. Introduction to Statistical Quality Control,3th ed.,John Wiley & Sons, New York, 1996
- 15) Pal, S., Performance Evaluation of a Bivariate Normal Process, Quality Engineering, Vol. 11, No. 3, 1999
- 16) Polansky, A.M., A smooth nonparametric approach to multivariate process capability, Technometrics, Vol. 43, No. 2, 2001
- 17) Shahriari, H., Hubele, N.F., Lawrence, F.P., A Multivariate Process Capability Vector, Proceeding of the 4 th industrial engineering research conference, Institute of Industrial Engineers, pp. 304-309
- 18) Spiring ,F. ,Leung, B. ,Chang ,S. and Yeung ,A. ,”Bibliography of Process Capability Papers” Quality and Reliability Engineering International, 2003
- 19) Taam, W., Subbaiah, P., Liddy, J.W., A Note on Multivariate Process Capability Indices, Journal of Applied Statistic, Vol. 20, No. 3, 1993
- 20) Tong, Y.J., The Multivariate Normal Distribution, New York, Springer, 1990
- 21) Veevers, A., Viability & Capability Indexes for Multiple Response Processes, Journal of Applied Statistic, Vol.25, No.4, 1998
- 22) Wang, F.K., Chen,J.C., Capability Index Using Principal Component Analysis, Quality Engineering, Vol.11, No.1, 1999
- 23) Wang, F.K., Du, T.C.T., Using Principal Component Analysis in Process Performance for Multivariate Data, The International Journal of Management Science, omega 28, 2000
- 24) Wang, F.K., Hubele, N.F., Lawrence, F.P., Miskulin, J.D., Shahriari, H., Comparison of Three Multivariate Process Capability Indices, Journal of Quality Technology, Vol.32, No.3 , 2000