# حل مدل BCC فازی در مدل تحلیل پوششی داده‌ها

**احمد کوچک‌زاده**
دانشجوی دکتری دانشگاه تربیت مدرس
Kochaka@modares.ac.ir
**صابر ساعتی**
عضو هیات علمی دانشگاه آزاد واحد شمال تهران
ssaatim@yahoo.com

**واژه‌های کلیدی**
تحلیل پوششی داده‌ها(**DEA**)، مجموعه‌های فازی، برنامه‌ریزی خطی فازی

## چکیده

تحلیل پوششی داده ها، یک چارچوب تئوریک را برای تحلیل عملکرد و اندازه‌گیری کارایی، فراهم می‌آورد. مدل مذکور شامل مجموعه‌ای از تکنیک‌های برنامه‌ریزی خطی است که مرز کارا را با استفاده از داده‌های مشاهده شده بنا می‌کند و آنگاه به ارزیابی و اندازه گیری کارایی واحد تصمیم ساز می‌پردازد. مدل تحلیل پوششی داده‌ها برخلاف بسیاری از مدل‌های مرسوم در نظریه اقتصاد خرد، در اندازه‌گیری کارایی می‌تواند شامل چندین ورودی و چندین خروجی باشد. مضافاً اینکه به اطلاعات مربوط به قیمت کالاها و خدمات نیازی ندارد. در این خصوص فرضیه نهفته در مدل اصلی اینست که داده‌های مساله، شامل مقادیر قطعی است و این درحالی است که این فرض در بسیاری موارد مخدوش است و داده‌ها فازی و غیر دقیق هستند.

در این مقاله نسخه فازی BCC از مدل تحلیل پوششی داده‌ها با اعداد مثلثی به همراه روش حل آن ارائه خواهد شد. ایده اصلی بر مبنای تبدیل مدل فازی BCC به مساله برنامه‌ریزی خطی قطعی با بهره‌گیری از روش برش آلفا قرار دارد. در این رهگذر، مساله به یک برنامه ریزی فاصله‌ای تبدیل خواهد شد. در روش پیشنهادی بجای مقایسه، فواصل متغیری در این فاصله تعریف می‌شود که نه فقط محدودیت‌ها را ارضاء می‌کند بلکه در عین حال مقدار کارایی را نیز بیشینه می‌نماید.

مقدمه

تحلیل پوششی داده ها، در واقع یک چارچوب تئوریک را برای تحلیل عملکرد فراهم می آورد. مدل مذکور شامل مجموعه ای از تکنیک های برنامه ریزی خطی است که مرز کارا[1]را با استفاده از داده های مشاهده شده بنا می‌کند و آنگاه به ارزیابی و اندازه‌گیری واحد تصمیم‌ساز[2] می‌پردازد. مدل DEA برخلاف بسیاری از مدل های مرسوم در نظریه اقتصاد خرد، در اندازه گیری کارایی می تواند شامل چندین ورودی و چندین خروجی باشد. مضافاً اینکه به اطلاعات مربوط به قیمت کالا و خدمات نیازی ندارد. در این خصوص فرضیه نهفته در مدل اصلی DEA اینست که داده های مساله، شامل مقادیر قطعی است و این درحالی است که این فرض در بسیاری موارد مخدوش است و داده ها فازی و غیر دقیق هستند.

در این بین، محققین اندکی به اعمال نظریه مجموعه های فازی در اندازه گیری و ارزیابی کارایی پرداخته اند. Sengupta اولین نفری بود که رویکرد برنامه ریزی فازی را ارائه داد که در آن محدودیت ها و همچنین تابع هدف به صورتی قطعی ارضاء نمی شوند[1]. وی در مقاله خود، مدل DEA با چندین ورودی و یک خروجی را مورد ملاحظه قرارداد. در این مقاله دو نسخه از برنامه ریزی فازی، درقالب مدل DEA مدنظر قرار گرفت. اول از تابع عضویت خطی استفاده شده و دیگر از تابع عضویت غیر خطی. در مدل پیشنهادی، سطوح نقض محدودیت ها و تابع هدف مقادیر معلومی فرض می شوند که این فرض در بسیاری موارد عملی نیست.

Seaverو Triantis رویکرد خوشه بندی K[3] میانه را به عنوان ابزاری برای تعیین رفتار کارایی حدی و یا غیر معمول را ارائه دادند[2].

Cooper, Park & Yu مدل DEA غیر دقیق را بسط و توسعه دادند. در روش پیشنهادی آنان، از ترکیبی از داده های غیر دقیق با حدود معلوم و داده های دقیق استفاده شده است[3].

Tanaka &Gua مدل فازی DEA را ارائه دادند. آنها داده ها را به عنوان اعداد مثلثی فازی در نظر گرفتند. در مقاله یاد شده پس از بهره گیری از روش برش آلفا و مقایسه فواصل از یک جفت برنامه ریزی خطی برای ارزیابی کارایی واحد تحت بررسی استفاده کردند. آنها همچنین با بهره گیری از ارتباط بین مدل DEA و تحلیل رگرسیون مدل فازی DEA را بسط دادند[4].

معماریانی و ساعتی در مقاله ای که ارائه دادند، در نسخه فازی CCR پس از برش آلفای محدودیت ها و تابع هدف آنها را به فواصل قطعی تبدیل و مدل را حل کردند. آنها همچنین با روشی بدیل، اقدام به رتبه بندی واحد های کارا پرداختند[5].

Smirlis & Despotis در مقاله خود از داده هایی که دارای کران بالا و پایین هستند استفاده کردند. آنگاه متغیری را در بازه مذکور به عنوان سطح مصرفی ورودی و میزان خروجی در نظر گرفتند. با وارد کردن این متغیر در مدل استاندارد CCR مدل مذکور به نوع غیر خطی تبدیل می شود. آنها برای تبدیل مدل غیر خطی به خطی، از تغییر متغیر استفاده کردند. در نهایت با استفاده از دو نوع فرمولاسیون برای اندازه کارایی حدود بالا و پایین را محاسبه کردند[6].

Zhu مدل CCR فازی را با داده های کراندار، رتبه ای و کراندار نسبی مورد توجه قرار داد. با لحاظ کردن این گونه داده ها مدل خطی CCR به غیر خطی تبدیل می شود. برای تبدیل مدل غیر خطی به خطی در این مقاله از دو نوع رویکرد استفاده می شود. نخست تبدیل مقیاس و دوم تغییر متغیر. وی در نهایت از فرمولاسیون پیشنهادی خود در محاسبه کارایی مجموعه ای از مراکز مخابراتی استفاده کرد[7].

هدف ما دراین مقاله، در واقع تسری کاربرد برنامه ریزی ریاضی فازی به مدل BCC در تحلیل پوششی داده هاست که در آن مقادیر داده ها شامل ترکیبی از مقادیر دقیق و فازی است. برای انجام این کار، نسخه فازی BCC ارائه و روشی برای حل آن ارائه خواهد شد. در روش پیشنهادی، پس از تعیین برش الفای تابع هدف و محدودیتها، اعداد فازی مثلثی به فواصل قطعی تبدیل می شوند.

در بسیاری از روش های موجود برای برنامه ریزی امکانپذیری خطی[4] که در ان از روش برش آلفا استفاده می شود جواب را از طریق مقایسه سمت چپ و راست محدودیت ها بدست می آورند[8و9و10و11و12و13و14].

متدلوژی های متفاوتی برای مقایسه فواصل پیشنهاد شده است. در برخی ازاین روش ها، که در واقع ساده ترین آنهاست فقط نقاط انتهایی بازه مورد توجه قرار می گیرد. در این گونه روش ها بسیاری از اطلاعات ندید گرفته می شود.

---

**1- Efficient Frontier**

**2- Decision Making Unit (DMU)**

**3- K_means Clustering**

**4- Possibilistic Linear Programming**

معماریانی،ساعتی و جهانشاه لو در مقاله خودشان ایده جدیدی ارائه دادند که در طی آن، نقطه ای در بازه مفروض به عنوان متغیر در نظرگرفته اند که در عین اینکه محدودیت ها را ارضاء می کند تواما تابع هدف را نیز بهینه می کند[5].

تاکنون تنها به مقاله های در زمینه نسخه فازی CCR پرداخته شده است. در زمینه مدل فازی BCC کار چندانی صورت نگرفته است و حتی کارهای انجام شده کمتر بوده است. به تنها مقاله ای که می توان اشاره کرد مقاله Lio&kao است. دراین مقاله از برنامه ریزی پارامتری برای استخراج تابع عضویت اندازه گیری کارایی در مدل فازی BCC استفاده کردند[15].

ادامه مقاله به قرار ذیل است: در بخش 2 به بسط و توسعه مدل BCC فازی می پردازیم. در بخش 3 به تحلیل مدل پیشنهادی پرداخته می شود. در بخش 4 به وضعیت بازده نسبت به مقیاس واحدها پرداخته می شود. در بخش 5 از یک مثال عددی برای تبیین مفاهیم بخش های 4 و 5 بهره گیری می شود. در نهایت در بخش 6 به نتیجه گیری و تحقیقات آتی خواهیم پرداخت.

## 1- مدل فازی BCC

فرض کنید که $n$ ، DMU داریم که باید ارزیابی شوند. هر DMU مقادیر متغیری از $m$ ورودی متفاوت را برای تولید $s$ خروجی متفاوت استفاده می کند. در این خصوص $DMU_j$ به اندازه $x_{ij}$ $(i=1,...,m)$ ورودی مصرف می کند و $(r=1,...,s)$ $y_{rj}$ خروجی تولید می کند. در فرموله کردن مساله، $x_{ip}$ $(i=1,...,m)$ و $(r=1,...,s)$ $y_{rp}$ بترتیب مقادیرقطعی و نامنفی بردارهای ورودی و خروجی $DMU_p$ است.

فرمولاسیون مدل اولیه و دوگان (با ماهیت ورودی) برای مدل BCC به قرار ذیل است:

$$
\begin{aligned}
&(BCC_{IP}(x_p, y_p))\\
&\text{Min } Z_p = \theta\\
&\text{s.t.:}\quad \theta x_{ip} - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \ge 0 \qquad \forall i.\\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j y_{ij} \ge y_{rp} \quad \forall r.\\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1\\
&\qquad\qquad \lambda_j \ge 0 \qquad \forall j.
\end{aligned}
\tag{1}
$$

$$
\begin{aligned}
&(BCC_{ID}(x_p, y_p))\\
&\text{Max } w_p = \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rp} - u_0\\
&\text{s.t.:}\qquad \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ip} = 1\\
&\qquad\qquad \sum_{r=1}^{s} u_r y_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i x_{ij} - u_0 \le 0 \qquad \forall j.\\
&\qquad\qquad u_r, v_i \ge 0 \qquad\qquad \forall i, r.
\end{aligned}
\tag{2}
$$

عموما به جهت فقدان اطلاعات و وجود داده های غیر دقیق و فازی ریاضیات دقیق دیگر نمی تواند پاسخگوی سیستم های پیچیده از این دست باشد. دراین ارتباط دردنیای واقعی تصمیم گیری ها اغلب بر پایه هردو نوع داده های کمی وکیفی قرار دارد. بنابراین، یک رویکرد فازی را ایجاب می کند که بر اینگونه مسائل انطباق داشته باشد و بتواند راه حلی را در پیش روی ما قراردهد. مدل $BCC_{ID}$ با داده های فازی را می توان به صورت ذیل بیان کرد:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } w_p = \sum_{r=1}^{s} \tilde{y}_{rp} - u_0 \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{ip} = \tilde{1} \\
&\quad \sum_{r=1}^{s} u_r \tilde{y}_{rj} - \sum_{i=1}^{m} v_i \tilde{x}_{ij} - u_0 \le 0 \qquad \forall j. \\
&\quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\quad u_r, v_i \ge 0 \qquad \forall i, j.
\end{aligned} \tag{3}
$$

در بین انواع مختلف اعداد فازی، اعداد مثلثی فازی دارای اهمیت بیشتری نسبت به بقیه است. در این ارتباط فرض می شودکه ورودی و خروجی های DMU متشکل از اعداد مثلثی فازی هستند. در نظر بگیرید که $\tilde{x}_{ij} = (x_{ij}^m, x_{ij}^l, x_{ij}^u)$ و $\tilde{y}_{ij} = (y_{ij}^m, y_{ij}^l, y_{ij}^u)$ باشد. بنابراین مدل (3) را می توان به صورت ذیل بازنویسی کرد:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } w_p = \sum_{r=1}^{s} u_r (y_{ip}^m, y_{ip}^l, y_{ip}^u) - u_0 \\
&\quad \sum_{i=1}^{m} v_i (x_{ip}^m, x_{ip}^l, x_{ip}^u) = (1, 1^l, 1^u) \\
&\quad \sum_{r=1}^{s} u_r (y_{ij}^m, y_{ij}^l, y_{ij}^u) - \sum_{i=1}^{m} v_i (x_{ij}^m, x_{ij}^l, x_{ij}^u) - u_0 \le 0 \qquad \forall j. \\
&\qquad u_r, v_i \ge 0 \qquad \forall r, i.
\end{aligned}
$$

که درآن $1 \le 1^l$ و $1 \ge 1^u$ اعداد حقیقی هستند. مدل (4) یک مدل برنامه ریزی امکان پذیری خطی است. روش های زیادی برای حل آن وجود دارد. دراغلب این روش ها برای حل، بااستفاده از برش آلفا، فواصل در هردو طرف محدودیتها باهم مقایسه می شوند. همچنین روش های زیادی برای مقایسه فواصل ارائه گشته است. در این مقاله بجای مقایسه فواصل، متغیری در هر فاصله تعریف می شود که در عین اینکه محدودیت ها را رعایت می کند در همان زمان تابع هدف را بهینه نماید. در بخش بعد روش حل مدل فازی BCC ارائه خواهد شد.

## 3–روش پیشنهادی

بعد از اعمال برش آلفا در تابع هدف و محدودیت ها، مدل (4) به شکل ذیل در می آید:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } w_p=\sum_{r=1}^{s}u_r(\alpha y_{rp}^m+(1-\alpha)y_{rp}^l,\alpha y_{rp}^m+(1-\alpha)y_{rp}^u)-u_0\\
&\text{s.t.:}\quad \sum_{i=1}^{m}v_i(\alpha x_{ip}^m+(1-\alpha)x_{ip}^l,\alpha x_{ip}^m+(1-\alpha)x_{ip}^u)=(\alpha+(1-\alpha)1^l,\alpha+(1-\alpha)1^u)\\
&\qquad \sum_{r=1}^{s}u_r(\alpha y_{rj}^m+(1-\alpha)y_{rj}^l,\alpha y_{rj}^m+(1-\alpha)y_{rj}^u)\\
&\qquad -\sum_{i=1}^{m}v_i(\alpha x_{ij}^m+(1-\alpha)x_{ij}^l,\alpha x_{ij}^m+(1-\alpha)x_{ij}^u)-u_0\le 0 \qquad \forall j.\\
&\qquad\qquad u_r,v_i\ge 0 \qquad \forall r,i.
\end{aligned} \tag{5}$$

چنانچه در مدل (5) مشهود است تمامی ضرایب برحسب فاصله بیان شده اند و لذا نمی توان آن را ازروش های معمول حل نمود. ایده های بسیاری برای حل مدل (5) وجود دارد. دراغلب آنها مقایسه فواصل ایده اصلی را تشکیل می دهد. در این بخش بجای مقایسه فواصل، یک متغیر را در هر فاصله تعریف می کنیم که در عین اینکه محدودیت ها را رعایت می کند بطور همزمان تابع هدف را نیز بیشینه نماید.

تعریف (1): نقطه بهینه

نقطه بهینه سیستم ذیل

$$\begin{aligned}
&\text{Max}\quad [x_1,y_1]\\
&\text{s.t.:}\quad [x_2,y_2]\le[x_3,y_3]
\end{aligned}$$

برداری مانند(a,b,c) خواهد بود به طوری که:

$$a\in[x_1,y_1],\ b\in[x_2,y_2] \text{ and } c\in[x_3,y_3]$$

همه محدودیت ها را ارضاء کند.

تابع هدف را بیشینه نماید.

با استفاده از الگوریتم ذیل می توان به جواب بهینه مدل (5) نائل شد.

**قدم اول:** *تغییر فواصل*، که در طی آن متغیر های ذیل با فواصل منتج از مدل (5) جایگزین می شوند:

$$\hat{x}_{ij}\in(\alpha x_{ij}^m+(1-\alpha)x_{ij}^l,\alpha x_{ij}^m+(1-\alpha)x_{ij}^u)$$
$$\hat{y}_{ij}\in(\alpha y_{ij}^m+(1-\alpha)y_{ij}^l,\alpha y_{ij}^m+(1-\alpha)y_{ij}^u)$$
$$L\in(\alpha+(1-\alpha)1^l,\alpha+(1-\alpha)1^u)$$

پس از جایگزینی متغیر های جدید، مدل (5) را می توان به صورت ذیل بازنویسی کرد.

$$\begin{aligned}
&\text{Max } w_p=\sum_{r=1}^{s}u_r\hat{y}_{rp}-u_0\\
&\text{s.t.:}\\
&\qquad \sum_{i=1}^{m}v_i\hat{x}_{ip}=L\\
&\qquad \sum_{r=1}^{s}u_r\hat{y}_{ij}-\sum_{i=1}^{m}v_i\hat{x}_{ij}-u_0\le 0 \qquad \forall j.\\
&\alpha x_{ij}^m+(1-\alpha)x_{ij}^l\le\hat{x}_{ij}\le\alpha x_{ij}^m+(1-\alpha)x_{ij}^u \qquad \forall i,j.\\
&\alpha y_{rj}^m+(1-\alpha)y_{rj}^l\le\hat{y}_{ij}\le\alpha y_{rj}^m+(1-\alpha)y_{rj}^u \qquad \forall r,j.\\
&\quad \alpha+(1-\alpha)1^l\le L\le\alpha+(1-\alpha)1^u\\
&\qquad\qquad u_r,v_i\ge 0 \qquad \forall r,i.
\end{aligned} \tag{6}$$

مدل (6) یک مدل غیرخطی است. برای خطی کردن مدل (6) می توان از تغییرمتغیر ذیل استفاده کرد.

**قدم دوم:** *تغییر متغیر:* با استفاده ازتغییر متغیر $v_i\hat{x}_{ij} = \bar{x}_{ij}$ و $u_r\hat{y}_{ij} = \bar{y}_{ij}$ مدل (6) را می توان به صورت ذیل باز نویسی کرد.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } w_p = \sum_{r=1}^{s} y_{rp} - u_0 \\
&\text{s.t.:} \\
&\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ip} = L \\
&\sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} - u_0 \le 0 && \forall j. \\
&v_i(\alpha x_{ij}^m + (1-\alpha)x_{ij}^l) \le \bar{x}_{ij} \le v_i(\alpha x_{ij}^m + (1-\alpha)x_{ij}^u) && \forall i, j. \\
&u_r(\alpha y_{rj}^m + (1-\alpha)y_{rj}^l) \le \bar{y}_{ij} \le u_r(\alpha y_{rj}^m + (1-\alpha)y_{rj}^u) && \forall r, j. \\
&\qquad \alpha + (1-\alpha)1^l \le L \le \alpha + (1-\alpha)1^u \\
&\qquad\qquad u_r, v_i \ge 0 && \forall r, i.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

تابع هدف مدل (7) نظیر تابع هدف مدل $BCC_{ID}$ انعکاس دهنده کارایی واحد تحت بررسی است. لازم بذکر است که در اینجا $y_{rp}, (r = 1,\dots, s)$ نماینده متغیرهایی است که به فاصله ذیل تعلق دارد:

$u_r[\alpha y_{rp}^m + (1-\alpha)y_{rp}^l, \alpha y_{rp}^m + (1-\alpha)y_{rp}^u], (r = 1,\dots, s)$

بنابراین ارزش کارایی نیز برحسب فاصله خواهد بود. مقادیر بهینه این متغیر ها، $\bar{y}_{rp}, (r = 1,\dots, s)$ ، در عین اینکه همه محدودیت ها را رعایت می کند در همان زمان مجموع این متغیر ها اندازه کارایی $DMU_p$ را نیز بدست می دهد.

**قضیه 1 :** $DMU_p$ کارا خواهد بود اگر $w_p^* = 1$ .

محدودیت دوم از مدل (7) را در نظر بگیرید:

$$\sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ip} - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ip} - u_0 \le 0 \tag{8}$$

اگر $1^u \succ 1$ باشد، در این صورت برخی از DMU ها به کارایی بیش از یک دست خواهند یافت. لذا حد بالای آن باید برابر یک باشد. از سوی دیگر محدودیت آخر مدل (7) را بصورت ذیل بازنویسی می کنیم:

$$\alpha + (1-\alpha)1^l \le L \le 1 \tag{9}$$

حال با توجه به اولین محدودیت (7) وروابط (8) و (9) محدودیت آخر زائد بوده و L=1 خواهد شد. بنابراین می توان مدل (7) معادل با برنامه ریزی ریاضی ذیل دانست:

$$\begin{aligned}
&\text{Max } \ w_p = \sum_{r=1}^{s} y_{rp} - u_0 \\
&\text{s.t.:} \\
&\sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ip} = 1 \\
&\sum_{r=1}^{s} \bar{y}_{ij} - \sum_{i=1}^{m} \bar{x}_{ij} - u_0 \le 0 && \forall j. \quad (10) \\
&v_i(\alpha x_{ij}^m + (1-\alpha) x_{ij}^l) \le \bar{x}_{ij} \le v_i(\alpha x_{ij}^m + (1-\alpha) x_{ij}^u) && \forall i, j. \\
&u_r(\alpha y_{rj}^m + (1-\alpha) y_{rj}^l) \le \bar{y}_{ij} \le u_r(\alpha y_{rj}^m + (1-\alpha) y_{rj}^u) && \forall r, j. \\
&u_r, v_i \ge 0 && \forall r, i.
\end{aligned}$$

مدل اخیر معادل برنامه ریزی پارامتری خواهد بود که درآن $\alpha \in (0,1]$ پارامتر مساله است. بنابراین مدل برنامه ریزی خطی فازی (4) را به برنامه ریزی پارامتری قطعی در مدل (10) تبدیل کردیم. لازم بذکر است که به ازای هر $\alpha$ یک جواب بهینه خواهیم داشت. بنابراین می توان جدولی از جوابها را به ازای $\alpha \in (0,1]$ های مختلف برای مرجع تصمیم گیری فراهم آورد. در بخش 4 تحلیل مدل (10) آورده شده است.

## 4-تحلیل مدل پیشنهادی

برای مطالعه مدل (10) لازم است که ابتدا فرمولاسیون مساله دوگان آن نوشته شود. مساله دوگان عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&\text{Min } \ Z = \theta \\
&\text{s.t.:} \quad \theta - \lambda_p + \delta_{ip} - \Delta_{ip} \ge 0 && \forall i. \\
&\qquad -\lambda_j + \delta_{ij} - \Delta_{ij} \ge 0 && \forall i, j \ne p. \\
&\qquad \lambda_p + \beta_{rp} - \gamma_{rp} \ge 1 && \forall r. \\
&\qquad \lambda_p + \beta_{rj} - \gamma_{rj} \ge 0 && \forall r, j \ne p. \\
&\sum_{j=1}^{n} \left\{ \Delta_{ij}(\alpha x_{ij}^m + (1-\alpha) x_{ij}^l) - \delta_{ij}(\alpha x_{ij}^m + (1-\alpha) x_{ij}^u) \right\} \ge 0 && \forall i. \\
&\sum_{j=1}^{n} \left\{ \gamma_{rj}(\alpha y_{rj}^m + (1-\alpha) y_{rj}^l) - \beta_{rj}(\alpha y_{rj}^m + (1-\alpha) y_{rj}^u) \right\} \ge 0 && \forall r. \qquad (11) \\
&\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \\
&\Delta_{ij}, \delta_{ij} \ge 0 && \forall i, j. \\
&\gamma_{rj}, \beta_{rj} \ge 0 && \forall r, j \\
&\lambda_j \ge 0 && \forall j.
\end{aligned}$$

مدل (11) باید در واقع انعکاس دهنده رفتار ضرایب $\lambda$ و نیز آنچه که از این ضرایب به عنوان مجموعه مرجع مشخص می‌شود، باشد. پس از مطالعه مدل فوق این نتیجه حاصل شده است که رفتار ضرایب $\lambda$، درست مانند حالت قطعی، کاملاً توجیه پذیر و قابل پیش بینی بوده و درست همان رسالتی را که در حالت قطعی ایفا می کند در اینجا نیز به خوبی به انجام می رساند. در مواردی پیش می آید که به ازای برخی مقادیر $\alpha \in (0,1]$ ، برخی از DMUها کارا می شوند اما به طور کامل برروی مرزکارایی که می توان متصور شد قرار نگرفته فقط باآن تلاقی دارند ، دراینجا ضریب $\lambda$ مربوط به آن در ارتباط با DMUتحت مطالعه مثبت نخواهد شد و جزء مجموعه مرجع معرفی نمی شود.

دیگر آنکه آنچه که از هردو مدل (10) و (11) برمی آید اینست که در ارزیابی یک DMU خاص همیشه بهترین وضعیت آن واحد ( حد پایین ورودی و حد بالای خروجی) با بدترین قسمت مرز کارا (حد بالای ورودی و حد پایین خروجی DMUهای متعلق به مجموعه مرجع )مقایسه می شود. دراین ارتباط قیودی به قرار ذیل را می توان از مساله حذف کرد.

الف- قیود مربوط به حد بالای ورودی واحد تحت بررسی

ب- قیود مربوط به حد پایین خروجی واحد تحت بررسی

ج- قیود مربوط به حد پایین ورودی مرز کارا

د- قیود مربوط به حد بالای خروجی مرز کارا

با حذف قیود بالا مدل (10) را می توان به صورت ذیل باز نویسی کرد:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}\ \ w=\sum_{r=1}^{s}u_r(\alpha y_{rp}^{m}+(1-\alpha)y_{rp}^{u})-u_0\\
&\text{s.t.:} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (12)\\
&\sum_{i=1}^{m}v_i(\alpha x_{ip}^{m}+(1-\alpha)x_{ip}^{l})=1\\
&\sum_{r=1}^{s}u_r(\alpha y_{rj}^{m}+(1-\alpha)y_{ij}^{l})-\sum_{i=1}^{m}v_r(\alpha x_{ij}^{m}+(1-\alpha)x_{ij}^{u})-u_0\le 0 \qquad \forall j\ne p\\
&\sum_{r=1}^{s}u_r(\alpha y_{rp}^{m}+(1-\alpha)y_{ip}^{l})-\sum_{i=1}^{m}v_i(\alpha x_{ip}^{m}+(1-\alpha)x_{ip}^{u})-u_0\le 0\\
&\qquad\qquad u_r,v_i\ge 0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall r,i.
\end{aligned}
$$

مدل(12) مدل تقلیل یافته مدل (10) است که در آن با حذف محدودیتها ابعاد مساله کوچکتر و لذا سرعت محاسبات افزایش خواهد یافت. در مواردی پیش می آید که DMU تحت مطالعه با مرز کارای ضعیف مقایسه می شود. در این صورت با وضعیتی مشابه وجود متغیر های Slack در مدل قطعی مواجه هستیم. لذا چنانچه از دوگان مدل (12) در محاسبه کارایی استفاده نماییم، در صورتی که از DMU با مرز کارای ضعیف مقایسه شود، اثبات و مشاهده آن به خوبی از روی متغیر های Slackمربوط به محدودیت ها میسر است. مساله دوگان مدل (12) به قرار ذیل است:

$$
\begin{aligned}
&\text{Min}\quad z=\theta\\
&\text{s.t.:}\qquad \theta(\alpha x_{ip}^{m}+(1-\alpha)x_{ip}^{l})\ge\sum_{\substack{j=1\\ j\ne p}}^{n}\lambda_j(\alpha x_{ij}^{m}+(1-\alpha)x_{ij}^{u})+\lambda_p(\alpha x_{ip}^{m}+(1-\alpha)x_{ip}^{l}) \qquad \forall i.\\
&\qquad\quad (\alpha y_{rp}^{m}+(1-\alpha)y_{rp}^{u})\le\sum_{\substack{j=1\\ j\ne p}}^{n}\lambda_j(\alpha y_{rj}^{m}+(1-\alpha)y_{rj}^{l})+\lambda_p(\alpha y_{rp}^{m}+(1-\alpha)y_{rp}^{u}) \qquad \forall r. \quad (13)\\
&\qquad\quad \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1\\
&\qquad\qquad\qquad \lambda_j\ge 0 \qquad\qquad \forall j.
\end{aligned}
$$

در نهایت با در نظر گرفتن مدل (12) می توان از این فرمولاسیون به عنوان حد بالایی برای اندازه کارایی هر DMU یاد کرد. با این وصف، مشابه با تعابیری نظیر آنچه در بالا آمد حد پایین اندازه کارایی را می توان به شکل ذیل از مقایسه بدترین وضعیت DMU (حد بالای ورودی و حد پایین خروجی) با بهترین وضعیت مرز کارا (حد پایین ورودی و حد بالای خروجیDMU های متعلق به مجموعه مرجع) بدست آورد.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } w=\sum_{r=1}^{s} u_r(\alpha y_{rp}^{m}+(1-\alpha)y_{rp}^{l})-u_0\\
&\text{s.t.:}\\
&\sum_{i=1}^{m} v_i(\alpha x_{ip}^{m}+(1-\alpha)x_{ip}^{u})=1\\
&\sum_{r=1}^{s} u_r(\alpha y_{rj}^{m}+(1-\alpha)y_{ij}^{u})-\sum_{i=1}^{m} v_r(\alpha x_{ij}^{m}+(1-\alpha)x_{ij}^{l})-u_0\leq 0 \qquad \forall j\neq p\\
&\sum_{r=1}^{s} u_r(\alpha y_{rp}^{m}+(1-\alpha)y_{ip}^{u})-\sum_{i=1}^{m} v_i(\alpha x_{ip}^{m}+(1-\alpha)x_{ip}^{l})-u_0\leq 0\\
&\qquad\qquad u_r, v_i\geq 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \forall r,i.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

## 6-یک مثال عددی

**مثال 1**- پنج DMU را در نظر بگیرید که هر کدام دو ورودی فازی را برای تولید دو خروجی فازی، مصرف می کند. مقادیر ورودی و خروجی هر DMU مطابق با اعداد مثلثی فازی است. داده های مربوط به این DMUها در جدول (1) ذیل آمده است.

| DMUs | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $I_1$ | (6و7و8) | (12و10و14) | (13و9و16) | (14و12و15) | (8و5و10) |
| $I_2$ | (30و29و32) | (110و107و113) | (100و95و101) | (125و120و131) | (38و35و39) |
| $O_1$ | (38و35.5و41) | (36و34.5و38) | (41و37و46) | (27و24و28) | (50و48و51) |
| $O_2$ | (411و409و416) | (400و396و405) | (393و387و402) | (404و400و406) | (470و470و470) |

**جدول (1): داده های مثال 1**

با استفاده از مدل (11) ضرایب $\lambda$ مطابق با جدول (3) می باشد:

| $\alpha$ | $D_1$ | $D_2$ | $D_3$ | $D_4$ | $D_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_1=0.8$<br>$\lambda_5=0.2$ | $\lambda_3=1.00$ | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_5=1.00$ |
| 0.25 | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_1=0.889$<br>$\lambda_5=0.111$ | $\lambda_1=0.303$<br>$\lambda_5=0.697$ | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_5=1.00$ |
| 0.5 | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_1=0.980$<br>$\lambda_5=0.02$ | $\lambda_1=0.449$<br>$\lambda_5=0.551$ | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_5=1.00$ |
| 0.75 | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_1=0.598$<br>$\lambda_5=0.402$ | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_5=1.00$ |
| 1 | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_1=0.75$<br>$\lambda_5=0.25$ | $\lambda_1=1.00$ | $\lambda_5=1.00$ |

**جدول(3): ضرایب $\lambda$ مربوط به مجموعه مرجع در مثال 1**

6- نتیجه گیری

در این مقاله نسخه فازی مدل BCC با اعداد مثلثی به همراه روش حل آن ارائه شده است. با لحاظ کردن داده های فازی در واقع مدل استاندارد BCC به یک برنامه ریزی خطی امکانپذیری تبدیل خواهد شد. در اینجا بر اساس روش برش آلفا، روشی پیشنهاد می شود که در طی آن مساله برنامه ریزی خطی امکانپذیری به صورت یک برنامه ریزی خطی قطعی در می آید.
درا غلب روش های مبتنی برمتد برش آلفا، روش کار بدین منوال است که برای حل مدل از مقایسه فاصله سمت چپ و راست هرتساوی و یا نامساوی بهره می گیرند. البته این رویکرد بسیار ساده وگاهی صعوبت های محاسباتی را به همراه دارد.
درروش پیشنهادی، فرض می شود که جواب به هر حال درون فاصله های مذکور قرار دارد لذا به ازای هر فاصله یک متغیر مناسب تعریف می شود. جواب بهینه این متغیر ها به گونه ای است که در عین اینکه محدودیت ها را ارضاء می کند در همان زمان تابع هدف را نیز بیشینه می نماید. در صورت استفاده از این متغیر ها مدل BCC به صورت غیر خطی در می آید که با یک تغییر متغیر می توان آن را به صورت خطی تبدیل کرد. مدل مذکور نیز با عطف به اینکه همیشه بهترین وضعیت DMU تحت مطالعه (حدبالای خروجی و حد پایین ورودی) با بدترین وضعیت مرز کارا (حد پایین خروجی ها و حد بالای ورودی های DMU های کارا) مقایسه می شود می توان برنامه ریزی خطی فوق الذکر را به یک برنامه ریزی خطی قطعی با ابعاد کوچک تر تبدیل کرد و آنچه که به عنوان تابع هدف حاصل می شود در واقع کران بالایی برای اندازه کارایی واحد تحت بررسی خواهد بود. از سوی دیگر، با داشتن این ایده، با در نظر گرفتن بدترین وضعیت DMU و بهترین وضعیت مرز کارا کران پایینی برای اندازه کارایی واحد تحت بررسی به ازای مقادیر مختلف آلفا بدست می آید.
در تعیین بازده نسبت به مقیاس واحد های کارا نیز می توان براساس کران بالا و پایین متغیر $u_0$ وضعیت افزایشی، کاهشی و ثابت بودن آن را مشخص کرد.
در اینجا متغیر $u_0$ به صورت قطعی در نظر گرفته و کلیه تحلیل ها براساس آن صورت گرفته است و لذا با فازی گرفتن آن میتوان افق جدیدی را فراروی مساله قرار داد.

منابع و ماخذ

1- Sengupta, J. K. (1992). “A Fuzzy System Appproach in Data Envelopment Analysis,” Computers Math. Applic. 24, 259-266.
2- Seaver, B. and K. Triantis. (1992). “A Fuzzy Clustring Approach Used in Evaluating Technical Efficiency Measures in Manufacturing,” Journal of Production Analysis 3, 337-363.
3- Cooper, W. W., K. S. Park, and G. Yu.(1999). “Models for Dealing with Imprecise Data in DEA,” Management Science 45,597-607.
4- Tanaka, H., H. Ichihashi, and K. Asai. (1984). “A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problems Based on Comparison of Fuzzy Numbers,” Control and Cybernetics 13, 180-194.
5- Saati M., S., A. Memariani, G. R. Jahanshahloo,”Efficiency Analysis and Ranking of DMUs with Fuzzy Data,” A Journal of Modeling and Computation Under Uncertainty 3, 255-268.
6- Despotis, D.K., Y. G. Smirlis. (2002). “ Data Envelopment Analysis with Imprecise Data,” European Journal of Operation Research 140,24-36.
7- Zhu, J. (2003).”Imprecise Data Envelopment Analysis(IDEA): A Review and Improvement with an Application,” European Journal of Operation Research 144, 513-529.
8- Bezdak,J. C.(1987).”Analysis of Fuzzy Information,” (Vol III), Application in Engineering and Science, Boca Raton:CRC Press,241-263.
9- Delgado, M., J. L. Verdegay, and M. A. Vila. (1990). “ Relating Different Approach to Solve Linear Programming Problem with Impecise Costs,” Fuzzy Sets and Systems 37, 33-42.
10- Rommelfanger, H. R., R. Hanuscheck, and J Wolf. (1989).”Linear Programming with fuzzy Objectives,” Fuzzy Sets and Systems 29, 31-48.
11- Ramik, J. and J. Rimanek.(1985).”Inequality Relation Between Fuzzy Nmumbers and Its Use in Fuzzy Optimization,” Fuzzy Sets and Systems 16, 123-138.
12- Negi, D. S. (1989). Fuzzy Analysis and Optimization. Ph.D. Deissertation , Dept. of IE., Kansas State University.
13- Lai, Y. J. and C. L. Hwang. (1993). “ A Nem Approach to Some Possibilistic Programming Problem,” Fuzzy Sets and Systems 49.

14- Fuller, R. (1986).”On a Spacial Type of Fuzzy Linear Programming,” Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai 50, 511-519.
15- Kao , C. and Shiang_tai Lio. (2000). “Fuzzy Efficiencey Measures in Data Envelopment Analysis,” Fuzzy Sets and Systems 113, 427-437.