کاربرد رهیافت تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها در تحلیل رویه‌ی پاسخ

علی اشراق جهرمی
دانشجوی دکتری مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی شریف
ali_eshragh@mehr.sharif.edu
سیدتقی اخوان نیاکی
استاد دانشکده‌ی مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی شریف
niaki@sharif.edu

واژه‌های کلیدی
۱- طراحی آزمایش‌ها (Experimental Design) ۲- تحلیل رویه‌ی پاسخ (Response Surface Methodology) ۳- حدس (Belief) ۴- یادگیری (Learning) ۵- تحلیل بیزی (Bayesian Analysis) ۶- برنامه‌ریزی پویای تصادفی (Stochastic Dynamic Programming)

چکیده

در این مقاله، رهیافت تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها در تحلیل رویه‌ی پاسخ به‌کار گرفته می‌شود. این روش، از میان مجموعه‌ی تمامی ترکیب‌های ممکن از سطوح مختلف عوامل، هنگامی که تعداد آزمایش‌ها محدود است، ترکیبی را که موجب بهینه شدن میانگین پاسخ می‌شود انتخاب می‌کند. اساس این روش بر انتخاب ترکیبی است که با بیشترین احتمال، شانس بهینه شدن را داشته باشد. هرچند این احتمال، که حدس نامیده می‌شود، باید حداقل به اندازه‌ی یک مقدار تعیین شده‌ی حداقل حدس قابل قبول باشد. هرگاه بیشترین حدس کمتر از این مقدار باشد، یک بردار مشاهدات دیگر دریافت شده و حدس بر روی ترکیب‌ها با استفاده از رابطه‌ای که از قانون بیز حاصل می‌شود بهبود می‌یابد. هم‌چنین، مقدارِ حداقل حدس قابل قبول، با استفاده از رهیافت برنامه‌ریزی پویای احتمالی در بیشینه‌سازی احتمال انتخاب صحیح محاسبه می‌شود. مثال‌های عددی، حاکی از عملکرد بسیار خوب این روش در تحلیل رویه‌ی پاسخ است.

مقدمه

یکی از زمینه‌های تحلیل‌های آماری، که حقیقتاً انقلابی در زندگی و کارهای آماردانان به وجود آورده است، *طراحی آزمایش‌ها*[1] نام دارد. پایه‌های نخستین این شاخه از آمار، توسط فیشر[2] ایجاد شد. وی که از پژوهشگران مؤسسه‌ی آمار دانشگاه کمبریج بود، به استفاده از روش‌های آماری در آزمایش‌های کشاورزی علاقه‌مند شد. او در سال ۱۹۳۵، مقاله‌ای را در مورد تکنیک استفاده‌ی بهینه از داده‌ها، تحت عنوان طراحی آزمایش‌ها منتشر کرد. این اثر بنیادی، بدون چون و چرا، پیشامد مهمی در تاریخ آمار محسوب می‌شود. پس از آن تحقیقات بسیاری بر روی این شاخه از علم آمار صورت گرفت به طوری که امروزه این موضوع بخش اعظمی از تحقیقات آماری را شامل می‌شود و جایگاه ویژه‌ای در میان سایر علوم مهندسی پیدا کرده است. موضوع علم طراحی آزمایش‌ها، در مورد بررسی علت‌هایی است که می‌توانند بر یک یا تعدادی پاسخ[3]، اثرگذار باشند. شاخه‌ای از این علم که به بررسی علت‌ها پرداخته و آن‌ها را در سطوحی تنظیم می‌کندکه به بهینه شدن پاسخ بیانجامد، تحلیل رویۀ پاسخ[4] نام دارد [۷].

امروزه در تمامی محافل علمی بحث در مورد فن‌آوری اطلاعات مورد توجه قرار گرفته است، مبحثی که طی یک دهه اخیر، رشدی بسیار چشمگیر و تاثیری قابل توجه بر روی سایر علوم داشته است. علم آمار نیز از این قاعده مستثنی نبوده و دچار تغییرات بسیاری شده است [۶].

یکی از مهمترین اثرات ناشی از فن‌آوری اطلاعات، سهل‌الوصول شدن داده‌ها برای بشر امروزی است. این موضوع موجب ایجاد زمینه‌ای جدید در تحلیل داده‌ها به نام تحلیل دنباله‌ای[5] شده است [۸]. در این نوع تحلیل، اندازه‌ی نمونه یک متغیر تصادفی است که به طور ضمنی به مقادیر مشاهده شده‌ی نمونه بستگی پیدا می‌کند. یعنی در این‌جا از داده‌ها استفاده‌ی بهتری صورت می‌گیرد، زیرا هم‌زمان با دریافت تعدادی مشاهده، آن‌ها را مورد تحلیل قرار می دهیم و بر اساس نتایج به دست آمده، در صورت نیاز، مشخص می‌کنیم که چه تعداد داده‌ی دیگر می‌بایست جمع‌آوری شود. در واقع درتحلیل دنباله‌ای، بر خلاف تحلیل فراوانی، بررسی داده‌ها به صورت پیوسته[6] صورت می‌گیرد.

این موضوع موجب شده تا در دهه‌ی اخیر تحقیقات بسیاری در زمینه‌ی توسعه‌ی به‌کارگیری این رویکرد در موضوعات مختلف آماری انجام گیرد [۲]. یکی از این موارد، رهیافت جدیدی در برازش تابع توزیع احتمال به یک جامعه‌ی آماری[7] است که اشراق و مدرس [۴] در مقاله‌ی خود آن را تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها[8] نام‌گذاری کرده‌اند. در این شیوه‌ی تصمیم‌گیری با به‌کارگیری تحلیل دنباله‌ای، روش جدیدی برای برازش توزیع جامعه‌ی آماری ارایه می‌شود که می‌تواند بسیار قوی‌تر از روش‌های موجود [۳] عمل کند.

ماحصل آن‌چه گفته شد، به‌کارگیری ایده‌ی جدید تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها در تحلیل رویه‌ی پاسخ است [۵]. از آن‌جا که این رهیافت جدید در برازش توزیع احتمال به یک جامعه‌ی آماری بسیار بهتر از روش‌های موجود عمل می‌کند، انتظار می‌رود که در تحلیل رویه‌ی پاسخ نیز بتواند با روش‌های موجود رقابت کند.

این مقاله به نحوه‌ی به‌کارگیری این رهیافت جدید در تحلیل رویه‌ی پاسخ می‌پردازد. برای این منظور ابتدا در بخش ۱ به معرفی مسأله و فرضیاتی که برای حل آن در نظر گرفته شده است، پرداخته می‌شود. اولین سؤالی که پس از طرح مسأله می‌تواند مطرح شود این است که چرا این مسأله توسط رهیافت تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها قابل حل است. پاسخ این سؤال در زیربخش ۱-۱ بیان شده است. مهم‌ترین بخش فرآیند تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها، تشکیل یک رَویه‌ی یادگیری بر اساس تعریف مناسب حدس‌هاست. انجام این کار در بخش ۲ صورت گرفته است. پس از آن، در زیربخش ۲-۱، به منظور تضمین همگرایی رَویه‌ی یادگیری مطرح شده، از طریق ریاضی ثابت می‌شود که حدس‌های مربوطه در حالت مجانبی به واقعیت همگرا می‌شود. زیربخش ۲-۲ به توضیح در مورد چگونگی انجام تخمین پاسخ مسأله می‌پردازد. در بخش ۳ به بیان استراتژی و ساختار تصمیم‌گیری پرداخته و شیوه‌ی محاسبه‌ی عددی آن در دو زیربخش ۳-۱ و ۳-۲ توضیح داده می‌شود. سرانجام در بخش ۴، با بیان یک الگوریتم ۵ قدمی، فرآیند تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها در تحلیل رویه‌ی پاسخ به دست می‌آید. به منظور نشان دادن چگونگی عملکرد این الگوریتم، در بخش ۵، مثال عددی به کمک این الگوریتم حل می‌شود. در آخر، در بخش ۶ نتیجه‌گیری‌های به دست آمده بیان شده و سرانجام در بخش ۷، تحقیقات آتی که در این زمینه می‌تواند انجام شود، معرفی می‌شود.

۱. کلیات مسأله

سیستمی را در نظر بگیرید که تعدادی عامل بر روی پاسخ حاصل از عملکرد آن اثر می‌گذارند. در ابتدا، این عوامل تا آن‌جا که ممکن بوده به کمک متخصصین و کارشناسان مربوطه شناسایی شده و سپس به کمک روش‌های طرح آزمایش‌ها، ترکیبی از آن‌ها که بیشترین اثر را بر روی پاسخ دارند، مشخص شده‌اند. این مجموعه از عوامل به دست آمده که بیشترین اثر را بر روی تغییرات پاسخ دارند، *عوامل بحرانی*[9]

می‌نامیم. تعداد این عوامل بحرانی n_{cf} بوده و $S=\{F_1,F_2,...,F_{n_{cf}}\}$ مجموعهٔ در برگیرنده‌ی این عوامل است. هم‌چنین هر عامل دارای تعدادی متناهی[10] و شمارش‌پذیر[11] سطح[12] است. منظور از $FL_{i,j}$، سطح jاُم از عامل F_i بوده که تعداد آن‌ها برابر با nfl_i است. حال بردار *ترکیب سطوح عوامل* را به صورت $(FL_{1,i_1},FL_{2,i_2},...,FL_{n_{cf},i_{n_{cf}}})$ تعریف می‌کنیم که به معنای وضعیتی از سیستم است که عامل F_1 در سطح FL_{1,i_1}، عامل F_2 در سطح LF_{1,i_2}، . . . و عامل $F_{n_{cf}}$ در سطح $FL_{1,i_{n_{cf}}}$ تنظیم شده باشد. در نتیجه با توجه به نمادگذاری‌های انجام شده، تعداد کل بردارهای ممکن ترکیب سطوح عوامل برابر با $\prod_{i=1}^{n_{cf}} nfl_i$ است که این تعداد کل را با m نشان می‌دهیم.

حال، تمامی این m ترکیب را از ۱ تا m شماره‌گذاری و آن‌ها را C_1، C_2، . . . و C_m نام‌گذاری کرده و مقدار پاسخ سیستم در ترکیب C_j را با متغیر تصادفی Y_j نشان می‌دهیم. Y_jها را متغیرهای تصادفی پیوسته‌ای درنظر می‌گیریم که برد[13] آن‌ها زیرمجموعه‌ای از مجموعه‌ی اعداد حقیقی مثبت است. اگر متغیر تصادفی Y پاسخ سیستم در یکی از سطوح عوامل تعریف شود، یعنی یکی از Y_j باشد، آن‌گاه آن را می‌توان به صورت مدل رگرسیون خطی

$$Y=\beta_0+\beta_1.X_1+\beta_2.X_2+...+\beta_{n_{cf}}.X_{n_{cf}}+\varepsilon$$

تعریف کرد، که در آن β_iها ضرایب حقیقی ثابت، X_iها متغیرهای مستقل و متغیر تصادفی ε بیانگر خطای تصادفی است. متغیر X_i مقادیر ۱ تا nfl_i را اختیار می‌کند که هریک از این مقادیر بیانگر یکی از سطوح عامل F_i است. مثلاً، هنگامی که $X_1=i_1$، $X_2=i_2$، . . . و $X_{n_{cf}}=i_{n_{cf}}$ است به معنی آن است که پاسخ سیستم در ترکیب سطوح عوامل $(FL_{1,i_1},FL_{2,i_2},...,FL_{n_{cf},i_{n_{cf}}})$ گرفته شده است. متغیر تصادفی ε نیز دارای میانگین صفر و واریانس ثابت و متناهی σ^2 است. در نتیجه، از آن‌جا که $Var(Y)=Var(\varepsilon)$ است، می‌توان نتیجه گرفت که تمامی Y_jها دارای واریانس ثابت و برابر σ^2 هستند.

در این‌جا، مسأله یافتن ترکیبی از سطوح عوامل است که منجر به بیشینه شدن میانگین پاسخ می‌شود. یعنی می‌خواهیم ترکیبی از سطوح عوامل را به‌دست آوریم که به ازای آن، امید ریاضی پاسخ بیشینه می‌شود.

۱-۱. چرا این مسأله توسط رهیافت تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها قابل حل است؟

اولین سؤالی که در این‌جا می‌بایست به آن پاسخ داد این است که چرا مسأله‌ی مطرح شده در زیربخش فوق را می‌توان به کمک رهیافت تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها حل کرد. با کمی بررسی، بسیار ساده می‌توان به این نتیجه رسید که این مسأله دارای سه خاصیت از خواص دسته مسایلی است که توسط رهیافت تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها قابل حل هستند [۴]. این سه خاصیت، در این مسأله به قرار زیر است:

۱- کل فضای تصمیم‌گیری قابل تقسیم به تعدادی زیرفضای کوچک‌تر باشد. یعنی بتوان کل فضای تصمیم‌گیری را به تعدادی زیرفضای کوچکتر افراز کرد: در این‌جا کل فضای تصمیم‌گیری را می‌توان به زیرفضاهایی تقسیم کرد که هریک بیانگر یکی از ترکیبات سطوح عوامل است. یعنی، قرار داشتن سیستم در هریک از ترکیبات سطوح عوامل به صورت یکی از زیرفضاهای تصمیم‌گیری در نظر گرفته می‌شود.

۲- پاسخ، انتخاب یکی از زیرفضاهای ذکر شده در بند ۱ باشد. یعنی بر اساس هدفی که تعیین می‌شود بخواهیم زیرفضایی را انتخاب کنیم که موجب بهینه شدن تابع هدف شود: در اینجا هدف، یافتن ترکیبی از سطوح عوامل (یکی از زیرفضاهای تصمیم‌گیری) است که منجر به بیشینه شدن متوسط پاسخ می‌شود.

۳- به هریک از زیرفضاها یک حدس قابل نسبت دادن باشد. این حدس بیانگر آن است که زیرفضای مذکور با چه احتمالی تابع هدف را بهینه می‌کند: در اینجا نیز به هریک از ترکیبات سطوح عوامل می‌توان یک حدس را نسبت داد. این حدس بیانگر احتمال آن است که ترکیب مذکور موجب بیشینه شدن مقدار مورد انتظار پاسخ شود.

حال می‌توان این مسأله را هم‌چون مسأله‌ی ذکر شده در [۴]، به صورت حالت خاصی از مسأله‌ی توقف بهینه[14] به شکل زیر تعریف کرد: در هر بار انجام آزمایش، با تنظیم سیستم در هر ترکیب از سطوح عوامل، مشاهده‌ای تصادفی از پاسخ سیستم گرفته می‌شود. پس از دریافت این مشاهدات، می‌توان تصمیم به انتخاب یکی از ترکیبات سطوح عوامل به عنوان ترکیبی که موجب بیشینه شدن میانگین پاسخ می‌شود گرفت و یا اقدام به انجام آزمایشی دیگر به منظور دریافت مشاهدات تصادفی دیگری از سیستم مذکور کرد. انجام هر آزمایش نیز هزینه‌بر بوده و هم‌چنین یک محدودیت برای تعداد کل آزمایش‌ها داریم و فرض بر آن است که انجام بیش از N آزمایش مقدور نباشد. در

اینجا می‌خواهیم ببینیم که چه زمانی اقدام به انتخاب یکی از ترکیبات سطوح عوامل به عنوان ترکیب بهینه کنیم (توقف بهینه)، به طوری که مقدار احتمال انتخاب صحیح بیشینه شود.

۲. یادگیری: حدس‌ها و رَویه‌ی بهبود آن‌ها

هرچند که در این‌جا هیچ اطلاعی درباره‌ی رفتار پاسخ سیستم در دسترس نیست، اما ایده آن است که با استفاده از مشاهدات پیشین، نتایجی در مورد آن به‌دست آید. برای این منظور، ابتدا ماتریس مشاهدات را به صورت

$$M_k = \begin{bmatrix} O_1 \\ O_2 \\ \dots \\ O_k \end{bmatrix}_{(k\times m)}$$

تعریف می‌کنیم که در آن $O_i = (y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \dots, y_m^{(i)})$ بردار مشاهدات پیشین در آزمایش iاُم و $y_j^{(i)}$ مقدار پاسخ مشاهده شده از ترکیب C_j در این آزمایش است. چون تصمیم‌گیری در یک فضای تصادفی صورت می‌گیرد، لذا هیچ‌گاه نمی‌توان به طور قطع اظهار کرد که کدام‌یک از ترکیب‌ها موجب بیشینه شدن میانگین پاسخ می‌شود. اما می‌توان برای پیشامدهای تصادفی

$$MC_j \equiv \{\text{ترکیب } C_j \text{ موجب بیشینه شدن امید ریاضی پاسخ می‌شود}\}$$

احتمالاتی را تعریف کرد. مقدار احتمال روی دادن پیشامد MC_j پس از دریافت بردار مشاهدات O_k را به صورت $A_j(O_k, M_{k-1})$ نشان داده و به شکل $A_j(O_k, M_{k-1}) = \Pr\{MC_j | O_k, M_{k-1}\}$ تعریف می‌کنیم. $A_j(O_k, M_{k-1})$ را مقدار حدس در مورد ترکیب C_j نامیده و همان‌طور که از نام روش تصمیم‌گیری نیز بر می‌آید، تمامی تصمیم‌گیری بر روی این حدس‌ها صورت می‌پذیرد.

فرض کنید که بردار مشاهدات جدید O_k به دست آمده است. حال برآنیم که بر اساس ماتریس مشاهدات M_{k-1} و بردار مشاهدات جدید O_k، حدسمان در مورد ترکیب C_j را بهبود بخشیم. اگر حدس پیشین در مورد ترکیب C_j را با $A_j(M_{k-1})$ که در واقع همان $A_j(O_{k-1}, M_{k-2})$ است نشان دهیم، در پی آن هستیم که با یافتن اثر مشاهدات قبلی بر روی آن، مقدار حدس پسین، $A_j(O_k, M_{k-1})$، را محاسبه کنیم. با به کار بردن قضیه‌ی بیز، حدس پسین فوق می‌تواند به صورت زیر محاسبه شود:

$$A_j(O_k, M_{k-1}) = \frac{\dfrac{\bar{y}_j^{(k)}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i^{(k)}} . A_j(M_{k-1})}{\sum_{t=1}^{m} \left(\dfrac{\bar{y}_t^{(k)}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i^{(k)}}\right) . A_t(M_{k-1})} \qquad (۱)$$

که در آن $\bar{y}_t^{(k)} = \dfrac{\sum_{r=1}^{k} y_t^{(r)}}{k}$، یعنی میانگین پاسخ‌های به دست آمده در ترکیب C_t بوده و درنتیجه $\dfrac{\bar{y}_t^{(k)}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{y}_i^{(k)}}$ میانگین وزنی ترکیب C_t است. رابطه‌ی (۱) پس از ساده شدن به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$A_j(O_k, M_{k-1}) = \frac{\bar{y}_j^{(k)} . A_j(M_{k-1})}{\sum_{t=1}^{m} \bar{y}_t^{(k)} . A_t(M_{k-1})} \qquad (۲)$$

معادله‌ی (۲) نشان می‌دهد که با یک بردار مشاهدات جدید O_k، یک رابطه کلی بین حدس پیشین در مورد ترکیب C_j، $A_j(M_{k-1})$، و حدس پسین بر روی آن، $A_j(O_k, M_{k-1})$، وجود دارد. اگر در ابتدای فرآیند تصمیم‌گیری، هیچ اطلاعی از ترکیب‌های سطوح عوامل در دسترس نباشد، بهتر آن است که حالت اولیه‌ی حدس‌ها، در بیشترین آنتروپی، یعنی به صورت

$$A_j(M_0) = \frac{1}{m} \;\; ; \;\text{for}\;\; j = 1,2,\dots,m$$

تعریف شود [۱۰]. منظور از M_0 ماتریس در مرحله‌ای است که هنوز هیچ مشاهده‌ای در دست نیست. لازم به ذکر است که حدس پیشین

$A_j(M_{k-1})$، همه مشاهدات پیشین M_{k-1} را به منظور بهبود بخشیدن حدس، خلاصه می‌کند. بنابراین حدس پیشینِ $A_j(M_{k-1})$ و بردار مشاهدات جدید O_k، برای محاسبه حدس پسینِ $A_j(O_k, M_{k-1})$ به ازای $j=1,2,...,m$ کافی است. این حرکت، طرح کلی روند بهبودبخشی حدس‌ها را تشکیل داده و به این ترتیب یک سیستم مناسب *یادگیری* به‌دست می‌آید.

در مرجع [۵] ثابت می‌شود که سیستم یادگیری طراحی شده به منظور بهبود حدس‌ها، همگراست. یعنی با پیمودن روند بهبود حدس‌ها به اندازه کافی، سرانجام حدس مربوط به ترکیبی از سطوح عوامل که موجب بیشینه شدن میانگین پاسخ می‌شود به ۱ رسیده و سایر حدس‌ها برابر با صفر خواهد شد. نکته‌ی جالب توجه آن است که به دلیل برابری واریانس متغیر پاسخ در تمامی ترکیب‌های مختلف از سطوح عوامل، می‌توان رویه‌ی بهبود حدس‌ها را به‌صورت

$$B_j(O_k, M_{k-1}) = \frac{(\bar{y}_j^{(k)})^2 . B_j(M_{k-1})}{\sum_{t=1}^{m} (\bar{y}_t^{(k)})^2 . B_t(M_{k-1})} \qquad (۳)$$

نیز تعریف کرد. در مرجع [۵] ثابت می‌شود که سیستم یادگیری فوق نیز همگرا بوده و سرعت همگرایی آن بیشتر از سرعت همگرایی رویه‌ی اشاره شده در (۲) است. در نتیجه مقدار حدس در مورد بهین بودن ترکیب C_j، یعنی مقدار احتمال روی دادن پیشامد MC_j پس از دریافت بردار مشاهدات O_k را به صورت $B_j(O_k, M_{k-1})$ نشان داده و به شکل

$$\Pr\{MC_j | O_k, M_{k-1}\} = B_j(O_k, M_{k-1}) = \frac{(\bar{y}_j^{(k)})^2 . B_j(M_{k-1})}{\sum_{t=1}^{m} (\bar{y}_t^{(k)})^2 . B_t(M_{k-1})} \qquad (۴)$$

تعریف می‌کنیم.

۲-۱. برآوردکننده‌ی حداکثر حدس برای ترکیب بهینه از سطوح عوامل

در هر مرحله، پس از دریافت بردار مشاهدات O_k و پیمودن روند بهبودبخشی، حدس‌ها را به صورت صعودی مرتب کرده و آماره‌های ترتیبی آن‌ها را به شکل ذیل نشان می‌دهیم:

$$B_{(1)}(O_k, M_{k-1}) < B_{(2)}(O_k, M_{k-1}) < ... < B_{(m)}(O_k, M_{k-1})$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، تمامی نامساوی‌ها به صورت اکید هستند. زیرا از آن‌جا که Y متغیر تصادفی پیوسته‌ای است، لذا در هر مرحله‌ی بهبودبخشیِ حدس‌ها، هیچ دو حدسی با یکدیگر برابر نمی‌شوند. زیرا به ازای هر $\lambda \neq j$، خواهیم داشت:

$$\Pr\{B_j(O_k, M_{k-1}) = B_l(O_k, M_{k-1})\} = \Pr\{(\bar{Y}_j^{(k)})^2 . B_j(M_{k-1}) = (\bar{Y}_\lambda^{(k)})^2 . B_\lambda(M_{k-1})\} = 0$$

تساوی آخر به دلیل پیوسته بودن متغیرهای تصادفی $\bar{Y}_j^{(k)}$ و $\bar{Y}_\lambda^{(k)}$ و شمارش‌پذیر بودن مجموعه ریشه‌های معادله $(\bar{Y}_j^{(k)})^2 . B_j(M_{k-1}) = (\bar{Y}_\lambda^{(k)})^2 . B_\lambda(M_{k-1})$ که آ ن نیز از روی استقلال $\bar{Y}_j^{(k)}$ها نتیجه می‌شود، به‌دست آمده است.

پس از انجام محاسبات فوق، $B_{gr}(O_k, M_{k-1}) = B_{(m)}(O_k, M_{k-1})$ را به‌دست آورده و بر اساس شیوه تصمیم‌گیری که در پی می‌آید، یا ترکیب C_{gr} را به عنوان ترکیبی که منجر به بیشینه شدن میانگین پاسخ می‌شود انتخاب می‌کنیم و یا با صرف هزینه و انجام آزمایشی دیگر، بردار مشاهدات O_{k+1} را دریافت می‌داریم. بنابراین در هر مرحله‌ی تصمیم‌گیری، انتخاب یا رد تنها بر روی ترکیب C_{gr} است. زیرا ملاک انتخاب از روی حداکثر حدس، یعنی ترکیبی که بیشترین حدس بر روی آن بوده و یا به عبارت دیگر بیشترین باور را بر روی آن داریم، به دست می‌آید. به‌عبارت دیگر، ترکیب C_{gr} که در نهایت به عنوان ترکیب بهینه انتخاب می‌شود، یک برآوردکننده حداکثر حدس برای ترکیبی خواهد بود که منجر به بیشینه شدن میانگین پاسخ می‌شود.

۳. استراتژی تصمیم‌گیری

استراتژی کلی رهیافت تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها را می‌توان در چهار قدم زیر خلاصه کرد [۴]:

قدم ۱ – یک مشاهده دریافت و بر اساس آن حدس‌های پسین را از روی حدس‌های پیشین محاسبه کنید. (توجه شود که این مشاهده بر اساس شرایط مسأله می‌تواند به صورت یک تک مشاهده یا مجموعه‌ای از مشاهدات باشد.)

قدم ۲ – حدس‌های پسینِ به دست آمده را به ترتیب صعودی مرتب و بزرگترینِ آن‌ها را انتخاب کنید.

قدم ۳ – بر اساس شرایط مسأله یک حداقل حدس قابل قبول[15] را محاسبه کنید.

قدم ۴- اگر بیشترین حدس به دست آمده در قدم ۲ بزرگتر یا مساوی حداقل حدس قابل قبول محاسبه شده در قدم ۳ است، زیرفضایی که این حدس به آن نسبت داده شده را به عنوان پاسخ انتخاب کنید و فرآیند تصمیم‌گیری را خاتمه دهید. در غیر این صورت به قدم ۱ بازگردید.

حال فرض کنید که تنها دو ترکیب C_i و C_j برای سطوح مختلف عوامل وجود داشته و n مرحله تصمیم‌گیری نیز باقی مانده است. استراتژی تصمیم‌گیری که در این‌جا به‌کار برده می‌شود بر اساس الگوریتم بیان شده در فوق، به این صورت است که پس از بهبود حدس‌ها، حداکثر آن‌ها را یافته و در صورتی که این مقدار بزرگتر یا مساوی عددی چون $d_{i,j}(n)$ $(0\le d_{i,j}(n)\le 1)$ باشد، ترکیب مربوط به آن حدس را به عنوان ترکیب بهینه انتخاب می‌کنیم و در غیر این‌صورت فرآیند تصمیم‌گیری را با دریافت بردار مشاهداتی دیگر ادامه می‌دهیم. بنابراین، مسأله یافتن $d^*_{i,j}(n)$ است، استراتژی بهینه با n مرحله تصمیم‌گیری باقی‌مانده که مقدار احتمال انتخاب صحیح حاصل از این فرآیند را حداکثر می‌کند.

زمانی را در نظر بگیرید که n مرحله تصمیم‌گیری باقی مانده و در آستانه ورود بردار مشاهدات O_{k+1} هستیم. برای این منظور $V_{i,j}\left(n,d_{i,j}(n)\right)$ را مقدار احتمال انتخاب صحیح در زمانی تعریف می‌کنیم که تنها دو ترکیب C_i و C_j برای سطوح مختلف عوامل وجود داشته، n مرحله تصمیم‌گیری باقی‌مانده و از استراتژی $d_{i,j}(n)$ مورد اشاره در بالا پیروی کنیم. در همین ارتباط اگر دو پیشامد CS و $E_{i,j}$ را به ترتیب پیشامدهای "انتخاب صحیح" و "وجود تنها دو ترکیب C_i و C_j برای سطوح مختلف عوامل وجود داشته"، تعریف کنیم خواهیم داشت:

$$V_{i,j}\left(n,d_{i,j}(n)\right)=\Pr\left\{CS\middle|E_{i,j}\right\}=\Pr_{i,j}\{CS\}$$

حال فرض کنید که مقدار بیشینه تابع فوق بر روی $d_{i,j}(n)$ در نقطه $d^*_{i,j}(n)$ اتفاق افتاده و لذا داشته باشیم: $V_{i,j}\left(n,d^*_{i,j}(n)\right)=\underset{d_{i,j}(n)}{Max}\left\{V_{i,j}\left(n,d_{i,j}(n)\right)\right\}=Max\left\{\Pr_{i,j}\{CS\}\right\}$. این مقدار بهینه را با $V^*_{i,j}(n)$ نشان می‌دهیم، یعنی: $V^*_{i,j}(n)=V_{i,j}\left(n,d^*_{i,j}(n)\right)$.

البته به‌وضوح مشخص است که $\underset{d_{j,j}(n)}{Max}\left\{V_{j,j}\left(n,d_{j,j}(n)\right)\right\}=1$ است، زیرا در فضای تصمیم‌گیری که تنها ترکیب C_j برای سطوح مختلف عوامل وجود دارد، مسلماً با احتمال ۱، انتخاب صحیح صورت گرفته و تنها ترکیب به عنوان ترکیب بهینه انتخاب می‌شود. بنابراین با فرض $i\neq j$ مسأله را ادامه می‌دهیم.

برای محاسبه مقدار $V^*_{i,j}(n)$، فضای حالت را به سه پیشامد S_i، S_j و $NS_{i,j}$ افراز می‌کنیم که به ترتیب معرف انتخاب C_i به عنوان ترکیب بهینه در این مرحله، انتخاب C_j به عنوان ترکیب بهینه در این مرحله و عدم انتخاب هریک در این مرحله هستند. سپس با استفاده از قانون احتمال کل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}V^*_{i,j}(n)&=Max\left\{\Pr_{i,j}\{CS\}\right\}\\&=Max\left\{\Pr_{i,j}\left\{CS\middle|S_i\right\}.\Pr_{i,j}\{S_i\}+\Pr_{i,j}\left\{CS\middle|S_j\right\}.\Pr_{i,j}\{S_j\}+\Pr_{i,j}\left\{CS\middle|NS_{i,j}\right\}.\Pr_{i,j}\{NS_{i,j}\}\right\}\end{aligned}$$

محاسبه هر یک از احتمالات فوق به شرح ذیل صورت می‌گیرد:

۱- $\Pr_{i,j}\left\{CS\middle|S_i\right\}$ به معنی احتمال آن است که در فضایی که تنها دو ترکیب C_i و C_j برای سطوح مختلف عوامل وجود دارد، با گزینش C_i به عنوان ترکیب بهینه در این مرحله انتخاب صحیح صورت پذیرد. لذا می‌بایست C_i همان ترکیب بهینه باشد، تا انتخاب صحیح صورت گرفته باشد. یعنی احتمال مذکور معادل $\Pr_{i,j}\{f_X\equiv f_i\}$ خواهد بود که در این جا بر اساس آخرین مشاهدات در دست، مقدار آن را با $B_{i,j}(i;M_k)$ محاسبه می‌کنیم. حال اگر حدس پیشین و حدس پسین بر روی C_i در این فضا را هم‌چون قبل به ترتیب با $B_{i,j}(i;M_k)$ و $B_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)$ نشان دهیم، طبق رابطه (۴) خواهیم داشت:

$$B_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)=\frac{(\bar{y}_i^{(k+1)})^2.B_{i,j}(i;M_k)}{(\bar{y}_i^{(k+1)})^2.B_{i,j}(i;M_k)+(\bar{y}_j^{(k+1)})^2.B_{i,j}(j;M_k)}\qquad(۵)$$

اما به سادگی می‌توان رابطه‌ی زیر را بین حدس‌های پیشین و پسین در فضایی که تنها دو ترکیب C_i و C_j برای سطوح مختلف عوامل موجود بوده و نیز در فضایی که تمامی m ترکیب از سطوح مختلف عوامل وجود دارند، برقرار کرد:

$$\mathrm{B}_{i,j}(i;M_k)=\frac{B_i(M_k)}{B_i(M_k)+B_j(M_k)} \qquad (۶)$$

$$\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)=\frac{B_i(O_{k+1},M_k)}{B_i(O_{k+1},M_k)+B_j(O_{k+1},M_k)} \qquad (۷)$$

به همین ترتیب، $\Pr_{i,j}\{CS|S_j\}=\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)$ خواهد بود.

۲- $\Pr_{i,j}\{S_i\}$ احتمال آن است که C_i به عنوان ترکیب بهینه در این مرحله انتخاب شود. برای این منظور، می‌بایست $\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)=Max\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k),\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\}$ و نیز $\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)$ باشد. یعنی پیشامد S_i به صورت زیر بیان می‌شود:

$$S_i\equiv\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)=Max\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k),\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\},\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}$$

اما با ایجاد یک شرط که هیچ خدشه‌ای بر کلیات مسأله وارد نمی‌آورد، می‌توان این پیشامد را به صورتی بسیار ساده‌تر بیان کرد. با توجه به آن که $\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)+\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)=1$ بوده و حدس‌ها مقادیر نامنفی اختیار می‌کنند و نیز Y متغیر تصادفی پیوسته‌ای است، می‌توان نتیجه گرفت که همواره $Max\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k),\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\}>0.5$ است. لذا با توجه به آن که تصمیم‌گیری بر روی بیشترین حدس صورت می‌گیرد، بدون آن که خدشه‌ای بر مسأله وارد آورده و یا از کلیات آن کاسته شود، می‌توان حدود تغییرات $d_{i,j}(n)$ را از بازه‌ی $[0,1]$ به بازه‌ی $[0.5,1]$ تغییر داد. حال با درنظر گرفتن $d_{i,j}(n)\geq 0.5$ خواهیم داشت:

$$\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}\subseteq\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)=Max\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k),\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\}\}$$

زیرا اگر یکی از حدس‌ها از عددی بزرگتر از ۰/۵ بیشتر باشد، بزرگتر از ۰/۵ بوده و در نتیجه به دلیل آن که مجموع دو حدس برابر با ۱ است، حداکثر دو حدس نیز خواهد بود. حال با توجه به رابطه فوق، پیشامد S_i به شکل $S_i\equiv\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}$ ساده شده و پیشامد S_j نیز به طریقی همانند به صورت $S_j\equiv\{\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}$ بیان می‌شود.

۳- پیشامد $\{CS|NS_{i,j}\}$ به معنی انتخاب صحیح در حالی است که در این مرحله هیچ انتخابی صورت نگرفته است و این مورد زمانی رخ می‌دهد که حداکثر حدس‌ها در این مرحله از مقدار d مربوطه کمتر شود. لذا تصمیم‌گیری به مرحله‌ی بعد منتقل می‌شود. در نتیجه با توجه به رویکرد برنامه ریزی پویا [۹]، حداکثر مقدارِ احتمال این پیشامد برابر با مقدار بیشینه احتمال انتخاب صحیح در مرحله بعد، یعنی $V^*_{i,j}(n-1)$، خواهد بود. اما با توجه به آن که آزمایش‌ها هزینه‌بر بوده و دریافت هر مشاهده مستلزم صرف هزینه‌ای به منظور انجام آزمایش مربوط به آن است، لذا ارزش این احتمال در زمان فعلی و قبل از انجام آزمایش مذکور کمتر از مقدار واقعی آن است که این مورد به کمک ضریب تنزیل α $(0<\alpha\leq 1)$ به صورت $\alpha.V^*_{i,j}(n-1)$ بیان می‌شود.

۴- با توجه به آن که سه پیشامد S_i، S_j و $NS_{i,j}$ افرازی بر فضای تصمیم‌گیریِ $E_{i,j}$ هستند، خواهیم داشت: $\Pr_{i,j}\{NS_{i,j}\}=1-(\Pr_{i,j}\{S_i\}+\Pr_{i,j}\{S_j\})$.

حال با توجه به محاسبات صورت گرفته در فوق، می‌توان مقدار $V^*_{i,j}(n)$ را به صورت ذیل محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}
V^*_{i,j}(n)=\underset{0.5\leq d_{i,j}(n)\leq 1}{Max}\{&\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k).\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}\\
&+\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k).\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}\\
&+\Pr_{i,j}\{CS|NS_{i,j}\}.(1-\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}\\
&-\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\})\}\\
=\underset{0.5\leq d_{i,j}(n)\leq 1}{Max}\{&\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}.\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\\
&+\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}.\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\\
&+\alpha.V^*_{i,j}(n-1).(1-\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}\\
&-\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\})\} \qquad (۸)
\end{aligned}$$

با توجه به رابطه فوق، $V_{i,j}(n,d_{i,j}(n))$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$V_{i,j}\left(n,d_{i,j}(n)\right)=\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}.\mathrm{B}_{i,j}(i;O_k)$$
$$+\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}.\mathrm{B}_{i,j}(j;O_k)$$
$$+\alpha.V_{i,j}^{*}(n-1).\left(1-\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(i;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}\right.$$
$$\left.-\Pr_{i,j}\{\mathrm{B}_{i,j}(j;O_{k+1},M_k)\geq d_{i,j}(n)\}\right) \quad (۹)$$

در این‌جا برای انتخاب ترکیب بهین، ترکیب‌های مختلف را به صورت جفت‌های دوتایی کنار هم گذاشته و مورد مقایسه قرار می‌دهیم. همان‌طور که در زیربخش ۲-۱ توضیح داده شد، برآوردکننده حداکثر حدس برای ترکیب بهینه، ترکیب C_{gr} است. در نتیجه به دلیل آن‌که در هر مرحله، بررسیِ انتخاب، تنها بر روی C_{gr} صورت می‌گیرد، لذا از بین $\binom{m}{2}$ زیرفضای تصمیم‌گیری $E_{i,j}$، تنها $(m-1)$ زیرفضای تصمیم‌گیری $E_{gr,j}$ مورد استفاده قرار خواهد گرفت. بنابراین به جای یافتن نحوه محاسبه حالت کلی $V_{i,j}^{*}(n)$، در پی به دست آوردن حالت خاص $V_{gr,j}^{*}(n)$ خواهیم بود.

۳-۱. نحوه‌ی محاسبه $V_{gr,j}^{*}(n)$

در این قسمت مشابه ایده‌ی کلی که در [۴] ارایه شده است، جهت محاسبه‌ی $V_{gr,j}^{*}(n)$ نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد. لذا از تعدادی قضایا و لم‌های اثبات شده در آن مقاله بهره خواهیم جست که در این‌جا تنها به ذکر آن‌ها اکتفا کرده و از اثبات دوباره‌ی آن‌ها صرف‌نظر می‌شود.

با توجه به آن که $\Pr\{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;O_{k+1},M_k)+\mathrm{B}_{gr,j}(j;O_{k+1},X_k)=1\}=1$ است، رابطه (۸) را برحسب $\mathrm{B}_{gr,j}(gr;O_{k+1},M_k)$ به صورت زیر می‌نویسیم:

$$V_{gr,j}^{*}(n)=\underset{0.5\leq d_{gr,j}(n)\leq 1}{Max}\left\{\left(\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)-\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)\right).\Pr_{gr,j}\{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;O_{k+1},M_k)\geq d_{gr,j}(n)\}\right.$$
$$+\left(\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)-\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)\right).\Pr_{gr,j}\{\mathrm{B}_{gr,j}(j;O_{k+1},M_k)\geq d_{gr,j}(n)\}$$
$$\left.+\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)\right\} \quad (۱۰)$$

از [۴] نتیجه‌های، "$V_{gr,j}^{*}(n)\geq\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)$ است" و "به ازای تمامی مقادیر $j\neq gr$ ، $\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)<0/5<\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)$ است" دراختیار است. حال مشابه [۴]، با دراختیار داشتن مقدار $\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)$، در می‌یابیم که برای محاسبه $V_{gr,j}^{*}(n)$، معادله (۱۰) را می‌توان به سه حالت کلی زیر تقسیم کرد: بوده و در نتیجه $V_{gr,j}(n,1)=\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)$

حالت ۱- $\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)<\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)$:

$V_{gr,j}^{*}(n)=\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)$ و $d_{gr,j}^{*}(n)=1$ است. بنابراین $\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)<d_{gr,j}^{*}(n)$ است و در این مرحله در زیرفضای تصمیم‌گیری $E_{gr,j}$، انتخابی نخواهیم داشت.

حالت ۲- $\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)>\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)$:

$V_{gr,j}^{*}(n)=V_{gr,j}(n,0/5)$ و $d_{gr,j}^{*}(n)=0/5$ است. بنابراین $\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)>d_{gr,j}^{*}(n)$ است و در نتیجه در این مرحله در فضای تصمیم‌گیری $E_{gr,j}$، C_{gr} به عنوان ترکیب بهینه انتخاب می‌شود.

حالت ۳- $\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)<\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)<\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)$:

از روی رابطه فوق، مشخص می‌شود که از دو احتمالِ موجود در معادله (۱۰)، یکی دارای ضریب مثبت و دیگری دارای ضریب منفی است. برای یافتن مقدار بهینه‌ی $V_{gr,j}^{*}(n)$ در این حالت، می‌بایست به کمک روش‌های بهینه‌سازی مقدار $d_{gr,j}^{*}(n)$ را محاسبه کرد. برای این منظور، ابتدا نمادگذاری‌های زیر تعریف می‌شود:

تعریف ۱: *نمادگذاری‌های زیر در ساده‌سازی محاسبه‌ی $d_{gr,j}^{*}(n)$ به‌کار گرفته می‌شود:*

۱. $$h(d_{gr,j}(n))=\sqrt{\frac{d_{gr,j}(n).(1-\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k))}{(1-d_{gr,j}(n)).\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)}}$$

۲. $S_j = \sum_{r=1}^{k} y_j^{(r)}$

۳. $T_1^{(k+1)} = Y_{gr}^{(k+1)} - h(d_{gr,j}(n)).Y_j^{(k+1)}$

۴. $T_2^{(k+1)} = Y_j^{(k+1)} - h(d_{gr,j}(n)).Y_{gr}^{(k+1)}$

۵. $F_1^{(k+1)}$ و $F_2^{(k+1)}$ به ترتیب $C.D.F.$ متغیرهای تصادفی $T_1^{(k+1)}$ و $T_2^{(k+1)}$ در نظر گرفته می‌شود.

ابتدا احتمال $\Pr_{gr,j}\{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;O_{k+1},M_k) \geq d_{gr,j}(n)\}$ موجود در رابطه‌ی (۱۰) را بر حسب نمادهای فوق به صورت زیر ساده می‌کنیم:

$$
\begin{aligned}
\Pr_{gr,j}\{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;O_{k+1},M_k) \geq d_{gr,j}(n)\} &= \Pr\{\frac{(\bar{Y}_{gr}^{(k+1)})^2.\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)}{(\bar{Y}_{gr}^{(k+1)})^2.\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k) + (\bar{Y}_j^{(k+1)})^2.\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)} \geq d_{gr,j}(n)\} \\
&= \Pr\{(\bar{Y}_{gr}^{(k+1)})^2 \geq \frac{d_{gr,j}(n).(1-\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k))}{(1-d_{gr,j}(n)).\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)}.(\bar{Y}_j^{(k+1)})^2\} \\
&= \Pr\{\bar{Y}_{gr}^{(k+1)} \geq \sqrt{\frac{d_{gr,j}(n).(1-\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k))}{(1-d_{gr,j}(n)).\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)}}.\bar{Y}_j^{(k+1)}\} \\
&= \Pr\{\bar{Y}_{gr}^{(k+1)} \geq h(d_{gr,j}(n)).\bar{Y}_j^{(k+1)}\} \\
&= \Pr\{\frac{Y_{gr}^{(k+1)} + S_{gr}^{(k)}}{k+1} \geq h(d_{gr,j}(n)).\frac{Y_j^{(k+1)} + S_j^{(k)}}{k+1}\} \\
&= \Pr\{Y_{gr}^{(k+1)} - h(d_{gr,j}(n)).Y_j^{(k+1)} \geq h(d_{gr,j}(n)).S_j^{(k)} - S_{gr}^{(k)}\} \\
&= \Pr\{T_1^{(k+1)} \geq h(d_{gr,j}(n)).S_j^{(k)} - S_{gr}^{(k)}\} \\
&= 1 - F_1^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_j^{(k)} - S_{gr}^{(k)})
\end{aligned}
$$

و به طور مشابه احتمال $\Pr_{gr,j}\{\mathrm{B}_{gr,j}(j;O_{k+1},M_k) \geq d_{gr,j}(n)\}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$
\Pr_{gr,j}\{\mathrm{B}_{gr,j}(j;O_{k+1},M_k) \geq d_{gr,j}(n)\} = 1 - F_2^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_{gr}^{(k)} - S_j^{(k)})
$$

حال بر اساس محاسبات صورت گرفته، معادله (10) به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$
\begin{aligned}
V_{gr,j}^*(n) = \underset{0.5 \leq d_{gr,j}(n) \leq 1}{Max} \Big\{ &\left(\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k) - \alpha.V_{gr,j}^*(n-1)\right).\left(1 - F_1^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_j^{(k)} - S_{gr}^{(k)})\right) \\
&+ \left(\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k) - \alpha.V_{gr,j}^*(n-1)\right).\left(1 - F_2^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_{gr}^{(k)} - S_j^{(k)})\right) \\
&+ \alpha.V_{gr,j}^*(n-1) \Big\} \qquad (۱۱)
\end{aligned}
$$

و نیز معادله 9 را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$
\begin{aligned}
V_{gr,j}\left(n, d_{gr,j}(n)\right) = &\left(\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k) - \alpha.V_{gr,j}^*(n-1)\right).\left(1 - F_1^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_j^{(k)} - S_{gr}^{(k)})\right) \\
&+ \left(\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k) - \alpha.V_{gr,j}^*(n-1)\right).\left(1 - F_2^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_{gr}^{(k)} - S_j^{(k)})\right) \\
&+ \alpha.V_{gr,j}^*(n-1) \qquad (۱۲)
\end{aligned}
$$

از آن‌جا که $V_{gr,j}^*(n) = \underset{0.5 \leq d_{gr,j}(n) \leq 1}{Max}\left\{V_{gr.j}\left(n, d_{gr,j}(n)\right)\right\}$ است، کافی است که تابع حقیقی $V_{gr.j}\left(n, d_{gr,j}(n)\right)$ بیشینه شود. برای این منظور، ابتدا باید مقدار تابع در نقاطی که مشتق مرتبه‌ی اول صفر و مشتق مرتبه‌ی دوم مثبت می‌شود را یافته و سپس با مقدار تابع در دو نقطهٔ مرزی ۰/۵ و ۱ مقایسه شود. نقطه‌ای که دارای بیشترین مقدار تابع است، بیانگر $d_{gr,j}^*(n)$ می‌باشد.

اما از آن جا که در بیشتر کاربردهای عملی متغیر تصادفی Y دارای توزیع نرمال است، لذا در این حالت خاص، می‌توان معادله‌ای که از برابر صفر قرار دادن مشتق مرتبه‌ی اول تابع $V_{gr,j}\left(n, d_{gr,j}(n)\right)$ حاصل می‌شود را در حالت کلی به شکلی که در زیربخش ذیل می‌آید، ساده کرد. اما در ابتدا اشاره به این نکته لازم است که چون یکی از فرضیات مسأله، مثبت بودن مقادیر پاسخ است، لذا فرض بر آن است که در توزیع نرمال مربوط به هریک از متغیرهای پاسخ، بازه‌ی $[\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]$ که تقریباً ۹۹/۷٪ از توزیع $N[\mu, \sigma^2]$ را می‌پوشاند، در قسمت مثبت مجموعه‌ی اعداد حقیقی قرار می‌گیرد.

۳-۱-۱. حالت خاص: توزیع نرمال

فرض کنید متغیر تصادفی Y_j دارای توزیع $N[\mu_j,\sigma^2]$ باشد. یعنی تابع چگالی آن به صورت زیر است:

$$f_{Y_j}(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}.\sigma}.e^{-\frac{(y-\mu_j)^2}{2\sigma^2}}$$

از آن جا که Y_jها متغیرهای تصادفی مستقل از هم هستند، می‌توان در مورد توزیع $T_1^{(k+1)}$ و $T_2^{(k+1)}$ به صورت زیر اظهارنظر کرد:

$$\begin{cases} T_1 \sim N[h(d_{gr,j}(n)).\mu_j-\mu_{gr},(1+h^2(d_{gr,j}(n))).\sigma^2] \\ T_2 \sim N[h(d_{gr,j}(n)).\mu_{gr}-\mu_j,(1+h^2(d_{gr,j}(n))).\sigma^2] \end{cases}$$

حال اگر .P.D.F و .C.D.F توزیع نرمال استاندارد را به ترتیب با ψ و φ نشان دهیم خواهیم داشت:

$$\begin{cases} F_1^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_j^{(k)}-S_{gr}^{(k)})=\varphi\left(\dfrac{(h(d_{gr,j}(n)).S_j^{(k)}-S_{gr}^{(k)})-(h(d_{gr,j}(n)).\mu_j-\mu_{gr})}{\sigma.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\right) \\ F_2^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_{gr}^{(k)}-S_j^{(k)})=\varphi\left(\dfrac{(h(d_{gr,j}(n)).S_{gr}^{(k)}-S_j^{(k)})-(h(d_{gr,j}(n)).\mu_{gr}-\mu_j)}{\sigma.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\right) \end{cases} \quad (۱۳)$$

اما به دلیل آن که میانگین و واریانس توزیع متغیر تصادفی Y_j نامعلوم هستند، می‌بایست بر اساس مشاهدات در دست، تخمین مناسبی برای آن‌ها یافت که در این جا برآوردکننده‌های ذیل پیشنهاد می‌شود:

$$\begin{cases} \hat{\mu}_j=\dfrac{S_j^{(k)}}{k} \\ \hat{\sigma}^2=\dfrac{\sum_{j=1}^{m}(k-1).\hat{\sigma}_j^2}{m.(k-1)} \ ; \text{ So that } \ \hat{\sigma}_j^2=\dfrac{\sum_{r=1}^{k}(y_j^{(r)}-\hat{\mu}_j)^2}{k-1} \end{cases}$$

لذا رابطه‌ی (۱۳) به صورت زیر تغییر می‌کند:

$$\begin{cases} F_1^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_j^{(k)}-S_{gr}^{(k)})=\varphi\left(\dfrac{(h(d_{gr,j}(n)).k.\bar{y}_j^{(k)}-k.\bar{y}_{gr}^{(k)})-(h(d_{gr,j}(n)).\bar{y}_j^{(k)}-\bar{y}_{gr}^{(k)})}{\hat{\sigma}.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\right) \\ F_2^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_{gr}^{(k)}-S_j^{(k)})=\varphi\left(\dfrac{(h(d_{gr,j}(n)).k.\bar{y}_{gr}^{(k)}-k.\bar{y}_j^{(k)})-(h(d_{gr,j}(n)).\bar{y}_{gr}^{(k)}-\bar{y}_j^{(k)})}{\hat{\sigma}.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\right) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_j^{(k)}-S_{gr}^{(k)})=\varphi\left(\dfrac{(k-1).(h(d_{gr,j}(n)).\bar{y}_j^{(k)}-\bar{y}_{gr}^{(k)})}{\hat{\sigma}.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\right) \\ F_2^{(k+1)}(h(d_{gr,j}(n)).S_{gr}^{(k)}-S_j^{(k)})=\varphi\left(\dfrac{(k-1).(h(d_{gr,j}(n)).\bar{y}_{gr}^{(k)}-\bar{y}_j^{(k)})}{\hat{\sigma}.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\right) \end{cases} \quad (۱۴)$$

با توجه به توضیحات داده شده، حال می‌توان مشتق رابطه (۱۲) را پس از انجام و ساده‌سازی به صورت زیر بیان کرد:

$$\frac{d}{d(d_{gr,j}(n))}V_{gr,j}\left(n,d_{gr,j}(n)\right)=\left(\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)-\alpha.V_{gr,j}^{*}(n-1)\right) .\left(\frac{-(k-1).h'(d_{gr,j}(n)).(\bar{y}_j^{(k)}+\bar{y}_{gr}^{(k)}.h(d_{gr,j}(n)))}{\hat{\sigma}.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))^3}}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&.\psi\left(\frac{(k-1).(h(d_{gr,j}(n)).\bar{y}_j^{(k)}-\bar{y}_{gr}^{(k)})}{\hat{\sigma}.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\right)\\
&+\left(\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)-\alpha.V^*_{gr,j}(n-1)\right)\\
&.\left(\frac{-(k-1).h'(d_{gr,j}(n)).(\bar{y}_{gr}^{(k)}+\bar{y}_j^{(k)}.h(d_{gr,j}(n)))}{\hat{\sigma}.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))^3}}\right)\\
&.\psi\left(\frac{(k-1).(h(d_{gr,j}(n)).\bar{y}_{gr}^{(k)}-\bar{y}_j^{(k)})}{\hat{\sigma}.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\left(\frac{-(k-1).h'(d_{gr,j}(n))}{\hat{\sigma}.\sqrt{(1+h^2(d_{gr,j}(n)))^3}.\sqrt{2\pi}}\right)\\
&.\{\left(\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)-\alpha.V^*_{gr,j}(n-1)\right).(\bar{y}_j^{(k)}+\bar{y}_{gr}^{(k)}.h(d_{gr,j}(n)))\\
&.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(k-1)^2.(h(d_{gr,j}(n)).\bar{y}_j^{(k)}-\bar{y}_{gr}^{(k)})^2}{2\hat{\sigma}^2.(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\\
&+\left(\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)-\alpha.V^*_{gr,j}(n-1)\right).(\bar{y}_{gr}^{(k)}+\bar{y}_j^{(k)}.h(d_{gr,j}(n)))\\
&.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{(k-1)^2.(h(d_{gr,j}(n)).\bar{y}_{gr}^{(k)}-\bar{y}_j^{(k)})^2}{2\hat{\sigma}^2.(1+h^2(d_{gr,j}(n)))}}\}
\end{aligned}
$$

چون در جستجوی ریشه‌های مشتق هستیم، با مساوی صفر قرار دادن آن، به معادله‌ی زیر می‌رسیم:

$$
\left(-\frac{\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)-\alpha.V^*_{gr,j}(n-1)}{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)-\alpha.V^*_{gr,j}(n-1)}\right).\left(\frac{\bar{y}_{gr}^{(k)}+\bar{y}_j^{(k)}.h(d_{gr,j}(n))}{\bar{y}_j^{(k)}+\bar{y}_{gr}^{(k)}.h(d_{gr,j}(n))}\right).\left(e^{\frac{(k-1)^2.\left((\bar{y}_{gr}^{(k)})^2-(\bar{y}_j^{(k)})^2\right)}{2\hat{\sigma}^2}.\left(\frac{1-h^2(d_{gr,j}(n))}{1+h^2(d_{gr,j}(n))}\right)}\right)=1
$$

حال با جای‌گزین کردن $h(d_{gr,j}(n))=\sqrt{\frac{d_{gr,j}(n).(1-\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k))}{(1-d_{gr,j}(n)).\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)}}$ در رابطه‌ی فوق و گرفتن لگاریتم از طرفین آن، پس از ساده کردن، به معادله‌ی زیر تبدیل می‌شود:

$$
\begin{aligned}
&Ln\left(-\frac{\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)-\alpha.V^*_{gr,j}(n-1)}{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)-\alpha.V^*_{gr,j}(n-1)}\right)\\
&+Ln\left(\frac{\sqrt{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)}.\bar{y}_{gr}^{(k)}.\sqrt{1-d_{gr,j}(n)}+\sqrt{\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)}.\bar{y}_j^{(k)}.\sqrt{d_{gr,j}(n)}}{\sqrt{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)}.\bar{y}_j^{(k)}.\sqrt{1-d_{gr,j}(n)}+\sqrt{\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)}.\bar{y}_{gr}^{(k)}.\sqrt{d_{gr,j}(n)}}\right)\\
&+\frac{(k-1)^2.\left((\bar{y}_{gr}^{(k)})^2-(\bar{y}_j^{(k)})^2\right)}{2\hat{\sigma}^2}.\left(\frac{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)-d_{gr,j}(n)}{\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)-\left(\mathrm{B}_{gr,j}(gr;M_k)-\mathrm{B}_{gr,j}(j;M_k)\right).d_{gr,j}(n)}\right)=0 \qquad (۱۵)
\end{aligned}
$$

ریشه‌های معادله‌ی (۱۵) مجموعه‌ی نقطه یا نقاطی است که در آن‌ها مقدار مشتق مرتبه‌ی اول تابع $V_{gr,j}\left(n,d_{gr,j}(n)\right)$ برابر با صفر می‌شود.

۳-۲. شیوه‌ی رد یا قبول C_{gr}

در این‌جا با به‌کارگیری شیوه تصمیم‌گیری مینی–ماکس، معادله‌ی بهینگی[۱۶] را در زمانی که n مرحله‌ی تصمیم‌گیری باقی‌مانده است به صورت $V(n)$ نشان داده و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$V(n) := \underset{j\neq gr}{Min}\left\{\underset{0.5\le d_{gr,j}(n)\le 1}{Max}\left\{V_{gr,j}\left(n, d_{gr,j}(n)\right)\right\}\right\} = \underset{j\neq gr}{Min}\left\{V^*_{gr,j}\left(n\right)\right\} \qquad (۱۶)$$

یعنی در هر مرحله، پس از بهبود حدس‌ها و مشخص کردن $B_{gr}(M_k)=B_{gr}(O_k,M_{k-1})$، می‌بایست $(m-1)$ معادله بهینگی را که مقایسه ترکیب C_{gr} با سایر C_iهاست حل کرده و مقادیر $V^*_{gr,j}(n)$ را محاسبه، سپس مقدار کمینه آن‌ها را یافته و از آن به عنوان مقدار تابع بهینگی استفاده کنیم. حال فرض کنید که این مقدار مینیمم به ازای $j=h$ صورت پذیرد. در نتیجه خواهیم داشت: $V(n)=V^*_{gr,h}(n)$. حال با مشخص شدن مقدار تابع هدف، به راحتی می‌توان با استفاده از استراتژی ذکر شده اقدام به تصمیم‌گیری کرد. یعنی اگر $\mathrm{B}_{gr,h}(gr;O_k)=\mathrm{B}_{gr,h}(gr;O_k,M_{k-1})\ge d^*_{gr,h}(n)$ بود، C_{gr} را به عنوان ترکیب بهینه انتخاب می‌کنیم و فرآیند تصمیم‌گیری پایان می‌یابد. و درغیر این‌صورت، یعنی اگر $\mathrm{B}_{gr,h}(gr;O_k)=\mathrm{B}_{gr,h}(gr;O_k,M_{k-1})< d^*_{gr,h}(n)$ باشد، در این مرحله انتخابی نداشته و با انجام آزمایشی دیگر، بردار مشاهدات O_{k+1} دریافت می‌شود.

اما نکته‌ی جالب توجه، قضیه اساسی [۴] می‌باشد که در این جا نیز صادق است. یعنی "*به ازای هر* $i,j\neq gr$ *و* n *و* k *دلخواه، اگر* $B_i(M_k)>B_j(M_k)$ *باشد، آن‌گاه* $V^*_{gr,i}(n)<V^*_{gr,j}(n)$ *است*." این قضیه بیان می‌کند که برای یافتن $V(n)$ در هر مرحله نیازی به $(m-1)$ مقایسه نبوده و تنها یک مقایسه، محاسبه آن را میسر می‌سازد. به عبارت دیگر، فرض کنید که $B_{sm}(M_k)=B_{(m-1)}(M_k)$ باشد. می‌دانیم که به ازای تمامی مقادیر $j\neq gr$، $B_{sm}(M_k)\ge B_j(M_k)$ بوده و تساوی تنها به ازای $j=sm$ صورت می‌پذیرد. بنابراین به ازای تمامی مقادیر $j\neq gr,sm$، $B_{sm}(M_k)>B_j(M_k)$ بوده و طبق قضیه‌ای که صورت آن در فوق ذکر شد، $V^*_{gr,sm}(n)<V^*_{gr,j}(n)$ خواهد بود. یعنی $\underset{j\neq gr}{Min}\{V^*_{gr,j}(n)\}=V^*_{gr,sm}(n)$ می‌شود که این همان مقدار تابع هدف $V(n)$ است. درنتیجه برای محاسبه تابع هدف نیازی به حل $(m-1)$ معادله بهینگی $V^*_{gr,j}(n)$ به منظور مقایسه C_{gr} با سایر C_jها نبوده و تنها کافی است که پس از بهبود حدس‌ها در هر مرحله، با به دست آوردن $B_{(m)}(M_k)$ و $B_{(m-1)}(M_k)$، gr و sm را به توسط دو رابطه $B_{gr}(O_k)=B_{(m)}(O_k)$ و $B_{sm}(M_k)=B_{(m-1)}(M_k)$ مشخص و $V^*_{gr,sm}(n)$ را محاسبه کنیم. بنابراین معادله بهینگی به صورت زیر ساده می‌شود:

$$V(n) = \underset{0.5\le d_{gr,sm}(n)\le 1}{Max}\left\{V_{gr,sm}\left(n, d_{gr,sm}(n)\right)\right\} = V^*_{gr,sm}\left(n\right) \qquad (۱۷)$$

۴. فرآیند تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها در تحلیل رویه‌ی پاسخ

شکل کلی فرآیند تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها در تحلیل رویه‌ی پاسخ را می‌توان در ۵ قدم زیر بیان کرد:

قدم ۱. مشاهده: یک مشاهده از پاسخ در تمامی ترکیب‌های سطوح مختلف عوامل دریافت شود.

قدم ۲. بهبود حدس: با استفاده از بردار مشاهدات O_k $(k\ge 1)$، حدس پیشین در مورد ترکیب C_j، $B_j(M_{k-1})$، را بهبود بخشیده و با به کار بردن معادله (۶) حدس پسین در مورد آن، $B_j(O_k,M_{k-1})$، را محاسبه کنید.

قدم ۳. آماره‌های ترتیبی: حدس‌ها را به صورت صعودی مرتب کرده و gr و sm را توسط دو رابطه $B_{gr}(O_k,M_{k-1})=B_{(m)}(O_k,M_{k-1})$ و $B_{sm}(O_k,M_{k-1})=B_{(m-1)}(O_k,M_{k-1})$ مشخص کنید. سپس از روی این دو مقدار، توسط رابطه (۷) مقدار $\mathrm{B}_{gr,sm}(gr;M_k)=\mathrm{B}_{gr,sm}(gr;O_k,M_{k-1})$ را به‌دست آورید.

قدم ۴. محاسبه $d^*_{gr,sm}(n)$: مطابق با بحث صورت گرفته در زیربخش ۳–۱، $d^*_{gr,sm}(n)$ را محاسبه کنید.

قدم ۵. تصمیم‌گیری: اگر در مرحله‌ی nاُم تصمیم‌گیری، $\mathrm{B}_{gr,sm}(gr;M_k)\ge d^*_{gr,sm}(n)$ بود، ترکیب C_{gr} به عنوان ترکیب بهینه پذیرفته شده و تمام فرآیند تصمیم‌گیری پایان خواهد پذیرفت. در غیر این صورت، بدون گرفتن تصمیمی در این مرحله، k برابر با $k+1$ و n مساوی با $n-1$ شده و فرآیند دوباره به قدم ۱ باز می‌گردد.

۵. مثال عددی

یک مسأله‌ی تحلیل رویه‌ی پاسخ با دو عامل را درنظر بگیرید که یک عامل شامل دو سطح و دیگری شامل سه سطح است؛ یعنی دارای شش ترکیب از سطوح مختلف عوامل می‌باشد. توزیع این شش ترکیب را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$C_i \sim N[100+50(i-1), 20]$; for $i=1,2,3,4,5,6$

به دلیل هزینه بسیار بالای آزمایش‌ها، انجام بیش از ۱۰ آزمایش مقدور نیست ($N=10$). لذا $\alpha=0/97$ درنظر گرفته می‌شود. هم‌چنین تمایل داریم که درصورت انجام تمامی ۱۰ آزمایش، حداقل با احتمال ۰/۹۵ انتخاب صحیح صورت گیرد ($V(0)=0/95$).

حدس اولیه بر روی شش ترکیب یکسان است. یعنی:

$$B_1(M_0)=B_2(M_0)=B_3(M_0)=B_4(M_0)=B_5(M_0)=B_6(M_0)=\frac{1}{6}$$

برای نشان دادن چگونگی عملکرد فرآیند تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها، به کمک کامپیوتر پیشامدهای دریافت مشاهدات از توزیع هر یک از ترکیب‌ها را شبیه‌سازی می‌کنیم. به منظور تولید اعداد تصادفی از توزیع نرمال، از یک مولد اعداد تصادفی یکنواخت و روش تبدیل مستقیم [1] استفاده می‌کنیم.

۱- دریافت بردار مشاهدات اول:

قدم ۱: از مولد اعداد تصادفی یک بردار مشاهدات می‌سازیم که مقادیر آن به صورت زیر است:

$$O_1=(54/908, 104/218, 205/396, 260/139, 261/250, 376/250)$$

توجه شود که هم‌اکنون، $k=1$ و $n=10$ است.

قدم ۲: از رابطه (4)، حدس پسین بر روی C_1 به صورت زیر محاسبه خواهد شد:

$$B_1(O_1,M_0)=\frac{(54/908)^2.(\frac{1}{6})}{(54/908)^2.(\frac{1}{6})+(104/218)^2.(\frac{1}{6})+(205/396)^2.(\frac{1}{6})+(260/139)^2.(\frac{1}{6})+(261/250)^2.(\frac{1}{6})+(376/250)^2.(\frac{1}{6})}$$
$$=0/009$$

به همین ترتیب سایر حدس‌ها به صورت زیر بهبود می‌یابند:

$$B_2(O_1,M_0)=0/033, B_3(O_1,M_0)=0/126, B_4(O_1,M_0)=0/203, B_5(O_1,M_0)=0/204, B_6(O_1,M_0)=0/425$$

قدم ۳: مرتب شده‌ی حدس‌های فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$B_1(O_1,M_0)<B_2(O_1,M_0)<B_3(O_1,M_0)<B_4(O_1,M_0)<B_5(O_1,M_0)<B_6(O_1,M_0)$$

بنابراین $gr=6$ و $sm=5$ است. با توجه به رابطه (7) خواهیم داشت:

$$\mathrm{B}_{6,5}(6;O_1,M_0)=\frac{B_6(O_1,M_0)}{B_6(O_1,M_0)+B_5(O_1,M_0)}=\frac{0/425}{0/425+0/204}=0/676$$

قدم ۴: با توجه به آن‌که $V(0)=0/95$ است، لذا از روی معادله‌ی بهینگی (۱۶)، $V_{6,5}^*(0)=0/95$ به دست می‌آید. حال با داشتن این مقدار اولیه و نیز با توجه به رابطه بازگشتی (۱۰)، از آن جا که

$$\mathrm{B}_{6,5}(6;O_1,M_0)=0/676<\alpha^{10}.V_{6,5}^*(0)=0/701$$

است، لذا در حالت ۱ از زیربخش ۳-۱ قرار داشته و در نتیجه $V_{6,5}^*(10)=0/701$ و $d_{6,5}^*(10)=1$ به‌دست می‌آید.

قدم ۵: چون $\mathcal{B}_{6,5}(6;O_1,M_0)=0/675<d_{6,5}^*(10)=1$ است، لذا در این مرحله انتخابی نداشته و با یک مرحله تصمیم‌گیری کمتر و یک مشاهده بیشتر به قدم ۱ باز می‌گردیم.

۲- دریافت بردار مشاهدات دوم:

قدم ۱: از مولد اعداد تصادفی بردار مشاهدات دوم را می‌سازیم که مقادیر آن به صورت زیر است:

$$O_2=(157/156, 183/074, 222/658, 235/845, 296/444, 370/814)$$

اکنون، $k=2$ و $n=9$ است.

قدم ۲: بر اساس ماتریس مشاهدات $M_2=\begin{bmatrix}O_1\\O_2\end{bmatrix}$، مقادیر میانگین پاسخ‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\bar{Y}_1^{(2)}=106/032, \bar{Y}_2^{(2)}=143/646, \bar{Y}_3^{(2)}=214/027, \bar{Y}_4^{(2)}=247/992, \bar{Y}_5^{(2)}=278/847, \bar{Y}_6^{(2)}=373/532$

از رابطه (۴)، مقادیر حدس پسین بر روی ترکیب‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$B_1(O_2,M_1)=0/001, B_2(O_2,M_1)=0/007, B_3(O_2,M_1)=0/061$

$B_4(O_2,M_1)=0/132, B_5(O_2,M_1)=0/169, B_6(O_2,M_1)=0/629$

قدم۳: مرتب شده‌ی حدس‌های فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$B_1(O_2,M_1)<B_2(O_2,M_1)<B_3(O_2,M_1)<B_4(O_2,M_1)<B_5(O_2,M_1)<B_6(O_2,M_1)$$

بنابراین $gr=6$ و $sm=5$ است. با توجه به رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$\mathrm{B}_{6,5}(6;O_2,M_1)=\frac{B_6(O_2,M_1)}{B_6(O_2,M_1)+B_5(O_2,M_1)}=\frac{0/629}{0/629+0/169}=0/788$$

قدم۴: با توجه به آن که $V(0)=0/95$ است، لذا از روی معادلهٔ بهینگی (۱۶)، $V_{6,5}^{*}(0)=0/95$ به‌دست می‌آید. حال با داشتن این مقدار اولیه و نیز با توجه به رابطه بازگشتی (۱۰)، از آن جا که

$$\mathrm{B}_{6,5}(6;O_2,M_1)=0/788<\alpha^9.V_{6,5}^{*}(0)=0/722$$

است، لذا در حالت ۱ از زیربخش ۳-۱ قرار داشته و در نتیجه $V_{6,5}^{*}(9)=0/722$ و $d_{6,5}^{*}(9)=1$ به‌دست می‌آید.

قدم۵: چون $\mathrm{B}_{6,5}(6;O_2,M_1)=0/788<d_{6,5}^{*}(9)=1$ است، لذا در این مرحله انتخابی نداشته و با یک مرحله تصمیم‌گیری کمتر و یک مشاهده بیشتر به قدم ۱ باز می‌گردیم.

۳- دریافت بردار مشاهدات سوم:

قدم۱: از مولد اعداد تصادفی بردار مشاهدات سوم را می‌سازیم که مقادیر آن به صورت زیر است:

$O_3=(128/025, 186/120, 181/492, 270/918, 280/749, 670/402)$

حال، $k=3$ و $n=8$ است.

قدم۲: بر اساس ماتریس مشاهدات $M_3=\begin{bmatrix}O_1\\O_2\\O_3\end{bmatrix}$، مقادیر میانگین پاسخ‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$\bar{Y}_1^{(3)}=113/363, \bar{Y}_2^{(3)}=157/804, \bar{Y}_3^{(3)}=203/182, \bar{Y}_4^{(3)}=255/634, \bar{Y}_5^{(3)}=279/481, \bar{Y}_6^{(3)}=347/978$

از رابطه (۴)، مقادیر حدس پسین بر روی ترکیب‌ها به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$B_1(O_3,M_2)=0/000, B_2(O_3,M_2)=0/002, B_3(O_3,M_2)=0/025$

$B_4(O_3,M_2)=0/086, B_5(O_3,M_2)=0/131, B_6(O_3,M_2)=0/756$

قدم۳: مرتب شده‌ی حدس‌های فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$B_1(O_3,M_2)<B_2(O_3,M_2)<B_3(O_3,M_2)<B_4(O_3,M_2)<B_5(O_3,M_2)<B_6(O_3,M_2)$$

بنابراین $gr=6$ و $sm=5$ است. با توجه به رابطه (۷) خواهیم داشت:

$$\mathrm{B}_{6,5}(6;O_3,M_2)=\frac{B_6(O_3,M_2)}{B_6(O_3,M_2)+B_5(O_3,M_2)}=\frac{0/756}{0/756+0/131}=0/852$$

قدم۴: با توجه به آن که $V(0)=0/95$ است، لذا از روی معادله‌ی بهینگی (۱۶)، $V_{6,5}^{*}(0)=0/95$ به‌دست می‌آید. حال با داشتن این مقدار اولیه و نیز با توجه به رابطه بازگشتی (۱۰)، از آن جا که

$$\mathrm{B}_{6,5}(5;O_3,M_2)=0/148<\alpha^8.V_{6,5}^{*}(0)=0/745<\mathrm{B}_{6,5}(6;O_3,M_2)=0/852$$

است، لذا در حالت ۳ از زیربخش ۳-۱ قرار داریم. ابتدا معادله ۱۵ را به صورت زیر تشکیل می‌دهیم:

$$Ln(-5/579)+Ln\left(\frac{321/386\sqrt{1-d_{6,5}(8)}+107/155\sqrt{d_{6,5}(8)}}{258/123\sqrt{1-d_{6,5}(8)}+133/417\sqrt{d_{6,5}(8)}}\right)+214/895\left(\frac{0/852-d_{6,5}(8)}{0.852-0/704d_{6,5}(8)}\right)=0$$

از حل این معادله پاسخ $d_{6,5}(8)=0/855$ به‌دست آمده و در نتیجه خواهیم داشت:

$$V_{6,5}(8,0/855)=(0/852-0/745).\left(1-F_1^{(3)}(838/443h(0/855)-1043/934)\right)$$

$$+\left(0/148-0/745\right).\left(1-F_2^{(3)}(1043/934h(0/855)-834/443)\right)+0/745$$

حال با توجه به آن که $h(0/855)=1/012$ است خواهیم داشت:

$$\begin{cases}T_1^{(3)}\sim N[-65/143,809/658]\\T_2^{(3)}\sim N[72/673,809/658]\end{cases}$$

لذا؛

$$\begin{aligned}V_{6,5}(8,0/855)&=(0/107).(1-\varphi(-4/579))-(0/579).(1-\varphi(5/249))+0/745\\&=(0/107).(1-0)-(0/579).(1-1)+0/745=0/852\end{aligned}$$

اما همان طور که مشاهده می‌شود، دو مقدار احتمال فوق در قسمتی قرار دارند که یکی تقریباً صفر و دیگری تقریباً برابر با یک است. از آن جا که در توزیع نرمال استاندارد، با دقت ۳ رقم اعشار تنها مقادیر داخل بازه‌ی $(-4,4)$ دارای مقدار $C.D.F.$ مابین صفر و یک بوده و مقادیر کوچک‌تر دارای $C.D.F.$ صفر و مقادیر بزرگ‌تر دارای $C.D.F.$ یک هستند، به نظر می‌رسد که مقادیر دیگرِ نزدیک به $d_{6,5}(8)=0/855$ نیز دارای مقداری مشابه برای تابع فوق باشند. برای این منظور $d_{6,5}(8)=0/850$ را امتحان می‌کنیم.

$$\begin{aligned}V_{6,5}(8,0/850)&=(0/107).(1-\varphi(-5/022))-(0/579).(1-\varphi(4/665))+0/745\\&=(0/107).(1-0)-(0/579).(1-1)+0/745=0/852\end{aligned}$$

در نتیجه می‌توان $d^*_{6,5}(8)=0/850$ انتخاب کرد.

قدم ۵: چون $B_{6,5}(6;O_3,M_2)=0/852<d^*_{6,5}(8)=0/850$ است، لذا در این مرحله، توقف کرده و C_6 را به عنوان ترکیبی که موجب بیشترین میانگین پاسخ می‌شود انتخاب می‌کنیم و در نتیجه در این جا فرآیند تصمیم‌گیری خاتمه می‌یابد.

همان طور که ملاحظه می‌شود، در این مثال، این شیوه‌ی تصمیم‌گیری تنها با انجام ۳ آزمایش و دریافت ۱۸ مشاهده، قادر به انتخاب ترکیب درست بود.

۶. نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک مسأله‌ی تحلیل رویه‌ی پاسخ با استفاده از رهیافت تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها حل شد. این رهیافت این امکان را می‌دهد تا با به‌کارگیری مشاهدات قبلی که به‌صورت دنباله‌ای می‌آمدند، حدس‌های درنظر گرفته شده بر روی ترکیب‌ها بهبود یابد. با به‌کارگیری استقلال شرطی مشاهدات، فرآیند بهبود حدس تبدیل به یک رابطه بازگشتی ساده شد و سپس با استفاده از ساختار سیاست بهینه، استراتژی بهینه به طور صریح به‌دست آمد. این روش به صورت بسیار مفید می‌تواند در محیط‌های تصمیم‌گیری مربوط به تحلیل رویه‌ی پاسخ به‌کار رود به طوری که شخص تصمیم‌گیرنده با اِعمال توان مالی خود جهت تعداد آزمایش‌ها و استفاده‌ی به روز شده از نتایج آن‌ها، به یک تصمیم مناسب دست یابد. از نظر تحقیقات آتی، به‌نظر می‌رسد که رهیافت تصمیم‌گیری بر روی حدس‌ها می‌تواند در بسیاری از مسایل دیگر تصمیم‌گیری چون برنامه‌ریزی غیرخطی، آزمون فرض‌های آماری، کنترل کیفیت و . . . به کار گرفته شود.

منابع و مراجع

[۱] Banks, J., Carson, J.S., Nelson, B.L., Nicol, D.M., *Discrete-Event System Simulation*, Prentice-Hall Inc., 2002.

[۲] Bernardo, J.M., Smith, A.F.M., *Bayesian Theory*, Wiley, 2001.

[۳] Conover, W. J., *Practical Nonparametric Statistics*, John Wiley & Sons, 1980.

[۴] Eshragh J., A., Modarres, M., *A New Approach to Distribution Fitting: Decision Beliefs*, Proceedings of 53rd ISI Session, Seoul, 2001.

[۵] Eshragh J., A., *The Application of Decision on Beliefs in Response Surface Methodology*, Unpublished M.S. Project, Industrial Engineering Department, Sharif University of Technology, 2003.

[۶] Lawson, J., Erjavec, L., *Modern Statistics for Engineering and Quality Improvment*, Thomson Asia Pte Ltd., 2002.

[۷] Montgomery, D.C., *Design and Analysis of Experiments*, John Wiley & Sons, 1997.

[۸] Seigmund, D., *Sequential Analysis*, Springer Varlag, New York Inc., 1985.

[۹] Ross, S., *Introduction to Stochastic Dynamic Programming*, Academic Press, New York, 1983.
[۱۰] Ross, S.M. , *A First Course in Probability*, 6th Ed. , Pearson Education, Inc., 2003.

---

[۱] Design of Experiments
[۲] Fisher
[۳] Response
[۴] Response Surface Methodology
[۵] Sequential Analysis
[۶] On-Line
[۷] Distribution Fitting
[۸] Decision on Beliefs (DOB)
[۹] Critical Factors
[۱۰] Finite
[۱۱] Countable
[۱۲] Level
[۱۳] Range
[۱۴] Optimal Stopping Problem
[۱۵] The Least Acceptable Belief
[۱۶] Optimality Equations