کاربرد روش ترکیبی برنامه ریزی ریاضی و منطق فازی برای بررسی عدم قطعیتها در ضرایب تابع هدف

دکتر یدالله سبوحی
عضو هیات علمی دانشکده مکانیک دانشگاه صنعتی شریف
Saboohi@sharif.edu

حمیدرضا مهربد
دانشجوی مقطع کارشناس ارشد مهندسی سیستمهای انرژی دانشگاه صنعتی شریف
hrm658@yahoo.com

کلمات کلیدی
برنامه ریزی ریاضی، عدم قطعیت ، منطق فازی، تابع عضویت

چکیده:

در مورد برنامه ریزی ریاضی با ضرایب هدف فازی رویکردهای زیادی ارائه شده ولی می توان گفت تقریباً هیچیک از آنها جواب صریحی مبنی بر بهترین بردار تصمیم و همچنین ضریب بهینه ای که بالاترین درجه امکان را برای هر دو- بردار و ضریب بهینه- داشته باشند، ارائه نمی نماید. در این مقاله سعی بر آن است که با استفاده از مدلهای برنامه ریزی با منابع- یا تقاضای- فازی با استفاده از رویکردی دو مرحله ای این مشکل را برطرف نماییم. این نوع مدلها عموماً جوابهای یکسانی را ارائه داده و از همان منطقی که اولین بار ***بلمن و زاده*** ارائه کردند، پیروی می کنند. همچنین یک مدل حمل و نقل از نرم افزار GAMS نیز به عنوان مطالعه موردی بررسی می شود. در انتها رویکردی در مورد برازش منحنی تابع عضویت با استفاده از برنامه ریزی (۱و۰) ارائه می شود تا کاربران در انتخاب شکل تابع عضویت فازی با محدودیت کمتری مواجه باشند.

مقدمه:

برنامه ریزی ریاضی در مورد تخصیص بهینه منابع محدود به فعالیتهای مختلف با هدف معینی مثل حداکثر کردن سود یا حداقل کردن هزینه بحث می کند. بعنوان نمونه یک مساله برنامه ریزی خطی را می توان به صورتهای زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases} \min \quad z = f(w,y) = wy \\ S.t \quad g(A,x) = yA \geq Q \\ x \geq 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{cases} \max \quad z = f(c,x) = cx \\ S.t \quad g(A,x) = Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

که c بردار ضرائب سود و w بردار ضرایب هزینه تابع هدف ، b بردار کلیه منابع در دسترس وQ بردار تقاضای موجود، y,x بردارمتغییرهای تصمیم (انتخاب) و A ماتریس ضرائب تکنولوژیکی(فنی) است . داده های ورودی(A,b,c) بخاطر کامل نبودن یا عدم دسترسی به اطلاعات کافی عموماً نامعین و مبهم هستند. برای فرمولبندی این حالات و اعداد مبهم می توانیم از منطق فازی و مفهوم تابع عضویت استفاده کنیم. ([1],[2],[3]) درجه تابع عضویت ، میزان مطلوبیت هر عدد را در بازه تولرانسش نشان می دهد که میزان مطلوبیت برای رخ دادن یک رویداد است. فرض می شود هدف‌ها ومحدودیت‌های برنامه‌ریزی دریک وضعیت مبهم و نامعین را می‌توان در غالب برنامه‌ریزی فازی بررسی کرد، همچنین تصمیم‌گیری را ***نتیجهٔ تداخل هدف‌ها و محدودیت‌ها*** بیان کرده و اولین پایه حل مدل را بر مبنای تعیین محیط تصمیم‌گیری فازی قرار می دهیم.

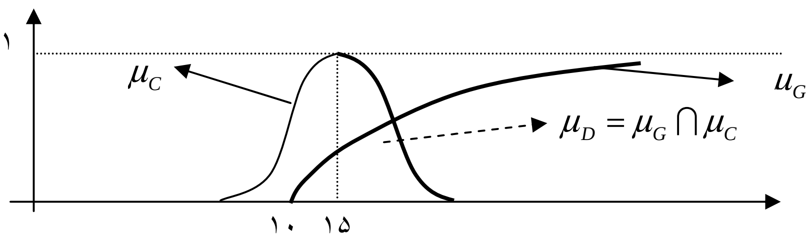
بعنوان مثال[3] هدف و محدودیت فازی را بصورت; هدف(G) : x اکیداً از ۱۰ بزرگتر باشد" و محدودیت(C) : x در مجاورت ۱۵ می باشد" تعریف می کنیم. به این منظور توابع عضویت C , G را به یکدیگر مرتبط کرده و اشتراک این دو را بعنوان منطقه تصمیم گیری فازی برمی گزینیم. این عمل بوسیله توابع عضویت هر یک انجام می شود. (منظور از (μ)میزان عضویت و یا درجه مطلوبیت می باشد)

$$\mu_{G \cap C}(x) = \mu_G(x) \cap \mu_C(x) = \min(\mu_G(x) \text{ و } \mu_C(x))$$

انتخابهای مختلف برای تصمیم گیری بایستی در محدوده مشترک هدفها و محدودیتها باشد.

بصورت شماتیک داریم:

$$D = G \cap C \qquad \Rightarrow \qquad \mu_D = \mu_G \cap \mu_C$$



شکل شماره(۱)

اگر μ_D یک max یگانه داشته باشد، آن نقطه می تواند بعنوان نقطه تصمیم گیری انتخاب شود وگزینه ای است که هم محدودیتها و هم هدف را با بالاترین میزان مطلوبیت ارضاء می کند.

مدل‌سازی هر یک از حالات فازی در یک مسأله برنامه‌ریزی ریاضی عبارتند از: برنامه‌ریزی خطی با منابع(یا تقاضای) فازی، برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی فازی، برنامه‌ریزی خطی فازی با ضرائب هدف فازی ، برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فنی و منابع(یا تقاضای) فازی ، برنامه ریزی خطی با ضرائب هدف و ضرائب تکنولوژیکی فازی، برنامه ریزی خطی با کلیه ضرایب فازی، برنامه ریزی خطی با ضرایب فنی و منابع(یا تقاضا) و تولرانس منابع(یا تقاضای) فازی ، برنامه‌ریزی غیر خطی فازی، برنامه‌ریزی عدد صحیح و(۱−۰) فازی . کلیه رویکردهایی که در مورد برنامه ریزی فازی مطرح شده، در جدول شماره(۱) مشاهده می شود.

تا کنون مدلهای زیادی برای برنامه‌ریزی خطی فازی با ضرائب هدف فازی پیشنهاد شده است. از جمله رویکرد Verdegay [4],[13],[14] [18],رویکرد Lai , Hwang [5], [17] ، رویکرد Rommelfanger Wolf , Hanuscheck [5] ، رویکرد Vila , Verdegay, Delgado [4] , [5], [9],[18],[21] و رویکرد Kaufmann [4] . اما هیچیک نتیجه نهایی صریحی در مورد ***ضریب و بردار*** بهینه ارائه نمی دهند. اما در مقابل، مدلهای برنامه ریزی با منابع فازی جوابها و نتایج بهتری را دربر دارند. بجز رویکردverdegay , [18], [13] [4],[5] ، می توان رویکرد Werner [5],[14],[11]، رویکرد Zimmerman [10],[12],[15] و رویکرد Chanas [16] را نام برد که بسته به نوع مساله عموماً جوابهای یکسانی می دهند. در این بین رویکرد Werner مورد استفاده قرار گرفته و نحوه استفاده از آن در مدلهای با ضریب هدف فازی از طریق دو بار استفاده از مدل دوگان(dual) تشریح می شود.

مدل اولیه:

اگر سود واحد هر فعالیت و یا هزینه آن بطور دقیق قابل تعیین نباشد آنگاه مسأله برنامه‌ریزی خطی با ضرائب هدف فازی زیر پیشنهاد می‌شود.

رابطه (۱)

$$\begin{cases} \min \ \tilde{b}Y \\ S.t \ \ YA \geq C \end{cases}$$

از آنجا که می خواهیم از مدلهای برنامه ریزی با RHS (Right Hand Sight) فازی استفاده کنیم ، دوگان مدل فوق را نوشته و از رویکرد Werner استفاده می کنیم.

... مرحله اول ...

در این مرحله سعی می کنیم با استفاده از رویکرد Werner مقدار بهینه ضریب تابع هدف را تععیین کنیم.

رویکردWerner :

در این مساله میزان منابع یا تقاضا در محدودیت های مساله بطور دقیق معلوم نبوده و دارای عدم قطعیت می باشند.

رابطه (۲)

$$\begin{cases} \max \ CX \\ S.t \ \ AX \leq \tilde{b} \\ X \geq 0 \end{cases}$$

وی پیشنهاد کرد که تابع هدف نیز بایستی فازی باشد و آن هم بدلیل آن که محدودیت‌های مشابه فازی بوده و هدف نیز خودبخود فازی می‌باشد. با همان فرضیه تولرانس $(b_i^U - b_i^L)$ برای منبع (b_i) را در نظر گرفته و مقادیر حدی برای تابع هدف را در قالب عبارت زیر پیشنهاد کرد:

رابطه (۳)

$$\begin{cases} z^L = \max \ \ cx \\ s.t \ \ (AX)i \leq b_i^L \quad \ \forall i \ , \ x \geq 0 \end{cases} \quad \& \quad \begin{cases} z^U = \max \ \ cx \\ s.t \, (AX)i \leq b_i^L + (b_i^U - b_i^L) \ \ \forall i \ , \ x \geq 0 \end{cases}$$

با این حساب می‌توانیم تابع عضویتی برای تابع هدف تشکیل داده که جواب بهینه بین z^L و z^U تغییرمی‌کند، بصورتیکه با افزایش مقدار z، درجه مطلوبیت آن نیز افزایش می‌یابد. تابع عضویت هدف، بشکل زیر نوشته می‌شود:

رابطه(۴)

$$\mu_0(x)=\begin{cases}1 & cx>z^U\\ \dfrac{cx-z^L}{z^U-z^L} & z^L\le cx\le z^U\\ 0 & cx<z^L\end{cases}$$

همچنین تابع عضویت محدودیتها نیز بصورت زیر شکل می یابد:

رابطه(۵)

$$\mu_{C_i}(x)=\begin{cases}0 & if\ \ (AX)i<b_i^L & \forall i\\ (b_i^U-(AX)i)/(b_i^U-b_i^L) & if\ \ bi\le(AX)i\le b_i^L+(b_i^U-b_i^L) & \forall i\\ 1 & if\ \ (AX)i>b_i^L+(b_i^U-b_i^L) & \forall i\end{cases}$$

با استفاده از این تابع عضویت می‌توان برای یافتن جواب بهینه ، تابع عضویت منطقه تصمیم‌گیری $(\mu_D(x))$ را تعیین کرده و از این طریق، $\max$ آنرا پیدا کنیم تا جواب بهینه تعیین شود:

رابطه (۶)

$$\begin{cases}\max\ \mu_D=\max[\mu_0(x)\cap\mu_{c_1}(x)\cap\mu_{c_2}(x).....]\\ \mu_D\ge\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\max\alpha\\ s.t\ \ \mu_0(x)\ge\alpha & \alpha\in[0,1]\\ \mu_{ci}(x)\ge\alpha & x\ge0\end{cases}$$

در نتیجه مدل بهینه را می توان بصورت زیر نوشت:

رابطه (۷)

$$\begin{cases}\max\alpha\\ s.t\quad CX\ge(z^U-z^L)\alpha+z^L\\ \qquad AX\le b^U-(b^U-b^L)\alpha\\ \qquad \alpha\in[0,1]\ ,\ \ x\ge0\end{cases}$$

مسلم است که ما نمی توانیم برای مدلهای کلان و با ابعاد بزرگ براحتی از دوگان آن استفاده کنیم. همچنین این مدل صرفاً X^* بهینه را می دهد که مورد نظر ما نمی باشد. بهمین دلیل به (α) نیز مانند دیگر متغیرها نگاه کرده و دوگان مدل فوق را می نویسیم:

رابطه (۸)

$$\begin{aligned}&\min\ \ b^UY-z^LY^0\\ &S.t\ \ \ YA-CY^0\ge0\\ &\qquad (b^U-b^L)Y+(z^U-z^L)Y^0\ge1\\ &\qquad Y,Y^0\ge0\end{aligned}$$

مشاهده می شود این مدل از لحاظ ساختاری کاملاً مشابه مدل رابطه (۱) بوده و در حقیقت برای بدست آوردن مقدار بهینه (α^*) کافیست که متغیر مجازی (Y^0) تعریف شده، عبارت $(-z^LY^0)$ به تابع هدف اضافه شده و همچنین تمام مقادیر عددی طرف راست نامساوی(RHS) در همین فلوی مجازی ضرب شده و به طرف چپ برده شوند و تنها یک محدودیت به شکل زیر به مدل اضافه شود:

رابطه (۹)

$$(b^U-b^L)Y+(z^U-z^L)Y^0\ge1$$

مقداربهینه مدل فوق همان بالاترین در جه مطلوبیت مدل قبل می باشد. طبعاً انتظار نداریم برداری که از حل این مدل بدست می آید بعنوان بردار بهینه پذیرفته شود. زیرا این بردار قیمتهای سایه مدل فازی(رابطه(۷)) بوده و نمی تواند به عنوان جواب بهینه پذیرفته شود. شایان ذکر است

جواب مدل رابطه(۷) قیمت سایه بهینه مدل اولیه(رابطه(۱)) با ضرایب فازی است. همچنین مقدار بهینه ضریب تابع هدف نیز با داشتن (α^*) بصورت روبرو بدست می آید:

رابطه (۱۰)
$$b^* = b^U - (b^U - b^L)\alpha^*$$

... مرحله دوم ...

پس چون با قرار دادن b^* در مدل رابطه (۲) بردار بهینه مدل بدست می آید و این بردار قیمت سایه بهینه مدل اولیه (رابطه (۱))می باشند طبعاً با قرار دادن این مقدار در مدل اولیه (رابطه (۱)) بعنوان ضریب بهینه تابع هدف، بردار بهینه مدل را بدست می آوریم. مدل بهینه نهایی عبارت است از:

رابطه (۱۱)
$$\begin{aligned} &\min \ [b^U - (b^U - b^L)\alpha^*]\, Y \\ &S.t \quad YA \le C \end{aligned}$$

... مطاله موردی ...

برای نمونه مدل حمل و نقل GAMS را با در نظر گرفتن عدم قطعیت در فاصله بین یک جفت از شهرها، بررسی می کنیم.
قرار است از دو شهر Settle , San-Diego کالاهای تولید شده به سه شهر متقاضی New-York وChicago و Topeka برده شود. هزینه حمل کالاها نیز برحسب فواصل شهرها از یکدیگر ارزیابی می شود. بعنوان نمونه فرض می کنیم که فاصله دو شهر San-Diego , Topeka در بازه [2 , 1.4] و همچنین فاصله دو شهرSeattle , Topeka در بازه [2 , 1.8] تغییر کند.

d(i,j)	New-York	Chicago	Topeka
Seattle	2.5	1.7	[1.8,2]
San-Diego	2.5	1.8	[1.4,2]

مدل اولیه عبارت است از:

$$\begin{cases} \min 0.09(\, 2.5x_{11} + 1.7\, x_{12} + [1.8,2]x_{13} + 2.5x_{21} + 1.8x_{22} + [1.4,2]x_{23}\,) \\ S.t \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 350 \\ \qquad x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 600 \\ \qquad x_{11} + x_{21} \ge 325 \\ \qquad x_{12} + x_{22} \ge 300 \\ \qquad x_{13} + x_{23} \ge 275 \\ \quad x \ge 0 \end{cases}$$

مقدار تابع هدف به ازای تولرانس در این فاصله در بازه [153.675, 168.525] واقع میشود. پس $(z^L = 153.675)$. بر طبق مرحله اول، مدل زیر را ابتدا بررسی می کنیم:

$$\begin{cases} \min\ 0.09(2.5x_{11}+1.7x_{12}+[1.8,2]x_{13}+2.5x_{21}+1.8x_{22}+[1.4,2]x_{23}) \\ S.t\quad x_{11}+x_{12}+x_{13}-350x_0 \le 0 \\ \quad x_{21}+x_{22}+x_{23}-600x_0 \le 0 \\ \quad x_{11}+x_{21}-325x_0 \ge 0 \\ \quad x_{12}+x_{22}-300x_0 \ge 0 \\ \quad x_{13}+x_{23}-275x_0 \ge 0 \\ \quad 0.09[2-1.8]x_{13}+0.09[2-1.4]x_{23}+[168.525-153.675]x_0 \ge 1 \\ \quad x \ge 0 \end{cases}$$

جواب بهینه تابع هدف در این حالت عباذت است از: $\alpha^* \cong 0.55$

در نتیجه مقدار بهینه ای که برای فاصله پیشنهاد می شود عبارت است از:

$$d^*(seattle, topeka) = 1.89$$

$$d^*(san-diego, topeka) = 1.67$$

بر طبق مرحله دوم، مدل بهینه زیر را حل می کنیم:

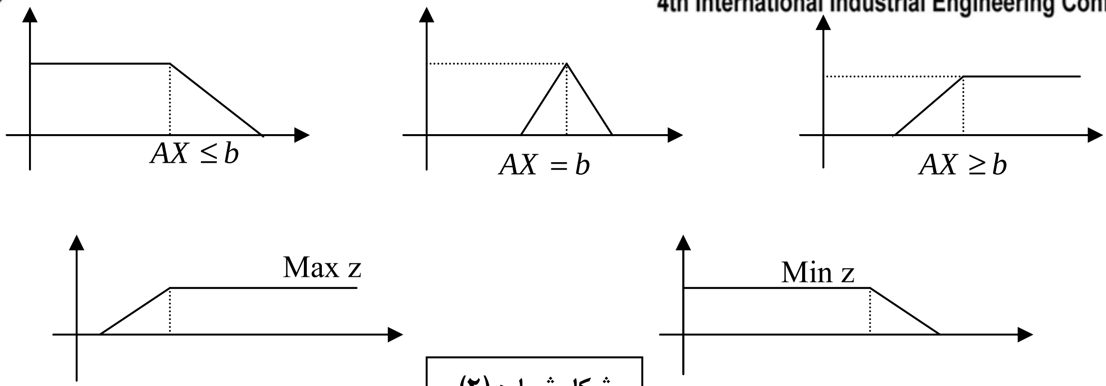
$$\begin{cases} \min\ 0.09(2.5x_{11}+1.7x_{12}+[1.89]x_{13}+2.5x_{21}+1.8x_{22}+[1.67]x_{23}) \\ S.t\quad x_{11}+x_{12}+x_{13} \le 350 \\ \quad x_{21}+x_{22}+x_{23} \le 600 \\ \quad x_{11}+x_{21} \ge 325 \\ \quad x_{12}+x_{22} \ge 300 \\ \quad x_{13}+x_{23} \ge 275 \\ \quad x \ge 0 \end{cases}$$

جواب و بردار بهینه نیز عبارت است از :

Z*	X_{11}	X_{12}	X_{13}	X_{21}	X_{22}	X_{23}
160.375	50	300	0	275	0	275

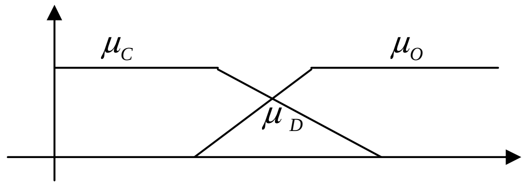
تابع عضویت و انواع برازش[4]

در یک مساله برنامه ریزی ریاضی تابع عضویتی که به محدودیتها ویا تابع هدف نسبت داده می شود بر حسب اینکه نوع محدودیت (≥=≤)و هدف max یا min کردن باشد بصورت زیر می باشد[4] :



شکل شماره (۲)

A ماتریس ضرائب فنی، b بردار منابع (یا تقاضا) و**z** تابع هدف می باشد. بازه هایی که با p مشخص شده اند درحقیقت همان تاثیر عدم قطعیت بر تابع ویا پارارمتر مورد نظر می باشد که معروف به تولرانس آن کمیت می باشد. توابع عضویتی که در فوق مشاهده می شود از نوع مثلثی بوده و ساده ترین شکل ممکن است که می توان به یک رخداد نسبت داد. در مدلهای برنامه ریزی فازی مهمترین اصل تعیین محیط تصمیم گیری فازی است. همانگونه که در یک مساله برنامه ریزی ساده، محدودیتها ی مدل، یک منطقه موجه ویا منطقه تصمیم گیری را مشخص می نمود، در این حالت نیز μ_C مجموعه اشتراک توابع عضویت محدودیتها را مشخص می کند. اما در این حالت تا بع هدف نیز فازی است ومیزان مطلوبیت مقادیر آن برای ما تقریباً از پیش تعیین شده است، بهمین دلیل برای بدست آوردن منطقه موجه می بایست اشتراک تابع عضویت هدف را همراه تابع عضویت محدودیها بعنوان منطقه تصمیم گیری در نظر گرفت. (شکل زیر)



$$\mu_C = \mu_{C1} \cap \mu_{C2} \cap \ldots \cap \mu_{Cn}$$
$$\mu_D = \mu_O \cap \mu_C$$

شکل شماره (۳)

پس μ_D منطقه موجه تصمیم گیری را بما می دهد. بعد بهترین نقطه یا بهترین بردار X از طریق یافتن $\max \mu_D$ حاصل می شودوآن نقطه ای است که بالاترین درجه امکان یا مطلوبیت را داراست.

مهمترین مساله ای که می توان در این مرحله به آن پرداخت شکل تابع عضویت است بگونه ای که یا پدیده بوسیله توابع از پیش تعیین شده براحتی قابل تعریف نباشد و یاخود کاربر درجه عضویت را به دلخواه تعیین کند. البته در هر دوحالت باید توجه داشت که درجه عضویت نقاط متوالی با یستی سیر صعودی یا نزولی داشته باشد. بنابراین در این بخش تابع عضویت تکه تکه پیوسته معرفی می شود...

بایستی بین سه نوع برازش منحنی محدب ومقعر تمایز قائل شد:[1]

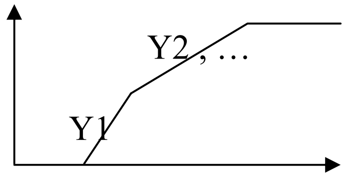
برازش منحنی نوع محدب ، *برازش منحنی نوع مقعر* و *برازش منحنی نوع محدب-مقعر*

برازش منحنی تابع عضویت

۱) برازش منحنی نوع محدب:

همانگونه که از شکل پیداست شیب منحنی از چپ به راست دائما کاهش است در حال و یک روند یکنواخت داشته ودر حقیقت شکل یک مجموعه محدب را بخود گرفته .

[1] . کلیه تکنیکهای برنامه ریزی ۰و۱ از [23] ایده گرفته شده است.



رابطه (۱۲)

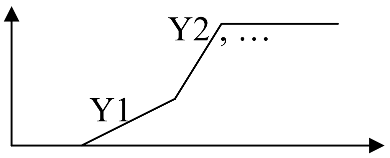
$$\begin{cases}\alpha \in [0,1] \\ \alpha \le Y_1, \alpha \le Y_2, \ldots \alpha \le Y_N\end{cases}$$

شکل شماره (۴)

در این حالت کافی است معادله هر خط را بیابیم و بعد مجموعه α را مطابق فوق تشکیل دهیم. وقتی قرار باشد این N معادله همزمان برقرار باشند، محدوده اشتراک آنها سطح زیر منحنی(α) را میدهد.

۲) برازش منحنی نوع مقعر:

در این حالت به سادگی حالت قبل نمی توان پیش رفت و برای داشتن سطح زیر منحنی بایستی از متغیرهای **۰ و ۱** استفاده کنیم.



شکل شماره (۵)

دراین قسمت δ_i هازا معرفی می کنیم که مقادیر ۰ و۱ را اختیار می کنند.
برای n پاره خط روابط بصورت زیر در می آیند:

رابطه (۱۳)

$$\begin{cases}-M\delta_1 + \alpha \le Y_1 \\ -M\delta_2 + \alpha \le Y_2 \\ \vdots \\ -M\delta_n + \alpha \le Y_n\end{cases} \quad \& \quad \sum_{i=1}^{n} \delta_i = n-1 \quad \& \quad \alpha \in [0,1] \quad \& \quad \delta \in \{0,1\}$$

باجرای همزمان این معادلات تابع عضویتی که شامل کل سطح زیر منحنی باشد بدست می آید.

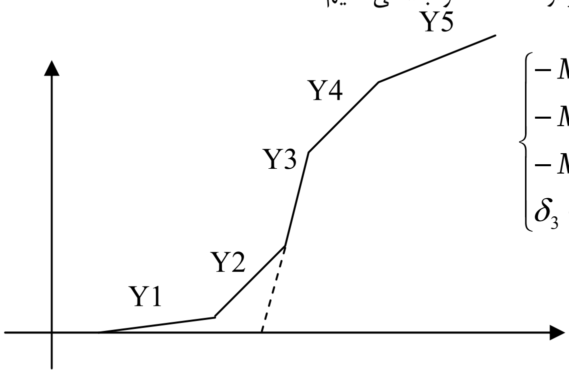
۳)برازش منحنی نوع محدب-مقعر:

اگر به مفهوم تابع عضویت و روند افزایشی (کاهشی) درجه عضویت نقاط متوالی در آن دقت شود، معلوم می شود با توجه به این روند این منحنی می تواند چندین بار تغییر تقعر بدهد. بایستی بتوان قسمتهای محدب ومقعر ر از هم تمیز داده و روابط قبلی مربوط به هر یک را بنویسیم.

۳-۱) تابع با یک بار تغییر تقعر:

۳-۱-۱) در انتهای با درجه امکان بالا محدب ودر انتهای دیگر مقعر :

در این حالت نگارش روابط بصورت زیر می باشد:منطقه محدب را انتخاب کرده و از منطقه مقعر جدا می کنیم،



رابطه(۱۴)

$$\begin{cases}-M\delta_3 + \alpha \le Y3 \\ -M\delta_3 + \alpha \le Y4 \\ -M\delta_3 + \alpha \le Y5 \\ \delta_3 + \delta_3' = 1\end{cases} \quad \& \quad \begin{cases}M\delta_3' + \alpha \ge Y3 \\ -M\delta_1 + \alpha \le Y1 \\ -M\delta_2 + \alpha \le Y2 \\ \delta_1 + \delta_2 = \delta_3' + 1\end{cases}$$

شکل شماره (۶)

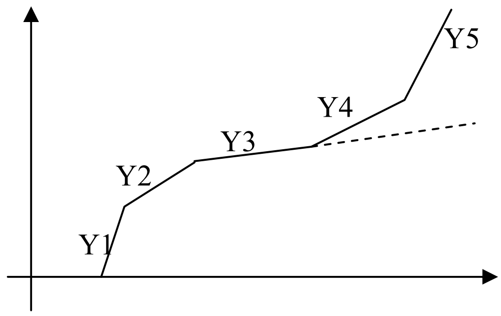
که در معادلات فوق δها مقادیر $\{0,1\}$بوده و M مقدار عددی بزرگی است.

۳-۱-۲) در انتهای با درجه امکان بالا مقعر ودر انتهای دیگر محدب :

در این حالت نگارش روابط بصورت زیر می باشد:

$$\begin{cases}-M\delta_3+\alpha\le Y3\\-M\delta_3+\alpha\le Y1\\-M\delta_3+\alpha\le Y2\\\delta_3'+\delta_3=1\end{cases}\quad\&\quad\begin{cases}M\delta_3'+\alpha\ge Y3\\-M\delta_1+\alpha\le Y4\\-M\delta_2+\alpha\le Y5\\\delta_1+\delta_2=\delta_3'+1\end{cases}$$

رابطه (۱۵)



شکل شماره (۷)

اگر بعد از $Y5$ روند تقعر ادامه داشته باشد(در کل n شکست مقعر) به ازای هریک از شکستها یک δ تعریف کرده و عبارت عمومی زیر را می نویسیم:

$$\begin{cases}-M\delta_0+\alpha\le Y3\\-M\delta_0+\alpha\le Y1\\-M\delta_0+\alpha\le Y2\\\delta_0'+\delta_0=1\end{cases}\quad\&\quad\begin{cases}M\delta_0'+\alpha\ge Y3\\-M\delta_1+\alpha\le Y4\\-M\delta_2+\alpha\le Y5\\\vdots\\\delta_1+\cdots+\delta_n=\delta_0'+(n-1)\end{cases}$$

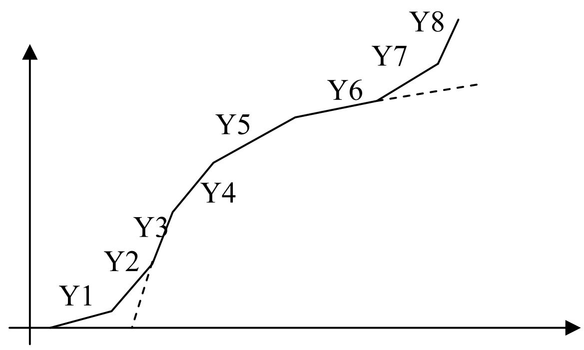
رابطه (۱۶)

یعنی اگر $\delta_0'=0$ باشد، هر دفعه یکی از δ_k ها برابر صفر می شود.

۳-۲) تابع با چند بار تغییر تقعر:

این حالت نیز مانند حالت قبل بررسی می شود،کافی است که مناق محدب ومقثعر را از هم تمیز داده و معادلات مربوط به آنها را بنویسیم:

۳-۲-۱) ابتدا وانتها مقعر و در میانه محدب:



شکل شماره (۸)

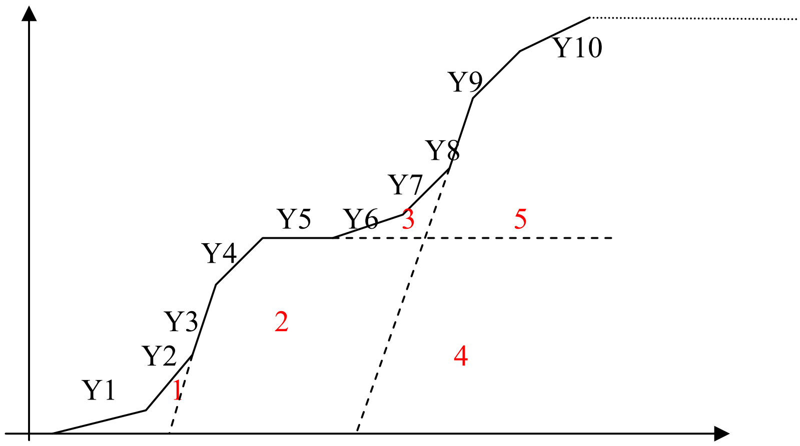
در این حالت نگارش روابط بصورت زیر می باشد:

$$\begin{cases}-M\delta_3+\alpha\le Y3\\-M\delta_3+\alpha\le Y4\\-M\delta_3+\alpha\le Y5\\-M\delta_3+\alpha\le Y6\end{cases}\quad\&\quad\begin{cases}M\delta_3'+\alpha\ge Y3\\-M\delta_1+\alpha\le Y1\\-M\delta_2+\alpha\le Y2\\\delta_1+\delta_2=\delta_3'+1\end{cases}\quad\&\quad\begin{cases}M\delta_3''+\alpha\ge Y6\\-M\delta_7+\alpha\le Y7\\-M\delta_8+\alpha\le Y8\\\delta_7+\delta_8=\delta_3''+1\end{cases}\quad\&\quad(\delta_3+\delta_3'+\delta_3''=2)$$

رابطه (۱۷)

۳-۲-۲) در انتهای با درجه امکان بالا محدب ودر انتهای دیگر مقعر(شکل زیر) :

همانطور که در شکل مشاهده می شود با جدا کردن مناطق محدب (نقطه چین)کل ناحیه زیر تابع عضویت به ۵ ناحیه افراز می شود.کافی است بتوانیم معادلاتی بنویسیم که شامل تمام نقاط مناطق موجه پنجگانه شده و بهیچ وجه وارد منطقه غیر موجه نشده و از آن تجاوز نکند. پنج دسته معادله بصورت زیر نوشته می شوند :



شکل شماره (۹)

$$1.\begin{cases}-M\delta_{N1}+\alpha\geq Y3\\-M\delta_{2}+\alpha\leq Y2\\-M\delta_{1}+\alpha\leq Y1\\\delta_{1}+\delta_{2}=\delta_{N1}+1\end{cases}\quad 2.\begin{cases}M\delta_{N2}+\alpha\geq Y8\\-M\delta_{N2}+\alpha\leq Y3\\-M\delta_{N2}+\alpha\leq Y4\\-M\delta_{N2}+\alpha\leq Y5\end{cases}\quad 3.\begin{cases}M\delta_{N3}+\alpha\geq Y5\\M\delta_{N3}+\alpha\geq Y8\\-M\delta_{6}+\alpha\leq Y6\\-M\delta_{7}+\alpha\leq Y7\\\delta_{6}+\delta_{7}=\delta_{N3}+1\end{cases}\quad 4.\begin{cases}-M\delta_{N4}+\alpha\leq Y5\\-M\delta_{N4}+\alpha\leq Y8\\-M\delta_{N4}+\alpha\leq Y9\\-M\delta_{N4}+\alpha\leq Y10\end{cases}\quad 5.\begin{cases}M\delta_{N5}+\alpha\geq Y5\\-M\delta_{N5}+\alpha\leq Y8\\-M\delta_{N5}+\alpha\leq Y9\\-M\delta_{N5}+\alpha\leq Y10\end{cases}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{k=5}k-1=4 \quad \& \quad \delta\in\{0,1\} \quad \& \quad \alpha\in[0,1]\right)$$

رابطه (۱۸)

مشاهده می شود با اضافه کردن شرط آخر، هر دفعه یکدسته از معادلات اجرا می شود.تعدادتقسیمات در هرنوع (محدب یا مقعر) بهیچ وجه حائز اهمیت نمی باشد،مهم تغییرات تقعر و تعدادآن می باشد. این روند قابل بسط بوده و می توان تعداد تغییرات تقعر را افزایش داد.

همانند رویکردهایی که در مورد توابع عضویت محدودیتهای نامساوی ذکر شد می توان همین روند را در مورد محدودیتهای مساوی بسط داد .

انواع رویکردها در مسائل برنامه ریزی ریاضی فازی

جدول شماره (۱)- انواع رویکردها در مسائل برنامه ریزی ریاضی فازی

برنامه‌ریزی خطی با منابع فازی
• رویکرد Verdegay [4],[5] , [18], [13]
• رویکرد Werner [5] , [14] , [11]
• رویکرد Zimmerman [12] , [10], [15]
• رویکرد Chanas [16]
برنامه ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی فازی
• رویکرد Gasimove , Yenilmez [6]
برنامه‌ریزی خطی با ضرائب هدف فازی
• رویکرد Verdegay [18], [14], [13], [4]
• رویکرد Lai , Hwang [17], [5]
• رویکرد Wolf , Hanuscheck , Rommelfanger [5]
• رویکردVila , Verdegay , Delgado [21], [4] , [18], [5], [9]
• رویکرد Kaufmann [4]
برنامه‌ریزی خطی با ضرایب تکنولوژیکی و منابع فازی
• رویکرد Ramic , Rimanek [5], [7]
• رویکرد Tanaka , Ichihashi , Asia [8]
• رویکرد Gasimove ,Yenilmez [6]
برنامه ریزی خطی با ضرائب هدف و ضرائب تکنولوژیکی فازی
• رویکرد Lai , Hwang [5] , [17]
برنامه ریزی خطی با کلیه ضرائب فازی
• رویکرد Carlsson , Korhonen [8],[22]
• رویکرد Lai , Hwang [17], [8]
• رویکرد Buckly [20],[10]
برنامه ریزی خطی با ضرایب فنی ، منابع و تولرانس منابع فازی
• رویکرد1 Yager [19]
• رویکرد2 Yager [19]
• رویکرد Campo [4]
• رویکردDubois , Prade- امکان ضعیف [4]
• رویکردDubois , Prade- امکان قوی [4]
• رویکرد Tanaka , Ichihashi [4]
برنامه‌ریزی غیر خطی فازی
برنامه‌ریزی عدد صحیح فازی
• رویکرد Fabian و Stocia [4]
برنامه‌ریزی خطی (۰-۱) فازی

منابع و مراجع

[1] س. م.طاهری ، *آشنایی با نظریه مجموعه های فازی* ،جهاد دانشگاهی، واحد مشهد، ۱۳۷۵.
[2] م . ماشین چی ، *مجموعه های مشکک* ، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۷۹
[3] Zimmermann.H.J., *Fuzzy set theory and its application,* Kluer Academic Publishers, Boston [1990]
[4] Lai, Hwang, *Fuzzy Mathematical Programming*, Springer-Verlag [1992]
[5] لی وانگ, ترجمه:م.تشنه لب ، ن.صفارپور ، د.افیونی، *سیستم های فازی و کنترل فازی*،چاپ دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسی، مهر ۱۳۸۰
[5] Robert Fuller, Hans-J¨urgen Zimmermann, "Fuzzy Reasoning for Solving Fuzzy Linear Programming Problems" Partially supported by the German Academic Exchange Service (DAAD) and Hungarian Research Foundation OTKA under contracts T 4281, I/3-2152 and T 7598. Fuzzy Sets and Systems, 60[1993]
[6] Rafail N. Gasimov, K¨ur_sat Yenilmez," Solving Fuzzy Linear Programming Problems with Linear Membership Functions" Mathematical Subject Classification: 90C70, 90C26. [2000]
[7] Hsien-Chung Wu,"Duality Theory in Fuzzy Linear Programming Problems with Fuzzy Coefficients ", Elsevier, fuzzy sets and systems[2002]
[8] Pandian Vasant," Optimization in Product Mix Problem Using Fuzzy Linear Programming",IMA Journal of Management Mathematics [2004]
[9] Pandian Vasant," Application of multi objective fuzzy linear programming in supply production planning problem", IMA Journal of Management Mathematics [2004]
[10] A. Sittithumwat K. Tomsovic F. Soudi," Optimizing Maintenance Resources in Distribution Systems with Limited Information"
[11] Yan-Kuen Wu, Sy-Ming Guu ,"A compromise model for solving fuzzy multiple objective linear programming problems"
[12] H.J.Zimmermann, Description and optimization of fuzzy systems, International Journal of General Systems, 2(1976) 209-215.
[13] Verdegay, J.L,"*fuzzy mathematical programming*",North Holland, Amsterdam, [1982]
[14] Werners, B., "Interactive multiple objective programming subject to flexible constraints" , fuzzy set and systems 23 [1987]
[15] Zimmermann, H.J, "description and optimization of fuzzy system", international journal of jeneral system 2 [1976]
[16] Chanas, "The use of parametric programming in FLP", fuzzy set and systems 11 [1983]
[17] Lai, Y.J, C.L. Hwang, "interactive fuzzy linear programming", fuzzy set and systems 45 [1992]
[18] Verdegay, J.L, "A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem", fuzzy set and systems 14 [1984]
[19] R.R. Yager,"A mathematical programming approach to inference with the capability of implementing default rules", International Journal of Man-Machine
Studies, 29[1988] 685-714.
[20] J.J.Buckley, "Possibilistic linear programming with triangular fuzzy numbers", Fuzzy Sets and Systems, (26) 135-138.[1988]
[21] M.Delgado, J.L.Verdegay and M.A. Vila, Optimization models in fuzzy-logicbased decision support systems, Technical Report,No. 90-1-3, Universidad
[22] Carlsson, C., and Korhonen, P., "A Parametric Approach to Linear Programming", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 20, pp. 17-30.[1986]
[23] هلیر و لیبرمن, ترجمه: م. مدرس ، ا. آصف وزیری، *برنامه ریزی ریاضی*، چاپ دلارنگ، پائیز۸۱