قیمت گذاری پویا با بازبینی های دوره ای و قیمتهای گسسته

محمدمدرس
استاد دانشگاه صنعتی شریف
modarres@sharif.edu
احسان بلندی فر
کارشناسی ارشد، دانشگاه صنعتی شریف
bolandifar@gmail.com

چکیده

دراین مقاله دومدل ریاضی جدید قیمت گذاری پویا توسعه می یابد. افق زمانی و تعداد دوره های بازبینی و همچنین مجموعه قیمتهای گسسته قابل قبول در بازار عرضه از قبل معین فرض می شود. قیمتها در دوره های تعیین شده مورد بازبینی قرار می گیرند. تقاضا برای کالا تصادفی است که به دوره وهمچنین به قیمت پیشنهادی بستگی دارد. مراجعه مشتریها برای خرید طبق فرایند پواسان ناهمگن است. کالاهایی که در انتهای بازه به فروش نرسیده اند فاقدارزش خواهندبود. هدف تعیین قیمتهای ارائه کالا به مشتریان در طول بازه های تصمیم گیری است به گونه ای که سود قابل حصول از فروش کالاهای در دست بیشینه گردد. تفاوت دو مدل توسعه یافته دراین مقاله مربوط به درنظرگرفتن یا آزاد سازی حد میزان فروش است. این مدلها درچارچوب برنامه ریزی پویا فورموله شده اند و با مدلهای موجود درادبیات ازنظر قیمتهای گسسته و همچنین تعیین حد فروش متفاوت هستند و با فرضیات واقعی درصنعت تشابه بیشتری دارند.

۱- مقدمه

دستاوردهای قیمت گذاری پویا[1] از مدتها پیش در صنایع مختلفی مانند شرکتهای هوایی، هتلداری و شرکتهای انتقال برق و نیز فروشگاههای زنجیره ای شناخته شده است. این مقوله که دردهه گذشته ودرچارچوب مدیریت درآمد[2] مطرح شد به تعیین قیمت کالا یاخدمتی می پردازد که چنانچه پس از گذشت زمانی مشخص به فروش نرسدبدون ارزش خواهد بود. چنین کالائی را فساد پذیر می نامند. هدف قیمت گذاری پویا تعیین قیمت فروش این کالا دردوره های مختلف بازه زمانی موجود قبل از فساد آن است به طوری که امید ریاضی ارزش حاصل ازفروش حداکثر گردد.

در این مقاله دو مدل جدید قیمت گذاری موجودی کالاهای فاسدشدنی توسعه می یابد. افق زمانی و تعداد دوره های بازبینی و همچنین مجموعه قیمتهای گسسته قابل قبول دربازار عرضه از قبل معین فرض می شود. قیمتها در دوره های از قبل تعیین شده مورد بازبینی قرار می گیرند. لذا، تعداد دفعات تغییر قیمت در طول بازه فروش حداکثر به تعداد دوره های بازبینی خواهد بود.

---

[1]-Dynamic Pricing
[2]-Revenue Management

ورود مشتریان جهت خرید کالا طبق توزیع پواسان ناهمگن است. تفاوت دو مدل توسعه یافته دراین مقاله مربوط به حد میزان فروش است. درمدل اول، که آنرا مدل مدل پایه می نامیم درهردوره حدی برای میزان فروش با قیمت تعیین شده درآن دوره تعیین نمی شود. به عبارت دیگر، برای هر دوره یک قیمت فروش تعیین می گردد و تمام تقاضاهای رسیده تا اتمام تمامی موجودی، تامین می گردد. درمدل دوم، برای هردوره حدی برای فروش درنظر گرفته می شود تا امکان عرضه کالا در دوره های بعدی نیز میسرگردد.

درهردو مدل، به بررسی خواص بهینگی جواب با توجه به فرض تقعر تابع پرداخته می شود. جهت تشریح بیشتر مدلها از مثالهای عددی نیز بهره گرفته می شود.

۱-۱- تعریف مسئله

درهردو مدل قیمت گذاری پویا ارائه شده دراین مقاله، دوره های بازنگری گسسته و مجموعه قیمتها از پیش تعیین شده فرض می شود. مقدارموجودی در دست که بایستی در افق زمانی معینی به فروش رسانده شود، معلوم است. تقاضا برای کالا تصادفی است که به دوره وهمچنین به قیمت پیشنهادی بستگی دارد. مراجعه مشتریها برای خرید طبق فرایند پواسان ناهمگن است. کالاهایی که در انتهای بازه به فروش نرسیده باشند، فاقدارزش خواهند بود. اگرچه آزادسازی این فرض نیز در ساختارمدل خللی ایجاد نمی کند. موجودی قابلیت تجدید ندارد و تقاضاهای از دست رفته هزینه ای ایجاد نمی نمایند. هدف تعیین قیمتهای ارائه کالا به مشتریان در طول بازه های تصمیم گیری است به گونه ای که سود قابل حصول از فروش کالاهای در دست بیشینه گردد.

در عمل هم مشاهده می شود که در بسیاری از صنایع، قیمتها در مدت زمانهای معینی مورد بازنگری قرار داده می شوند و از سوی دیگر مجموعه قیمتهای ارائه کالای مورد نظر نیز از قبل معین است و تصمیم گیرنده تنها به تعیین قیمتی از مجموعه قیمتهای ممکن برای ارائه کالا درهر بازه زمانی و با توجه به رفتار مشتریان نسبت به قیمتهای پیشنهادی می پردازد. البته در پاره ای ازصنایع هم برای حفظ مشتریها یا سایرتعهدات، می توان سطحی را برای میزان فروش کالا در هر بازه تعیین نمود تا دربازه های بعدی نیز کالا موجودباشد.

۱-۲- مرور ادبیات

مسئله اولیه قیمت گذاری پویا اولین بار توسط کینکید و دارلینگ(۱۹۶۳) معرفی گردید. این مسئله در صنایعی همچون لباسهای تابع مد که دارای عمر کوتاه هستند و یا درخدماتی همانند صندلی هواپیما و یا اتاقهای هتل کارایی بالایی از خود نشان داده است. در گالگو و ون رایزین(۱۹۹۴) می توان مباحث گسترده تری را در مورد زمینه های پیدایش و نیز قابلیت کاربرد قیمت گذاری پویا مشاهده نمود.

در مقالات مختلفی که در زمینه قیمت گذاری پویا ارائه شده است دو رویکرد مختلف را می توان تشخیص داد. برخی از مقالات به بررسی خواص ساختاری سیاستهای بهینه در قیمت

گذاری پویا می پردازند. هدف اینگونه مقالات ایجاد دیدی کلی از چگونگی رفتار قیمتها با توجه به برخورد خریداران نسبت به قیمتهای ارائه شده و توسعه الگوریتمهایی کارا برای محاسبه سیاستهای بهینه است. دسته دیگر مقالات به ارائه مدلهایی برای قیمت گذاری پویا می پردازند که پدیده های مختلفی که فروشنده در فروش کالای خود با آن رو برو می شود را مد نظر قرار می دهند و سیاست بهینه ای را بدون توجه به پیچیدگی حل مدل ارائه شده، توسعه می دهند.

خواص ساختاری مربوط به سیاست بهینه به عنوان مثال در مقالاتی از گالگو و ون رایزین(۱۹۹۴) و نیز بیتران و ماندسچین(۱۹۹۷) مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از یک توزیع تقاضای متجانس که در آن نرخ تقاضا تابعی مستقل از زمان در نظر گرفته شده است، گالگو و ون رایزین(۱۹۹۴) خواص زیر را برای سیاست بهینه اثبات نموده اند:

۱- در هر لحظه از زمان، قیمت بهینه با افزایش کالاهای به فروش نرسیده، کاهش می یابد.
۲- در هر سطحی از موجودی، با گذشت زمان قیمت بهینه کاهش می یابد.

خاصیت اول با نام خاصیت یکنواختی موجودی[3] و خاصیت دوم با نام یکنواختی زمانی[4] شناخته می شود. بیتران و ماندسچین(۱۹۹۷) به بررسی دوخاصیت فوق با توزیع تقاضای پواسان نامتجانس پرداخته و نشان داده اند در حالتیکه توزیع قیمت رزرو به زمان وابسته نباشد این حواص بر قرار هستند. لیکن، در حالتیکه توزیع قیمت رزرو به زمان وابسته باشد، خاصیت دوم دیگر بر قرار نیست. ژائو و ژنگ(۲۰۰۰) نشان داده اند که خاصیت دوم برای چنین حالتی تحت شرایطی کافی برقرار است. برخی دیگر از کارهای انجام شده در این زمینه را می توان در بیتران و همکاران(۱۹۹۸)، فنگ و گالگو(۱۹۹۵) و لازیر(۱۹۸۶) مشاهده نمود. مهمترین مفروضات مدلهای ارائه شده در این مقالات عبارتست از:

۱- فروشنده در محیطی غیر رقابتی به فعالیت می پردارند.
۲- افق زمانی فروش محدود است.
۳- فروشنده دارای موجودی معلوم n است و نمی تواند در طول بازه فروش تجدید موجودی نماید.
۴- سرمایه گذاری انجام شده در موجودی به عنوان هزینه های از دست رفته محسوب می گردد.
۵- تقاضا با افزایش قیمت کاهش می یابد.
۶- کالاهای به فروش نرسیده دارای ارزش اسقاطی خواهند بود.

بیتران و ماندسچین(۱۹۹۷) به بررسی حالتی که در آن قیمتها حداکثر می توانند k دفعه بازبینی گردند، پرداخته اند. در مدل آنها فاصله زمانی ما بین بازبینی ها از قبل مشخص است. آنها مسئله خود را درچارچوب برنامه ریزی پویا مدل سازی نموده اند که در هر مرحله تبدیل به یک

[3]-Inventory Monotonocity
[4] -Time Monotonocity

برنامه ریزی غیر خطی می شود. نشان داده می شود که در حد، وقتیکه ظرفیت به سمت بی نهایت میل می نماید و توزیع قیمتهای رزرو مستقل از زمان فروش می باشد قیمتهای ثابت بهینه هستند.

در مدلهای پیشنهادی این مقاله مجموعه قیمتها گسسته و از قبل معین است و لذا با مدل بیتران و ماندسچین تفاوت اساسی دارد. علاوه براین، تاثیر در نظر گرفتن حد بر میزان فروش در هر دوره منظور می گردد.

دربخش ۲ مدلهای ریاضی ارائه شده و پارامترهای مربوطه معرفی وآنگاه در بخش بعدی با ارائه یک مثال عددی خواص بهینگی در مدل بررسی می گردد. در ادامه به بررسی جوابهای حاصل از مدلهای ارائه شده و مقایسه آنها با جوابهای حاصل از مدل قیمت گذاری پویای پیوسته پرداخته می شود. در انتها نیز زمینه های مناسب برای توسعه مطالب ارائه شده بیان می گردد.

۲ – مدلهای ریاضی

در این بخش دومدل ریاضی توسعه می یابد. در اولین مدل، فرض بر آنست که در صورت وجود کالا تقاضای هیچ مشتری رد نگردد و با قیمت آن بازه تمام کالاهای باقیمانده قابل فروش باشد. در این مدل هدف تنها یافتن قیمتی از داخل مجموعه قیمتها برای ارائه کالا در طول بازه تصمیم گیری می باشد به گونه ای که امید ریاضی سود قابل حصول از فروش کالاهای در دست بیشینه گردد. درحالی که در مدل دوم فروشنده امکان نگهداری کالای خود را برای فروش در دوره های بعدی دارد.

۲-۱- مدل اول: مدل ریاضی پایه

فرض می شود C واحد از کالایی در افق زمانی T واحد برای فروش در n دوره عرضه می گردد. در طول این مدت قیمتها بایستی در هر دوره مورد بازنگری قرار داده شوند. شماره گذاری دوره های بازنگری به صورت رو به عقب انجام می شود، به طور مثال، منظور از دوره اول آخرین دوره بازنگری و منظور از دوره n اولین دوره قیمت گذاری کالا در ابتدای فروش است. از سوی دیگر، قیمتهای قابل گزینش برای ارائه کالا در هر بازه از مجموعه قیمتهای $S_p = \{p_1, p_2, ..., p_K\}$ انتخاب می گردد. در مدل ارائه شده از هر توزیعی که در هر دوره با استفاده از داده های دوره قبل، پیش بینی تقاضای دوره بعدی ممکن باشد می توان استفاده نمود و به همین دلیل نیز مدل محدود به تابع توزیع خاصی برای ورود مشتریان نخواهد بود. در بیشتر مدلهای ارائه شده در ادبیات قیمت گذاری پویا از توزیع پواسان جهت مدل نمودن فرایند خرید استفاده شده است، لیکن در مدل پیشنهادی، این فرض تعمیم یافته و دامنه بیشتری از توزیعها را می توان به کار بست. ابتدا فرض نمائید ورود مشتریان جهت خرید کالا دارای توزیع پواسان ناهمگن با نرخ ورود $\lambda(t)$ باشد که در آن t نشان دهنده مدت زمان باقیمانده تا انتهای بازه فروش است. ضمنا حداکثر قیمتی که هر مشتری حاضر به پرداخت آن برای دریافت کالای مربوطه می باشد نیز متغیری تصادفی باتابع توزیع معین است. اگر قیمت کالای عرضه شده در یک بازه p باشد آنگاه در زمان t در داخل این بازه احتمال خرید

این کالا از سوی یک مشتری برابر $1-F_t(p)$ خواهد بود. بنابراین نرخ خرید کالا در زمان t را می توان با $\lambda(t)\times(1-F_t(p))$ نشان داد. جهت تعیین قیمت عرضه کالا در ابتدای هر بازه زمانی T_i از برنامه ریزی پویای احتمالی با حرکت پسرو استفاده شده است. طبق قرارداد:

$V_i(c_i)$: حداکثر امید ریاضی سود در i دوره آینده است درصورتی که میزان موجودی در ابتدای دوره i ام برابر با c_i باشد.

کالاهای به فروش نرسیده در انتهای بازه فروش دارای ارزش اسقاطی صفر در نظر گرفته شده اند، در نتیجه می توان شرایط مرزی زیر را برای مدل در نظر گرفت:

$$V_i(0)=0 \qquad \forall i$$

$$V_0(c_0)=0 \qquad \forall c_0$$

با توجه به توزیع پواسان نامتجانس ورود مشتریان و نیز توزیع قیمت رزرو، می توان متوسط کالای فروش رفته در طول هر بازه تصمیم گیری را به صورت زیر بدست آورد:

$$m_i(p_k)=\int_{T_i}^{T_{i-1}}\lambda(t)\times(1-F_t(p_k))d_t$$

در این رابطه T_i نشان دهنده زمان شروع دوره فروش i ام و T_{i-1} زمان خاتمه فروش در این بازه است. با توجه به متوسط بدست آمده تابع توزیع تعداد خریدهای صورت گرفته در هر بازه به صورت زیر ارائه می شود:

$$\Pr\{X_i(p_k)=j\}=\exp(-m_i(p_k))\times m_i(p_k)^\wedge j/j!$$

در رابطه بالا، $X_i(p_k)$ نشان دهنده متغیر تصادفی تعداد خریدهای انجام شده در بازه i ام، هنگامیکه کالای ما با قیمت p_k عرضه می گردد، می باشد.

براساس رابطه بازگشتی برنامه ریزی پویا می توان حداکثر امید ریاضی سود قابل حصول در دوره اول قیمت گذاری را هنگامیکه دارای c_1 کالای باقیمانده در ابتدای بازه اول باشد را بصورت زیر بیان نمود:

$$V_1(c_1,p_k)=\sum_{j=0}^{c_1}\Pr\{X_1(p_k)=j)\times jp_k+\Pr\{X_1(p_k)>c_1)\times c_1p_k \qquad (۱)$$

در رابطه (۱)، $0\le c_1\le C$ متغیر حالت و $V_i(c_1,p_k)$ نشان دهنده بیشینه امید ریاضی سود در آخرین دوره است به شرطی که c_1 موجودی در ابتدای دوره آخر و قیمت ارائه محصول p_k باشد. حال خواهیم داشت:

$$V_i(c_1)=\underset{p_k}{Max}\{V(c_1,p_k)\} \qquad (۲)$$

از معادله (۲) می توان بیشینه امید ریاضی سود و نیز p_k یعنی قیمت بهینه ارائه کالا در طول بازه آخر را بدست آورد. حال بازه دلخواه i ام را در نظر می گیریم. برای این بازه داریم:

(۳)

$$V_i(c_i,p_k)=\sum_{j=0}^{c_i}\Pr\{X_i(p_k)=j\}\times(jp_k+V_{i-1}(c_i-j))+\Pr\{X_i(p_k)>c_i\}\times c_ip_k$$

برای این دوره نیز رابطه (۴) را در نظر می گیریم:

$$V_i(c_i) = \underset{p_k}{Max}\{V_i(c_i, p_k)\} \qquad (۴)$$

با حل معادلات بازگشتی ارائه شده تا دوره n ام و با در نظر گرفتن $c_n = C$ بیشینه امید ریاضی سود حاصل از فروش C واحد کالا در طول بازه فروش T و نیز قیمت بهینه ارائه کالا در ابتدای بازه فروش بدست می آید. با شروع فروش در ابتدای بازه زمانی T_n و رسیدن به انتهای بازه n ام و ابتدای بازه تصمیم گیری $n-1$ ام دارای موجودی c_{n-1} واحد خواهیم بود. با توجه به معادلات بازگشتی حل شده با استفاده از معادله زیر قیمت بهینه ارائه کالا در بازه مربوطه حاصل می شود:

$$V_{n-1}(c_{n-1}) = \underset{p_k}{Max}\{V_{n-1}(c_{n-1}, p_k)\} \qquad (۵)$$

۲-۲- مدل دوم: در نظر گرفتن حدی بر میزان فروش

در این بخش مدل جدیدی ارائه می نمائیم که درآن فروشنده امکان نگهداری کالای خود را برای فروش در دوره بعدی داشته باشد. در مدلهای پیوسته قیمت گذاری با تقاضای پواسان نامتجانس اثبات می شود که در حالت بهینه در هر لحظه از زمان فروش، حدی بر میزان فروش با توجه به قیمت بهینه ارائه شده وجود دارد. حال در نظر داریم در هر بازه تصمیم گیری میزان حداکثر کالای قابل فروش را جهت بیشینه نمودن سود قابل حصول بدست آوریم. تمامی مفروضات و قراردادهای مدل قبل در این مدل نیز معتبر است..

برای آخرین بازه فروش، یعنی دوره اول، روابط (۱) و (۲) همچنان معتبر هستند چرا که حد فروش در دوره انتهایی فروش برابر کل میزان موجودی در دست است (ارزش اسقاطی کالاهای باقیمانده در انتهای بازه فروش صفر در نظر گرفته شده است. حال دوره دلخواه i ام را درنظر می گیریم. برای این دوره خواهیم داشت:

$$V_i(c_i, p_k, b_i) = \sum_{j=0}^{c_i - b_i} \Pr\{X_i(p_k) = j\} \times (jp_k + V_{i-1}(c_i - j)) + \Pr\{X_i(p_k) > c_i - b_i\} \times$$
$$((c_i - b_i)p_k + V_{i-1}(b_i)) \qquad (۶)$$

دراین رابطه $V_i(c_i, p_k, b_i)$ بیانگر بیشینه امید ریاضی سود است به شرط این که موجودی در ابتدای دوره iام برابربا c_i واحد و قیمت ارائه p_k و حد رزرو برای دوره بعد b_iباشد. برای یافتن میزان سود بیشینه مورد انتظار رابطه زیر را داریم:

$$V_i(c_i) = \underset{p_k, b_i}{Max}\{V(c_i, p_k, b_i)\} \qquad (۷)$$

با انجام محاسبات ارائه شده در هر مرحله و با توجه به حرکت پسرو ، برای متغیر حالت در آخرین بازه، یعنی دوره n ام رابطه $c_n = C$ را خواهیم داشت. با حل معادلات ارائه شده در آخرین دوره میزان بیشینه سود مورد انتظار و نیز قیمت بهینه ارائه کالا در بازه n ام معین می گردد.

با شروع فروش کالا، در صورت رسیدن تقاضاهایی بیشتر از $C - b_n$، از فروش محصول خودداری می نمائیم و با b_n واحد کالا به مرحله قیمت گذاری $n-1$ ام وارد می شویم. در صورتیکه

تقاضای x_n در این دوره از $C-b_n$ کمتر باشد با موجودی اولیه $C-x_n$ وارد مرحله $n-1$ ام می شویم و با توجه به معادله:

$$V_{n-1}(c_{n-1}) = \underset{p_k, b_{n-1}}{Max}\{V(c_{n-1}, p_k, b_{n-1})\} \qquad (۸)$$

که در مرحله قبل حل شده است b_{n-1} و p_k در این بازه بدست داده می شوند.

۳- خصوصیات ساختاری

دراین بخش باارائه مثالی عددی به تشریح نتایج مدلهای بخش قبل می پردازیم. با توجه به پیچیدگی تابع هدف ارائه شده، دستیابی به خصوصیات ساختاری مربوط به مدلهای ارائه شده با استفاده از روشهای ریاضی، تا حدود زیادی مشکل می نماید. در نتیجه برای بررسی خواص مربوطه از تعدادی مثال عددی استفاده گردیده است. توزیع پواسان ناهمگن با پارامتر $\lambda(t)$ و توزیع قیمت رزرو نیز در طول هر بازه ثابت فرض می شود. با توجه به مثالهای برسی شده می توان خصوصیات ساختاری را در مورد سیاستهای بهینه قیمت گذاری ارائه نمود.

مثال: فروشنده ای قصد دارد 20 واحد موجودی کالایی را در افق زمانی 30 روز به فروش برساند. توزیع مشتریان خواستار این کالا پواسان ناهمگن با نرخ $\lambda_t = (30-t)/15$ است. از سوی دیگر، زمانهای بازنگری نیز مشخص بوده و این امر در ابتدای روز اول، دوم، چهارم، هشتم، سیزدهم و بیستم صورت می گیرد. تعیین قیمت از مجموعه $P = \{5,10,12,14,17,20,24,29\}$ انجام می گردد. قیمت رزرو مشتریان نیز دارای توزیعی یکنواخت در بازه $[0,30]$ است. به عبارت دیگر، احتمال اینکه هر مشتری کالای مربوطه را که با قیمت p ارائه شده، خریداری نماید برابر $(1-p/30)$ خواهد بود.

۳-۱- خصوصیات ساختاری مشترک در هر دو مدل

در مورد خصوصیات ساختاری مشترک در هر دو مدل موارد زیر مشاهده می شود:

۳-۱-۱- تقعر تابع هدف

شاید بتوان مهمترین خاصیت حاکم بر تابع هدف ارائه شده را مقعر بودن آن دانست چرا که با داشتن چنین خاصیتی می توان بسیاری از سایر خواص مشاهده شده را اثبات نمود ولی متاسفانه بدلیل پیچیدگی تابع هدف اثبات این خاصیت کاری دشوار می نماید که تنها می توان در برخی حالات خاص آنرا اثبات نمود. این خاصیت را می توان به صورت رابطه زیر نشان داد:

$$V_t(c+1) - V_t(c) \le V_t(c) - V_t(c-1)$$

در مثالهای حل شده رابطه بالا در تمامی مثالها برقرار می باشد ولیکن اثبات آن در حالت کلی دشوار می باشد. در جدول(۱) می توان صحت این رابطه را در مورد مثال ارائه شده ملاحظه نمود. خاصیت مربوط به مقعر بودن تابع هدف نه تنها خود امری جالب توجه می باشد بلکه برقرار بودن آن، اساس و پایه برقراری سایر روابط مشاهده شده می باشد به گونه ای که با فرض مقعر

بودن تابع هدف می توان بسیاری از خواص بهینگی مشاهده شده را اثبات نمود. از سوی دیگر از این خاصیت می توان برای بدست آوردن مقدار بهینه موجودی اولیه در صورتیکه میزان هزینه تولید و یا تهیه کالاهای مربوطه خطی و یا محدب باشد نیز استفاده نمود. با توجه به مثالهای بررسی شده فرض مقعر بودن تابع هدف فرضی قابل قبول می باشد. تقعر تابع هدف در حالتیکه قیمت گذاری ما به صورت پیوسته صورت پذیرد، بدون نیاز به حاکم بودن توزیعی خاص بر ورود مشتریان، در مقاله ژائو و ژنگ(۲۰۰۰) اثبات گردیده است.

در ادامه با توجه به برقراری این فرض در دو مدل ارائه شده به اثبات برخی از نتایج مشاهده شده با توجه به برقراری فرض تقعر تابع هدف پرداخته می شود.

۳-۱-۲- یکنواختی موجودی

رابطه دیگری که با توجه به مثالهای مربوطه در مورد هر دو مدل ارائه شده قابل استنباط می باشد خاصیت یکنواختی موجودی می باشد که می توان آنرا به صورت زیر تعریف نمود:

« در یک دوره قیمت گذاری معین، با افزایش تعداد موجودی در دست، قیمت بهینه ارائه کالا کاهش می یابد.»

هر چند که این رابطه نیز برای مثالهای بررسی شده برقرار می باشد اما اثبات آن در حالت کلی کاری دشوار می باشد به همین دلیلی در ادامه یک شرط کافی برای برقراری این رابطه، با فرض مقعر بودن تابع هدف ارائه شده است.

قضیه I: در هر دوره فروش اگر بتوان از احتمال فروش تمامی کالاهای قابل عرضه در آن دوره صرفنظر نمود، با فرض تقعر تابع هدف، خاصیت یکنواختی موجودی برقرار می باشد.

اثبات:

فرض می نمائیم که رابطه ارائه شده برقرار نمی باشد در نتیجه در صورتیکه برای $p_1 < p_2$ رابطه:

$$V_i(c_i, p_1) \geq V_i(c_i, p_2)$$

برقرار باشد آنگاه با توجه به فرض خلف ممکن است که رابطه زیر برقرار باشد:

$$V_i(c_i + 1, p_1) < V(c_i + 1, p_2)$$

حال نشان داده می شود که این رابطه با توجه به فرض قضیه هرگز برقرار نمی باشد. با توجه به روابط ارائه شده بایستی رابطه زیر نیز برقرار باشد:

$$V_i(c_i, p_1) + V_i(c_i + 1, p_2) > V_i(c_i, p_2) + V_i(c_i + 1, p_1)$$

در صورت ارائه کالا با قیمتهای مشخص شده و فرض انجام شده در مورد فروش کمتر از میزان قابل عرضه در ابتدای بازه بعد خواهیم داشت:

$$V_{i-1}(c'_{i-1}, p_1) + V_i(c''_{i-1} + 1, p_2) > V_i(c''_{i-1}, p_2) + V_i(c'_{i-1} + 1, p_1)$$

که در رابطه ارائه شده c'_{i-1} و c''_{i-1} به ترتیب نشان دهنده موجودی باقیمانده در ابتدای بازه فروش $i - 1$ با قیمتهای عرضه p_1 و p_2 می باشند. از سوی دیگر داریم:

$$c'_{i-1} \leq c'_{i-1}$$

چرا که:

جدول۱- مقادیر تابع هدف در دو مدل ارائه شده

دوره / موجودی	مدل اول 1	مدل اول 2	مدل اول 3	مدل اول 4	مدل اول 5	مدل اول 6	مدل دوم 1	مدل دوم 2	مدل دوم 3	مدل دوم 4	مدل دوم 5	مدل دوم 6
1	14.8	21.6	23.4	24.5	25.0	25.3	14.8	21.6	23.4	24.5	25.0	25.3
2	22.9	38.3	44.7	46.9	47.8	48.2	22.9	38.3	44.7	46.9	47.7	48.1
3	27.2	51.1	62.7	68.3	69.9	70.6	27.2	51.1	62.7	68.3	69.9	70.6
4	29.0	61.3	77.3	87.0	90.3	91.6	29.0	61.3	77.3	87.0	90.3	91.6
5	29.7	67.8	90.0	103.0	108.2	110.4	29.7	67.8	89.8	102.9	108.2	110.4
6	30.0	73.2	100.9	116.6	123.7	126.8	30.0	73.2	100.8	116.5	123.6	126.8
7	30.1	76.5	109.2	129.5	137.5	141.4	30.1	76.5	109.2	129.4	137.4	141.3
8	30.1	78.3	115.4	140.6	150.4	154.8	30.1	78.3	115.3	140.5	150.4	154.8
9	30.1	79.2	120.9	149.7	161.8	167.1	30.1	79.2	120.9	149.6	161.7	167.1
10	30.1	79.9	124.7	156.9	171.3	177.8	30.1	79.9	124.7	156.9	171.3	177.8
11	30.1	80.3	127.2	163.1	179.3	186.8	30.1	80.3	127.2	163.1	179.3	186.8
12	30.1	80.5	128.8	168.4	186.0	194.4	30.1	80.5	128.8	168.4	185.9	194.4
13	30.1	80.6	129.7	172.3	191.9	201.0	30.1	80.6	129.7	172.3	191.8	201.0
14	30.1	80.6	130.5	175.1	196.6	206.6	30.1	80.6	130.5	175.1	196.5	206.6
15	30.1	80.6	131.0	177.0	200.1	211.2	30.1	80.6	131.0	177.0	200.1	211.2
16	30.1	80.6	131.3	178.4	202.8	214.7	30.1	80.6	131.3	178.4	202.8	214.6
17	30.1	80.6	131.5	179.3	204.6	217.2	30.1	80.6	131.5	179.3	204.6	217.2
18	30.1	80.6	131.6	180.1	205.9	219.1	30.1	80.6	131.6	180.1	205.9	219.1
19	30.1	80.6	131.6	180.6	206.9	220.4	30.1	80.6	131.6	180.6	206.9	220.4
20	30.1	80.6	131.6	180.9	207.7	221.4	30.1	80.6	131.6	180.9	207.7	221.4

$$\overline{F}(p_1) > \overline{F}(p_2)$$

و در نتیجه:

$$\Delta V_{i-1}(c''_{i-1}+1) > \Delta V_{i-1}(c'_{i-1}+1)$$

که این رابطه با توجه به فرض تقعر تابع هدف هیچگاه برقرار نمی باشد. بنابراین فرض خلف نادرست می باشد و قضیه اثبات می گردد. صدق این رابطه را در مورد مثال مربوطه را می توان در جدول(۲) ملاحظه نمود.

۴-۱-۳- سایر روابط

رابطه زیر را می توان در مورد مقادیر تابع هدف دو مدل ارائه شده در دو دوره متوالی مشاهده نمود:

$$V_i(c) - V_i(c-1) \geq V_{i-1}(c) - V_{i-1}(c-1)$$

قضیهII: با فرض تقعر تابع هدف در مدل دوم خواهیم داشت:

$$V_i(c) - V_i(c-1) \geq V_{i-1}(c) - V_{i-1}(c-1)$$

اثبات: این رابطه معادل با نامعادله زیر می باشد:

$$V_i(c)+V_{i-1}(c-1)\geq V_{i-1}(c)+V_i(c-1)$$

حال با استفاده از فرض خلف خواهیم داشت:

$$V_i(c)+V_{i-1}(c-1)< V_{i-1}(c)+V_i(c-1)$$

حال نشان داده می شود که به ازای یک سیاست بهینه در سمت راست می توان سیاستی هر چند غیر بهینه در سمت چپ نامعادله ارائه نمود که حداقل سودی برابر با سمت راست نامعادله ایجاد نماید. در این راستا قیمت ارائه کالا در مورد $V_i(c)$ برابر با قیمت بهینه ارائه کالای $V_{i-1}(c-1)$ قرار داده می شود و میزان حد رزرو برای دوره بعد برای $V_i(c)$ یکواحد بیشتر از $V_i(c-1)$ قرار داده می شود. در این صورت میزان فروش در دوره i ام در هر دو طرف نامعادله یکسان می باشد و در $i-1$ دوره باقیمانده بایستی داشته باشیم:

$$V_{i-1}(c')+V_{i-1}(c-1)< V_{i-1}(c)+V_{i-1}(c'-1)$$

که در این رابطه $c'\leq c$ خواهد بود. این رابطه را می توان به صورت زیر نشان داد:

$$\Delta V_{i-1}(c')<\Delta V_{i-1}(c)$$

و این نامعادله به هیچ وجه نمی تواند با توجه به تقعر تابع هدف برقرار باشد. در نتیجه فرض خلف رد و قضیه به اثبات می رسد.

برقراری رابطه بالا را می توان با استفاده از داده های جدول(۳) که در مورد مثال عددی مطرح شده، ارائه گردیده است ملاحظه نمود. در واقع مفهوم حاصل از رابطه بالا را می توان به این صورت بیان نمود که با در دست داشتن زمان بیشتری تا پایان بازه فروش می توان به طور متوسط سود بیشتری را از در دست داشتن یک واحد بیشتر موجودی بدست آورد که از لحاظ منطقی نیز نتیجه ای محسوس محسوب می گردد.

۴-۲- خصوصیات مدل دوم

علاوه بر روابط ارائه شده در بند قبل می توان روابط زیر را در مورد حد رزرو در مدل دوم مشاهده نمود.

۴-۲-۱-مقدار بهینه حد رزرو

در این مدل رابطه زیر در مورد مقادیر بهینه b یعنی میزان حد رزرو بهینه در دوره $i-1$ در حالیکه در دوره i ام محصول با قیمت p ارائه می شود، برقرار می باشد:

$$V_{i-1}(b+1)-V_{i-1}(b)\leq p\leq V_{i-1}(b)-V_{i-1}(b-1)$$

صورت مقعر بودن تابع هدف در مدل دوم می توان رابطه ارائه شده در مورد مقدار b را به سادگی اثبات نمود.

قضیه III:

در صورت مقعر بودن تابع هدف برای میزان بهینه حد رزرو دوره بعد b خواهیم داشت:

$$V_{i-1}(b+1)-V_{i-1}(b)\le p\le V_{i-1}(b)-V_{i-1}(b-1)$$

جدول۲- قیمتهای بهینه ارائه کالا در هر دوره با توجه به میزان موجودی در دست در ابتدای هر دوره

دوره \ موجودی	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	20	17	17	17	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
2	24	24	20	20	20	17	17	17	17	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14
3	24	24	24	24	20	20	20	17	17	17	17	17	17	14	14	14	14	14	14	14
4	29	24	24	24	24	24	20	20	20	20	17	17	17	17	17	17	17	14	14	14
5	29	24	24	24	24	24	24	20	20	20	20	17	17	17	17	17	17	17	17	14
6	29	24	24	24	24	24	24	20	20	20	20	20	17	17	17	17	17	17	17	17

اثبات:

با فرض اینکه تابع هدف مقعر می باشد، رابطه بالا به ازای یک و یا چند مقدار متوالی از b برقرار می باشد. در صورتیکه به ازای چند مقدار متوالی از b رابطه بالا برقرار باشد بزرگترین این مقادیر را به عنوان b در نظر می گیریم. حال فرض می شود که میزان حد رزرو بهینه مقداری غیر از b ای باشد که در رابطه بالا صدق می نماید و این مقدار را با b' نشان می دهیم. در نتیجه دو حالت زیر برای b' متصور می باشد:

۱- درصورتیکه $b'<b$:

با توجه به تقعر تابع هدف و رابطه فرض برای b' خواهیم داشت:

$$V_{i-1}(b'+1)-V_{i-1}(b')\ge p$$

حال فروش کالای $c-b'$ را در نظر گرفته می شود. در صورت فروش این کالا به میزان $p+V_{i-1}(b')$ به میزان سود حاصل از فروش $c-b'-1$ کالای قبلی افزوده می گردد در حالیکه اگر این کالا برای فروش در دوره بعد نگهداری شود به میزان $V_{i-1}(b'+1)$ به سود حاصل از فروش $c-b'-1$ کالای قبلی افزوده می گردد که با توجه به رابطه بالا این میزان کمتر و یا مساوی با $p+V_{i-1}(b')$ خواهد بود. بنابراین می توان ادعا نمود که حداقل یک واحد بایستی به b' افزوده گردد و در نتیجه $b'\ge b$.

۲- در صورتیکه $b'>b$:

در این حالت نیز در دوره i ام می توان حداکثر $c-b'$ واحد از موجودی را به فروش رساند و با توجه به تقعر تابع هدف خواهیم داشت:

$$V_{i-1}(b')-V_{i-1}(b'-1)\le p$$

حال فروش کالای $c-b'+1$ را در نظر گرفته می شود. در صورت فروش این کالا به میزان $p+V_{i-1}(b'-1)$ به میزان سود حاصل از فروش $c-b'$ کالای قبلی افزوده می گردد در حالیکه اگر این کالا برای فروش در دوره بعد نگهداری شود به میزان $V_{i-1}(b')$ به سود حاصل از فروش $c-b'$

کالای قبلی افزوده می گردد که با توجه به رابطه بالا این میزان کمتر و یا مساوی با $p+V_{i-1}(b'-1)$ خواهد بود. بنابراین می توان ادعا نمود که حداقل یک واحد بایستی از b' کسر گردد و در نتیجه $b' \leq b$.

در نتیجه با توجه به حالتهای ۱و۲ بایستی $b' = b$.

نکته بسیار مهمی که از قضیه بالا بر می آید این نکته می باشد که با توجه به رابطه ارائه شده یک بعد از بهینه سازی مدل دوم کاسته می شود چرا که می توان مقدار b در هر دوره را باتوجه به قیمت مورد بررسی و نیز مقادیر امید ریاضی سود در دوره قبل به راحتی محاسبه نمود و بنابراین تنها نیاز به بررسی متغیر تصمیم قیمت در هر دوره می باشد و در نتیجه میزان محاسبات لازم در مدل دوم تقریبا برابر با مدل اول می باشد. درستی مطالب ارائه شده در مورد میزان حد رزرو دوره بعد را می توان با استفاده از جداول(۳) و (۴) بررسی نمود.

۴-۲-۲-سایر روابط

روابط دیگری که می توان بر اساس مثالهای ارائه شده در مورد میزان حد رزرو دوره بعد یعنی مقدار b به آن دست یافت، به صورت زیر قابل ارائه می باشند:

«در یک دوره معین قیمت گذاری با افزایش میزان موجودی، میزان حد رزرو دوره بعد غیر نزولی خواهد بود.» و نیز،

«در یک موجودی معین با کم شدن مدت زمان باقیمانده تا انتهای بازه فروش در صورتیکه قیمت بهینه ثابت بماند و یا افزایش یابد، میزان حد رزرو آن دوره غیر صعودی خواهد بود.»

روابط بالا را می توان در صورت برقراری فرضهای مربوط به تقعر تابع هدف و یکنواختی موجودی اثبات نمود. در جدول (۴) می توان چگونگی صدق روابط بالا را در مورد مثال عددی ارائه شده ملاحظه نمود.

۴- رابطه جوابهای بهینه در مدلهای ارائه شده

در مورد دو مدل ارائه شده و رابطه بیشینه امید ریاضی سود قابل حصول از آنها می توان رابطه زیر را بیان داشت:

« امید ریاضی سود در مدل اول کمتر از مدل دوم و امید ریاضی هردو مدل ارائه شده نیز کمتر از مدل قیمت گذاری پویای پیوسته می باشد.»

درستی رابطه بالا را به راحتی می توان نشان داد. در مدل دوم در صورتیکه حد رزرو را در هر مرحله برابر با صفر قرار دهیم امید ریاضی سود حاصل از مدل دوم برابر با امید ریاضی حاصل از مدل اول می شود در نتیجه از مدل دوم می توان سودی حداقل برابر با مدل اول بدست آورد. از سوی دیگر هر سیاست قیمت گذاری در مدل دوم می تواند سیاستی در قیمت گذاری پویای پیوسته باشد در نتیجه بیشینه امید ریاضی سود حاصل از این مدل حداقل برابر با سود حاصل از مدل دوم می باشد. در نتیجه می توان ادعا نمود که رابطه بالا بین مقادیر بیشینه امید ریاضی سود

حاصل از مدلهای ارائه شده و مدل قیمت گذاری پویای پیوسته به عنوان یک مدل بنچ مارک مناسب، برقرار می باشد.

جدول۳- هزینه های فرصت در هر دوره در مدل دوم

6	5	4	3	2	1	دوره / هزینه فرصت
25.287	25.036	24.51	23.393	21.619	14.786	ΔV_1
22.884	22.719	22.406	21.303	16.675	8.118	ΔV_2
22.428	22.173	21.337	18.035	12.841	4.342	ΔV_3
20.984	20.348	18.726	14.583	10.167	1.708	ΔV_4
18.834	17.936	15.995	12.636	6.509	0.72	ΔV_5
16.422	15.458	13.629	10.912	5.414	0.317	ΔV_6
14.513	13.809	12.879	8.312	3.304	0.093	ΔV_7
13.478	12.95	11.106	6.208	1.8	0.024	ΔV_8
12.305	11.359	9.069	5.515	0.905	0.006	ΔV_9
10.682	9.559	7.279	3.802	0.69	0.001	ΔV_{10}
9.026	7.947	6.208	2.495	0.405	0	ΔV_{11}
7.576	6.681	5.255	1.575	0.183	0	ΔV_{12}
6.582	5.892	3.911	0.965	0.078	0	ΔV_{13}
5.638	4.694	2.795	0.761	0.031	0	ΔV_{14}
4.531	3.578	1.939	0.532	0.012	0	ΔV_{15}
3.481	2.618	1.324	0.305	0.004	0	ΔV_{16}
2.572	1.856	0.895	0.166	0.002	0	ΔV_{17}
1.857	1.325	0.791	0.086	0	0	ΔV_{18}
1.339	0.967	0.545	0.042	0	0	ΔV_{19}
1.01	0.796	0.349	0.02	0	0	ΔV_{20}

۴-۱- جوابهای بهینه دو مدل نسبت به هم

در ابتدا به بررسی امید ریاضی بیشینه سود حاصل از این دو مدل نسبت به هم پرداخته می شود. با توجه به بررسی های انجام شده با کمک مثالهای عددی حل شده توسط هر کدام از دو مدل، همانطور که در بالا نیز به آن اشاره شد، سود حاصل از مدل دوم، یعنی فروش با در نظر گرفتن حد رزرو برای دوره بعد، بیشتر از سود حاصل از مدل اول می باشد اما نکته جالب توجه این مطلب می باشد که درصد افزایش امید ریاضی سود حاصل از به کارگیری مدل دوم نسبت به مدل اول مقدار کمی می باشد به گونه ای که این درصد در مورد مثال ارائه شده حد اکثر به ۰,۱ درصد می رسد.

البته در برخی از صنایع که دارای حاشیه سود کمی می باشند(همانند خطوط هوایی) این مقدار نیز می تواند مقدار قابل توجهی محسوب گردد. البته از طرف دیگر در مدل دوم بایستی یک کنترل

جدول۴- حدود رزرو در هر بازه به ازای هر مقدار از موجودی در مدل دوم

دوره / موجودی	2	3	4	5	6
1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	1	1
3	0	0	0	1	1
4	0	0	0	1	1
5	0	1	0	1	1
6	0	1	0	1	1
7	0	1	2	1	1
8	0	1	2	3	4
9	0	1	2	3	4
10	1	1	2	3	4
11	1	1	3	3	4
12	1	1	3	4	4
13	1	1	3	4	5
14	1	2	3	4	5
15	1	2	3	4	5
16	1	2	3	4	5
17	1	2	3	4	5
18	1	2	4	4	5
19	1	2	4	4	5
20	1	2	4	5	5

بیشتر(کنترل تعداد قابل عرضه در هر دوره) نسبت بـه مـدل اول اعمـال شـود. جـدول(۵) نشان دهنده درصد اختلاف جواب بهینه حاصل از مدل دوم نسبت به مدل اول در مورد مثـال ارائـه شده می باشد.

۴-۲- جوابهای بهینه دو مدل نسبت به مدل قیمت گذاری پویای پیوسته

با توجه به مثالهای بررسی شده می توان انتظار داشت که در بیشتر موارد با در نظر گـرفتن پـنج تـا ده بار بازنگری در قیمتها درصد سودی را که فروشنده با به کار بردن این دو مدل نـسبت بـه مـدل قیمت گذاری پویای پیوسته از دست می دهد، حداکثر به یک درصد برسد. به عنوان نمونه در مثـال ارائه شده با در نظر گرفتن شش بار بازنگری در قیمتها می توان حداکثر سـود از دسـت رفتـه را بـه یک درصد امید ریاضی سود قابل حصول رساند. این مطلب در جدول(۶) نشان داده شده است.

نکته دیگری که در اینجا می توان به آن اشاره نمود چگونگی انتخاب زمانهای بازنگری

جدول۵- درصد اختلاف جوابهای بهینه در مدل اول نسبت به مدل دوم

دوره \ موجودی	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
1	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
2	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
3	0.00%	0.00%	0.05%	0.04%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
4	0.00%	0.00%	0.05%	0.05%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%	0.00%
5	0.08%	0.00%	0.03%	0.05%	0.03%	0.02%	0.01%	0.00%	0.00%	0.00%
6	0.09%	0.01%	0.03%	0.05%	0.03%	0.02%	0.01%	0.01%	0.00%	0.00%

جدول۶- درصد اختلاف جوابهای بهینه در مدل دوم نسبت به مدل قیمت گذاری پویای پیوسته

موجودی ابتدای دوره	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
متوسط سود در مدل قیمت گذاری پویای پیوسته	48.17	91.58	126.84	154.83	177.82	194.42	206.64	214.65	219.08	221.43
متوسط سود در مدل قیمت گذاری دوم	48.53	91.98	127.85	156.36	179.24	195.9	207.81	215.4	219.6	221.84
تفاضل	0.356	0.401	1.012	1.531	1.426	1.485	1.172	0.745	0.515	0.409
درصد تفاضل	0.73%	0.44%	0.79%	0.98%	0.80%	0.76%	0.56%	0.35%	0.23%	0.18%

جدول۷- درصد بهبود جواب بهینه در مدل دوم با بکار بردن بازه هایی با متوسط ۵ مشتری

موجودی اولیه	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
امید ریاضی سود	48.184	91.625	126.96	154.87	178.02	194.64	206.81	214.77	219.16	221.46
تفاضل با مثال حل شده با مدل دوم	0.01	0.04	0.13	0.05	0.21	0.23	0.17	0.12	0.09	0.04
درصد تفاضل با مثال حل شده با مدل دوم	0.03%	0.05%	0.10%	0.03%	0.12%	0.12%	0.08%	0.06%	0.04%	0.02%

قیمتها می باشد. در برخی از موارد فروشندگان از قبل زمانهای تغییر قیمتها را معین می نمایند به طور مثال در برخی از فروشگاهها قیمتها پس از سپری شدن نیمی از بازه فروش مورد بازنگری قرار می گیرند. برخی از فروشندگان نیز علاقه دارند که بازنگری در قیمتها را در ابتدای هر روز، هفته و یا ماه انجام دهند. از سوی دیگر برخی از فروشندگان تنها تعداد بازنگری را معین می نمایند. در این حالت چگونگی انتخاب زمانهای بازنگری می تواند در میزان سود مورد انتظار مثر باشد. با توجه به بررسی های انجام شده اگر بازه های بررسی به گونه ای باشند که در هر کدام از این بازه ها متوسط مشتریان وارد شونده برای دریافت کالا برابر باشد می توان انظار داشت که متوسط سود بیشتری حاصل گردد. این امر را می توان در جدول(۷) در مورد مثال ارائه شده هنگامیکه در هر بازه بازنگری به طور متوسط ۵ مشتری برای خرید کالا مراجعه می نماید، ملاحظه نمود. بیشترین مقدار بهبود جواب بهینه در حدود ۰,۱۲ درصد می باشد که با توجه با حداکثر اختلاف ۱ درصدی جواب بهینه در مدل دوم با مدل قیمت گذاری پیوسته پویا درصد قابل توجهی می باشد.

حال در انتهای مطالب ارائه شده قصد داریم تا با استفاده از قضیه ای که ارائه می شود تعدادی از قیمتهایی که به هیچ وجه نمی توانند به عنوان قیمت بهینه انتخاب گردند را شناسایی و با حذف آنها از مجموعه قیمتهای ارائه کالا، حجم محاسبات لازم برای تعیین سیاست بهینه قیمت گذاری را کاهش دهیم. در این راستا بایستی ابتدا لم زیر اثبات گردد.

لم I:

در قیمت گذاری پویا در صورتیکه فرآیند حاکم بر رسیدن مشتریان پواسان باشد به گونه ای که توزیع تعداد مشتریانی که برای خرید کالا مراجعه می نمایند، توزیع پواسان نامتجانس باشد و قیمت رزرو هر مشتری نیز در لحظه t برابر $F_t(p)$ باشد آنگاه قیمت p_1 در صورتیکه به ازای آن قیمت p_2 ای یافت شود که در شرایط زیر صدق نماید هرگز به عنوان قیمت بهینه در لحظه t انتخاب نمی شود.

الف: $p_1 \le p_2$

ب: $p_1(1-F_t(p_1)) \le p_2(1-F_t(p_2))$

اثبات:

توابع هدف به ازای دو قیمت ارائه شده در نظر گرفته می شود:

$$V_t(c,p_1)=\lambda_t(1-F_t(p_1))\times(p_1+V_{t-1}(c-1))+(1-\lambda_t(1-F_t(p_1))\times V_{t-1}(c)$$
$$V_t(c,p_2)=\lambda_t(1-F_t(p_2))\times(p_2+V_{t-1}(c-1))+(1-\lambda_t(1-F_t(p_2))\times V_{t-1}(c)$$

تفاضل این دو تابع هدف به صورت زیر

$$\Delta=V_t(c,p_2)-V_t(c,p_1)=$$
$$\lambda_t V_{t-1}(c-1)(F_t(p_1)-F_t(p_2))+\lambda_t V_{t-1}(c)(F_t(p_2)-F_t(p_1))+$$
$$\lambda_t(p_2(1-F_t(p_2))-p_1(1-F_t(p_1))$$

می باشد، با توجه به خواص تابع قیمت رزرو:

$$F_t(p_2)\ge F_t(p_1)$$

از سوی دیگر:

$$V_t(c)\ge V_t(c-1)$$

در نتیجه مجموع جملات اول و دوم در رابطه بالا مثبت می گردد و با توجه به فرض (ب) نیز می توان مثبت بودن جمله سوم را در رابطه بالا اثبات نمود. در نتیجه Δ همیشه مثبت می باشد، بنابر این:

$$V_t(c,p_2)\ge V(c,p_1)$$

درنتیجه p_1 هیچگاه به عنوان قیمت بهینه انتخاب نمی گردد.
حال می توان در مورد مدل اول نتیجه زیر بیان نمود:

نتیجه I :

در مدل قیمت گذاری دوره ای بدون حد رزرو در صورتیکه تابع توزیع قیمت رزرو $F_t(p)$ در طول هر بازه بازبینی ثابت باشد و برای دو قیمت p_1 و p_2 و نیز فرآیند ورود مشتریان شرایط ارائه شده در لم I برقرار باشد آنگاه قیمت p_1 نمی تواند هیچگاه به عنوان قیمت بهینه انتخاب گردد.

اثبات:

بازه i ام قیمت گذاری در نظر گرفته می شود. این بازه را به n بازه کوچک به گونه ای تقسیم می نمائیم که در هر بازه تنها احتمال ورود یک و یا صفر مشتری وجود داشته باشد. حال دوره قیمت گذاری i ام نشان دهنده آخرین بازه از این گونه بازه های کوچک قیمت گذاری و دوره قیمت گذاری $i+n-1$ نیز نشان دهنده اولین دوره قیمت گذاری از این بازه های کوچک می باشد. حال در دوره i ام :

$$V_i(c,p_1)=\lambda_i(1-F_i(p_1))\times(p_1+V_{i-1}(c-1))+(1-\lambda_i(1-F_i(p_1))\times V_{i-1}(c)$$
$$V_i(c,p_2)=\lambda_i(1-F_i(p_2))\times(p_2+V_{i-1}(c-1))+(1-\lambda_i(1-F_i(p_2))\times V_{i-1}(c)$$

که در این روابط با توجه به لم I ارائه شده، قیمت p_1 نمی تواند در این بازه قیمت بهینه باشد و خواهیم داشت:

$V_i(c, p_1) \le V_i(c, p_2)$

حال فرض می نمائیم که برای دوره های قیمت گذاری i تا $i+k-1$ نیز رابطه بالا برقرار باشد. حال برای دوره $k+i$ ام :

$$V_{i+k}(c, p_1) = \lambda_{i+k}(1-F_i(p_1))\times(p_1 + V_{i+k-1}(c-1, p_1)) + (1-\lambda_{i+k}(1-F_i(p_1))\times V_{i+k-1}(c, p_1)$$
$$V_{i+k}(c, p_2) = \lambda_{i+k}(1-F_i(p_2))\times(p_2 + V_{i+k-1}(c-1, p_2)) + (1-\lambda_{i+k}(1-F_i(p_2))\times V_{i+k-1}(c, p_2)$$

حال با توجه به روابط زیر که با توجه به فرض استقرا بر قرار می باشند:

$V_{i+k-1}(c, p_1) \le V_{i+k-1}(c, p_2)$

$V_{i+k-1}(c-1, p_1) \le V_{i+k-1}(c-1, p_2)$

حال با توجه به روابط بالا رابطه زیر برقرار می باشد:

$$V_{i+k}(c, p_1) \le \lambda_{i+k}(1-F_i(p_1))\times(p_1 + V_{i+k-1}(c-1, p_2)) + (1-\lambda_{i+k}(1-F_i(p_1))\times V_{i+k-1}(c, p_2)$$

در نتیجه:

$\Delta = V_{i+k}(c, p_2) - V_{i+k}(c, p_1) \ge$
$\lambda_{i+k}V_{i+k-1}(c-1, p_2)(F_i(p_1) - F_i(p_2)) + \lambda_{i+k}V_{i+k-1}(c, p_2)(F_i(p_2) - F_i(p_1)) +$
$\lambda_{i+k}(p_2(1-F_i(p_2)) - p_1(1-F_i(p_1))$

که با توجه به لم ارائه شده Δ مقداری غیر منفی خواهد داشت بنابراین می توان ادعا نمود که در طول بازه i ام در صورتیکه فروش با قیمت p_1 صورت گیرد سود حاصله به طور متوسط بیشتر از حالتی است که کالا با قیمت p_2 عرضه گردد.

۵-نتیجه گیری

در دو مدلی که ارائه گردید قیمت گذاری های دوره ای با در دست داشتن مجموعه قیمتهای از قبل تعیین شده صورت پذیرفت. در مدل اول حدی بر میزان فروش در هر دوره در نظر گرفته شده بود اما در مدل دوم فروش در هر دوره تا اتمام موجودی می توانست ادامه یابد. با توجه به بررسی های عددی صورت گرفته تفاوت امید ریاضی دو مدل ارائه شده ناچیز می باشد. نکته جالب توجه در مورد مدل اول این مطلب است که برای کنترل فروش در مورد مثال ارائه شده تنها داشتن جدول(۲) کافی است و بنابراین فرآیند فروش به سادگی کنترل خواهد شد. در مورد مدل دوم علاوه بر جدول(۲) نیاز به داشتن جدول(۴) نیز می باشد چرا که بایستی تعداد کالای قابل عرضه در هر بازه نیز برای رسیدن به سود بهینه کنترل گردد. همانطور که در مثال ارائه شده نیز مشاهده می شود درصد بهبود جواب بهینه مدل دوم نسبت به مدل اول در بالاترین مقدار خود به ۰,۱ درصد می رسد که رقمی ناچیز محسوب می شود، بنابراین فروشنده می تواند بنا به سیاستهای خود از مدل اول که نیاز به کنترل کمتری دارد و یا از مدل دوم استفاده نماید.

زمینه های توسعه در مطالب ارائه شده در این مقاله را می توان به صورت زیر بیان نمود:

۱- در نظر گرفتن فرآیند یادگیری و به روز رسانی نرخ ورود مشتریان و نیز تابع توزیع قیمت رزرو با توجه به رفتار مشاهده شده از مشتریان.
۲- در نظر گرفتن امکان لغو خرید صورت گرفته.
۳- در نظر گرفتن هزینه های تغییر قیمت در مدلهای ارائه شده.
۴- بررسی امکان تجدید موجودی در طول بازه فروش.
۵- تحقیق در مورد تقعر سایر توابع توزیع تعداد مشتریان و بسط خصوصیات بهینگی ارائه شده در این مدل.

در انتها یادآوری این مطلب ضروری می نماید که مسئله رقابت مابین فروشندگان یک کالا در مدلهای ارائه شده مد نظر قرار نگرفته است و وارد نمودن این موضوع در مدلهای ارائه شده می تواند بسیار مفید باشد.

منابع و مراجع:

Bitran,G.,S.Monschein. 1997. Periodic pricing of seasonal product in retailing. Management Sci.43 427-443.
Zhao,w.,Y.S.Zheng. 2000. Optimal dynamic pricing for perishable assets with nonhomogeneous demand. Management Sci.46 375-388.
Gallego,G.,G.Van Ryzin. 1994. Optimal dynamic pricing of inventories with stochastic demand over finite horizons. Management Sci. 40 999-1020
Lazear,E.P. 1986. Retail pricing and clearance sales. Amer.Econom.Rev.76 14-32.
Kincade,W.M.,D.A.Darling. 1963. An inventory pricing problem. J.Math. Anal.Appl.7 183-208
Bitran,G.,R.Caldentey,S.Mondschein. 1998. Coordinating clearance markdown sales of seasonal products in the retail chains. Oper.Res.46 609-624.
Feng,Y.,G. Gallego. 1995. Optimal starting times for end of season sales and optimal stopping times for promotional fares. Management Sci.41 1371-1391