راه حلی کارا برای مدلهای کوچک دارای متغیرهای مقدار صحیح

محمد سعید صباغ*
دانشکده مهندسی صنایع و مرکز برنامه ریزی سیستمها
دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان ۸۴۱۵۴
sabbagh@cc.iut.ac.ir

واژه‌های کلیدی

برنامه ریزی، متغیرهای صحیح، شمارش ضمنی

چکیده

با توجه به اینکه حل برخی مدلهای ریاضی کوچک برنامه ریزی خطی دارای متغیرهای مقدار صحیح آسان نیست، دشواری حل مدلهای غیر خطی آن اشکارتر می گردد. ما در این مقاله نمونه ای از مسائل کوچک برنامه ریزی خطی دارای متغیرهای مقدار صحیح را که نمی توان به کمک نرم افزارهای تجاری موجود به راحتی آنها را حل کرد معرفی می نمائیم. سپس یک روش شمارش ضمنی کارا مبتنی بر ترتیب الفبائی بردارها برای حل مسائل مذکور ارائه می دهیم. درک و پیاده سازی این روش بسیار آسان است و در عین حال از آن برای حل مسائلی از قبیل بهینه کردن قابلیت اطمینان و تخصیص بهینه قطعات یدکی می توان استفاده کرد. در این راه حل توابع مدل ریاضی می توانند خطی یا غیر خطی باشند. چون در این روش نیازی به مشتق نیست حتی برای توابعی که به صورت فرمول ریاضی قابل بیان نیستند ولی ویژگی غیرکاهشی بودن را دارا می باشند نیزاستفاده می باشد. همانطور که در عنوان مقاله نیز امده است این روش در حل مسائل کوچک کاربرد دارد.

An effective method for small nonlinear integer programming problems

Mohammad S. Sabbagh
Department of Industrial Engineering
Isfahan University of Technology
sabbagh@cc.iut.ac.ir

Keywords

Nonlinear integer programming, implicit enumeration

Abstract

Knowing the fact that it is not an easy task to solve some small linear integer programming (LIP) problems then the difficulty of solving nonlinear integer programming (NIP) problems becomes more apparent. In this paper we introduce a sample small LIP that available commercial software can not solve efficiently. We then present an efficient lexicographic partial enumeration method for solving some small NIP problems. The method is easy to understand and implement, yet very effective in dealing with many small NIP problems, including reliability optimization and spare allocation problems. The algorithm is based on nondecreasing properties of the problem functions, and uses function values only; it does not require continuity or differentiability of the problem functions. This allows its use on problems whose functions cannot be expressed in closed algebraic form. As the title indicates this method is applicable to small problems.

۱. مقدمه

بدست اوردن جواب بهینه مسائل برنامه ریزی غیرخطی پیوسته بجز در مواردی که مساله محدب باشد معمولا ساده نیست. بسیار دشوارتر از آن یافتن حل بهینه مسائل برنامه ریزی غیرخطی با متغیرهای مقدار صحیح است.
برای مسائل خیلی کوچک برنامه ریزی با متغیرهای مقدار صحیح یک راه حل ممکن عبارتست از شمارش کامل نقاط دارای مختصات صحیح در فضای مربوطه و تعیین بهترین آنها. هدف از ارائه این روش پیشنهادی آنست که بدون این که الزامی به بر رسی تک تک نقاط مذکور داشته باشیم جواب بهینه آنرا تعیین نمائیم و امکان یابیم مسائل بزرگتری را در زمان کمتری حل کنیم. برای تحقق این امر نیاز است که توابع مدل در نقاط با مختصات مقدار صحیح غیرکاهشی و یا توابعی بصورت تفاضل دو تابع غیرکاهشی باشند.
برای مدلهائی که در نقاط با مختصات مقدار صحیح تابع هدف غیرکاهشی دارند، لالر و بل [۱] در سال ۱۹۶۶ یک روش شمارش ضمنی با متغیرهای صفر و یک را معرفی نمودند. ساساکی و همکاران [۲] در سال ۱۹۷۷ با بسط روش لالر و بل یک روش حل برای مساله تخصیص قطعات یدکی ارائه دادند که قابل استفاده برای مدلهای غیر صفر و یک است. آنها روش خود را "روش جدید لالر و بل" نامیدند. صباغ [۳] در سال ۱۹۸۳ روش آنها را برای بهره گیری کارا از توابع خطی مدل توسعه داد. برای دیدن برخی کاربردهای منتشرشده این روش مراجع [۴-۹] توصیه می گردد.
در سال ۲۰۰۰ اسری واستاوا و فهیم [۱۰] یک روش دو مرحله ای برای حل NIP معرفی نمودند. مسائلی که انها در مقاله خود حل کرده اند همگی ساده تر از مدل (IV) این مقاله است. برای مطالعه روشهای غیر استاندارد حل NIP به آردل و همکاران [۱۱] مراجعه گردد.
ما در این مقاله روشی را برای حل مسائل کوچک ارائه می دهیم که کلیه توابع مدل در نقاط با مختصات مقدار صحیح می توانند غیرکاهشی و یا توابعی بصورت تفاضل دو تابع غیرکاهشی باشند.
ما در مثال ۲ نمونه ای از مسائل کوچک برنامه ریزی خطی دارای متغیرهای مقدار صحیح را که نمی توان به کمک نرم افزارهای تجاری موجود به راحتی آنها را حل کرد معرفی می نمائیم. سپس به کمک روش ارائه شده مسائل مذکور را حل میکنیم.

۲. شکل مدل

فرض کنید شکل مدل مساله برنامه ریزی غیرخطی با متغیرهای مقدار صحیح عبارتست از:

$$\begin{aligned}&\textit{Minimize } f(x),\\&\textit{subject to}\begin{cases} g_i(x)\ge b_i, \quad i=1,\cdots,m,\\ x\in S,\ S=\{x\,|\,0\le x_j\le u_j\ ,x_j\in z,\ j=1,\cdots,n\}.\end{cases}\qquad (I)\end{aligned}$$

که در آن $f(x)$ تابع هدف، x بردار متغییرهای تصمیم، $g_i(x)$ تابع محدودیت i ام، u_j حد بالای متغییر j ام و b_i مقدار سمت راست محدودیت i ام است.

۳. انگیزه شمارش ضمنی

فرض شود مساله برنامه ریزی غیر خطی با متغیرهای مقدار صحیح ما بصورت مدل (I) باشد. محدودیتهای $0\le x\le u$ یک ابر مکعب مستطیل (hyper-cube) را با $N=\prod_{j=1}^{n}(u_j+1)$ نقطه دارای مختصات صحیح مشخص می کنند و حلقه (II) تمام آن نقاط را تولید می کند.

برای مسائل خیلی کوچک برنامه ریزی با متغیرهای مقدار صحیح یک راه حل ممکن عبارتست از شمارش کامل آن نقاط و تعیین بهترین آنها. برای مثال در مکعب مستطیل مدل (III) $N=3*2*3=18$ است. با ارزیابی این ۱۸ نقطه جواب بهینه $X=(1,0,2)$ و $f(X)=9$ بدست می آید.

حال فرض کنید که ما بخواهیم مدل (IV) را با شمارش کامل حل کنیم. اگر فرض شود رایانه شخصی ما می تواند در هر ثانیه حدود ۱،۰۰۰،۰۰۰ نقطه را ارزیابی کند. برای $u=50$ مقدار $N=45{,}767{,}944{,}570{,}401$ می باشد و شمارش کامل آن حدود ۱۷ ماه زمان می خواهد ولی شمارش ضمنی ان کمتر از یک ثانیه زمان می برد.

هدف از انجام شمارش ضمنی کاهش تعداد نقاط بررسی است به طوری که در نهایت جواب بهینه به دست اید.

$$\begin{array}{l} DO \quad x_1 = 0 \; to \; u_1 \\ \quad DO \quad x_2 = 0 \; to \; u_2 \\ \qquad \vdots \\ \qquad DO \quad x_n = 0 \; to \; u_n \qquad\qquad (II) \\ \qquad\quad Begin \\ \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad End \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} Minimize \quad f(x) = 3x_1^3 + 6x_2^2 + 3x_3, \\ s.t. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 11, \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 4, \end{cases} \\ x_1 = 0,1,2, \quad x_2 = 0,1, \quad x_3 = 0,1,2. \end{array}\right\} (III)$$

$$\left.\begin{array}{l} Minimize \quad f(x) = 5(x_1+x_3)^3 + 2^{x_2+x_3} + 3x_1x_2x_3 + 4x_4^2 + 2^{x_5+x_6} + 2x_7x_8 \\ s.t. \begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6+x_7+x_8 \ge 50 \\ x_1^2+x_3^2+x_5^2+x_7^2-(x_2^2+x_4^2+x_6x_8) \ge 100 \\ (x_1+x_2+x_3+x_4)(x_5+x_6+x_7+x_8) \ge 80 \end{cases} \\ x_j = 0,\ldots,u, \quad j=1,\ldots,8. \end{array}\right\} \quad (IV)$$

۴. تعاریف

- رابطه ترتیب جزئی برداری (the vector partial order relation) یا به صورت مختصر ترتیب جزئی عبارتست از:

$$x \le y \rightarrow x_j \le y_j,\ j=1,\ldots,n$$

- ترتیب لغتنامه‌ای یا الفبائی(Lexicographic order):

ترتیب لغتنامه ای یک روش برای مرتب سازی یکسری داده است که می تواند به شکل برداری نیز باشد. برای مثال چهار اسم محمود، محمد، مسعود، سعید را می توان با استفاده از این روش مرتب کرد. ابتدا حروف اول اسامی را با هم مقایسه می کنیم، سعید در ابتدای لیست قرار می گیرد اما بقیه در رده بعدی قرار دارند، بنابراین برای سه اسم باقیمانده از مقایسه حروف دوم استفاده می کنیم. در این مقایسه مسعود در مکان دوم قرار می‌گیرد، حال برای مقایسه محمود و محمد حروف سوم را مقایسه می کنیم اما حروف سوم با

هم برابرند، بنابراین حرف چهارم آنها را با هم مقایسه می کنیم که در این ترتیب محمد در مکان سوم و محمود در مکان چهارم قرار می گیرد، پس ترتیب مورد نظر بدین صورت میشود: سعید – مسعود – محمد – محمود.

در بحث شمارش ضمنی نیز ترتیب لغتنامه ای برای مرتب کردن بردارهای مقدار صحیح غیر منفی بکار می رود. برای تعیین ترتیب لغتنامه ای چند بردار باید مؤلفه های متناظر را با شروع از درایه اول آنها با هم مقایسه کنیم.

فرض کنید بخواهیم بردارهای زیر را به ترتیب لغتنامه ای مرتب کنیم.

$$\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$$

ابتدا مؤلفه های اول را با هم مقایسه نموده می بینیم که دومین بردار و چهارمین بردار مؤلفه اول آنها صفر است پس این دو بردار از بقیه کوچکترند، سپس به سراغ مؤلفه‌های دوم ودر صورت برابر بودن آنها مؤلفه های سوم آنها را مقایسه می‌کنیم، که با مقایسه مؤلفه های دوم و سوم آنها بردار $\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}$ در ابتدا قرار می گیرد و بردار $\begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}$ در ردیف دوم ، بردارهای $\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ نیز به صورت درایه ای با هم مقایسه می شوند ۱=۱ و $0<2$ در نتیجه بردار $\begin{bmatrix}1\\2\\2\end{bmatrix}$ ازبردار $\begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}$ بزرگتر است، پس داریم:

$$\begin{bmatrix}0\\2\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$$

- اگر بردار $x \in S$ در ترتیب لغتنامه ای قبل از بردار $\hat{x} \in S$ قرار بگیرد تعریف ریاضی آن به صورت ذیل است که حرف L بالای علامت کوچکتر مبین ترتیب لغتنامه ای (Lexicographic) است.

$$x <^{L} \hat{x} \rightarrow \exists k \ni x_i = \hat{x}_i, i = 1,\dots,k-1, x_k < \hat{x}_k$$

حلقه (II) همه نقاط مجموعه S را به ترتیب لغتنامه ای تولید می کند.

- تابع $h(x), x \in S$ را یک تابع غیرکاهشی گسسته (discrete nondecreasing function) نامند اگر $\forall x \in S, \forall y \in S \ni x \ge y \rightarrow h(x) \ge h(y)$ باشد. اگر توابع مدل غیرکاهشی گسسته یا بصورت تفاضل دو تابع غیرکاهشی گسسته باشند می توان از این روش استفاده کرد.

ممکن است یک تابع بصورت پیوسته غیر کاهشی نباشد ولی بصورت گسسته غیر کاهشی باشد. برای مثال تابع یک متغیره $f(x) = x^2 - x, x \ge 0$ بصورت پیوسته تابعی غیر کاهشی نیست چونکه داریم $f(0)=0, f(1/2) = -1/4, f(1) = 0$ ولی این تابع بصورت گسسته غیر کاهشی است.

از نتایج زیر که به راحتی قابل اثبات است می توان برای تعیین غیرکاهشی بودن یک تابع استفاده کرد. فرض کنید که $g(.), h(.)$ توابع غیر کاهشی بر روی مجموعه T و a و b مقادیر ثابت غیرمنفی باشند. آنگاه هر یک از توابع $f(.)$ زیر نیز یک تابع غیر کاهشی بر روی مجموعه T می باشد [۱۲].

A. $f(.) = g(.) \pm a$.

B. $f(.) = ag(.) + bh(.)$.

C. $f(.) = \min\{g(.), h(.)\}$.

D. $f(.) = \max\{g(.), h(.)\}$.

با این فرض که $w(.)$ یک تابع غیرکاهشی یکنواخت باشد. آنگاه تابع $f(.)$ زیر نیز یک تابع غیر کاهشی بر روی مجموعه T می باشد.

E. $f(.) = w(g(.))$.

بعلاوه اگر $g(.), h(.)$ غیر منفی نیز باشند. آنگاه هر یک از توابع $f(.)$ زیر نیز یک تابع غیر کاهشی بر روی مجموعه T می باشد.

F. $f(.) = g(.)h(.)$.

G. $f(.) = g(.)^a$

- برای هر بردار x یک بردار x' تعریف می کنیم که عبارتست از برداری که در ترتیب لغتنامه ای بلافاصله بعد از x می آید. برای بدست آوردن بردار x' عدد ۱ را با بردار x مربوطه بصورت سیستم چرتکه ای جمع می کنیم.

$$x = x^k \Rightarrow x' = \begin{cases} x^{k+1} & if \quad k < N \\ Does\ not\ exist & if\ k = N \end{cases}$$

- برای هر بردار x یک بردار $x^@$ نیز تعریف می کنیم. $x^@$ بزرگترین بردار در ترتیب لغتنامه‌ای بردارها است مشروط بر اینکه کلیه بردارهائی که در ترتیب لغتنامه‌ای بین x و $x^@$ قرار می گیرند ترتیب جزئی را هم داشته باشند [۱-۳] یعنی:

$$\forall y, \quad x \leq^L y \leq^L x^@ \quad \rightarrow x \leq y \leq x^@,$$

- اگر $x = 0$ آنگاه $x^@ = u$ در غیر اینصورت برای بدست آوردن $x^@$ از سمت راست شروع کرده و اولین عنصر غیر صفر را جستجو می کنیم . فرض کنید اولین عنصر غیر صفر x_k باشد، حال در $x^@$، درایه k و درایه های سمت راست آنرا برابر حد بالا قرار داده و درایه های سمت چپ درایه k را همان مقادیر خودشان از x قرار می دهیم. یعنی

$$x = (x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_k, 0, \ldots, 0) \rightarrow x^@ = (x_1, x_2, ..., x_{k-1}, u_k, ..., u_n)$$

بعنوان مثال:

$$x = (0,0,0,0,0,0,1) \Rightarrow x^@ = (0,0,0,0,0,0,u_n)$$

$$x = (0,5,0,1,1,0,0) \Rightarrow x^@ = (0,5,0,1,u_{n-2}, u_{n-1}, u_n)$$

- برای هر $x \in S$ یک بردار $x^\# \in S$ نیز تعریف میشود:

$$x^\# = \begin{cases} (x^@)' & if\ x^@ \neq u \\ Does\ not\ exist & if\ x^@ = u \end{cases}$$

- بردار $x^\#$ اولین بردار پس از $x^@$ در ترتیب لغتنامه‌ای است که ممکن است وجود نداشته باشد. برای بدست آوردن مستقیم بردار $x^\#$ از سمت راست (آخرین مؤلفه) بردار x شروع کرده بدنبال اولین عنصر غیر صفر می گردیم، بعنوان مثال اگر x_j اولین عنصر غیر صفر باشد عنصر قبل از آن یعنی x_{j-1} را بررسی میکنیم اگر x_{j-1} درحد بالای خود بود به سراغ x_{j-2} می رویم و به همین ترتیب ادامه میدهیم تا اولین x_k پیدا شود که در حد بالایش نباشد آنگاه در $x^\#$ درایه k آنرا $x_k + 1$ قرار میدهیم. سپس همه درایه های سمت راست درایه k ام را صفر قرار داده و همه درایه های سمت چپ آنرا به همان صورت از x به $x^\#$ منتقل میکنیم.اگر همه x های قبل از x_j در حد بالای خود باشد بردار $x^\#$ وجود ندارد [۱-۳].

برای تعیین بردارهای $x^\#$ ، $x^@$ و x' بصورت زیر نیز میتوان عمل کرد. برای هر بردار $x \in S$ بردار $x^\#$ اولین بردار پس از بردار x در ترتیب لغتنامه‌ای است که $x \leq x^\#$ نباشد.

اگر بردار $x^{\#}$ وجود داشته باشد بردار $x^{@}$ اولین بردار قبل از $x^{\#}$ در ترتیب لغتنامه‌ای است و بـرای بدسـت آوردن آن عـدد ۱ را از بـردار $x^{\#}$ مربوطه بصورت سیستم چرتکه ای کم می کنیم. اگر بردار $x^{\#}$ وجود نداشته باشد بردار $x^{@}$ برابر u است.

. برای هر بردار $x \in S$ بردار x' به شکل زیر نیز بدست می اید:

$$x' = \begin{cases} (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n + 1), & if \;\; x_n < u_n \\ x^{\#} & if \;\; x_n = u_n \end{cases}$$

برای درک بهتر بردارهای x' ، $x^{@}$ و $x^{\#}$ می توان به بردار x بعنوان یک عدد در سیستم تعمیم یافته اعداد کـه در آن هـر جایگـاه آن دامنه خود را دارد، همچون اعداد طول و وزن در سیستم غیر متریک، نگاه کرد. یک حالت خاص آن موردی است که همـه جایگاهـا دامنـه یکسان از ۰ تا ۹ داشته باشند که آنگه بردار x متناظر یک عدد در سیستم اعشاری میگردد. بـا فرضـیات اخیـر و $n = 5$ اعـداد متنـاظر مجموعه S اعداد . تا ۹۹۹۹۹ میباشند. حال اگر عدد متناظر x فعلی ۳۰۴۰۰ باشد آنگاه ۳۰۴۰۱ عدد متنـاظر x' و ۳۰۹۹۹ عـدد متنـاظر $x^{@}$ آن و ۳۱۰۰۰ عدد متناظر $x^{\#}$ آن است چونکه بردار $(0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 3)$ اولین بـردار بعـد از بـردار $(0 \;\; 0 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 3)$ می باشدبطوریکه رابطه ترتیب جزئی $(0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 3) \leq (0 \;\; 0 \;\; 4 \;\; 0 \;\; 3)$ صادق نیست.

در جدول ۱ برای کلیه x های مدل (III) بردار های x' ، $x^{@}$ و $x^{\#}$ امده است.

جدول ۱: بردارهای مختلف مدل (III)

X	X'	$X^{@}$	$X^{\#}$
(0,0,0)	(0,0,1)	(2,1,2)	وجود ندارد
(0,0,1)	(0,0,2)	(0,0,2)	(0,1,0)
(0,0,2)	(0,1,0)	(0,0,2)	(0,1,0)
(0,1,0)	(0,1,1)	(0,1,2)	(1,0,0)
(0,1,1)	(0,1,2)	(0,1,2)	(1,0,0)
(0,1,2)	(1,0,0)	(0,1,2)	(1,0,0)
(1,0,0)	(1,0,1)	(2,1,2)	وجود ندارد
(1,0,1)	(1,0,2)	(1,0,2)	(1,1,0)
(1,0,2)	(1,1,0)	(1,0,2)	(1,1,0)
(1,1,0)	(1,1,1)	(1,1,2)	(2,0,0)
(1,1,1)	(1,1,2)	(1,1,2)	(2,0,0)
(1,1,2)	(2,0,0)	(1,1,2)	(2,0,0)
(2,0,0)	(2,0,1)	(2,1,2)	وجود ندارد
(2,0,1)	(2,0,2)	(2,0,2)	(2,1,0)
(2,0,2)	(2,1,0)	(2,0,2)	(2,1,0)
(2,1,0)	(2,1,1)	(2,1,2)	وجود ندارد
(2,1,1)	(2,1,2)	(2,1,2)	وجود ندارد
(2,1,2)	وجود ندارد	(2,1,2)	وجود ندارد

۵. روش پیشنهادی:

فرض شود که مساله برنامه ریزی غیر خطی با متغیرهای مقدار صحیح بصورت زیر باشد.

$$\begin{aligned}&Minimize \quad f(x)=f_1(x)-f_2(x)\\ &s.t.\begin{cases} g_i(x)=g_{i1}(x)-g_{i2}(x)\ge b_i, i=1,\ldots,m \\ x\in S, S=\{x\,|\,0\le x\le u\ , x\in z, \quad u\in z\}\end{cases} \qquad (V)\end{aligned}$$

که در آن $f_1(x)$ و $f_2(x)$ و $g_{i1}(x)$ و $g_{i2}(x)$ توابع غیرکاهشی گسسته هستند که برخی می توانند مقدار صفر داشته باشند.

در روش شمارش کامل، بردارهایی که ما باید در نظر بگیریم چنین می باشند:

$$x^1=(0,0,..,0)=0, x^2=(0,0,...,0,1),\ldots,x^{u_n+1}=(0,0,...,u_n)$$
$$x^{u_n+2}=(0,0,...,0,1,0),\ldots,x^N=(u_1,u_2,...,u_n)=u$$

بردارهای فوق دارای ترتیب لغتنامه ای می باشند، یعنی $x^1=0$ را اولین بردار و x^N را آخرین بردار می‌نامیم و بقیه نیز دارای یک ترتیب یگانه می باشند.

در روش پیشنهادی همواره از $x=0$ که کوچکترین بردار در ترتیب لغتنامه ای است شروع نموده و با رعایت دقیق ترتیب لغتنامه ای با توجه به قواعد ذیل به بردار بعدی که در ترتیب لغتنامه ای بعد از x فعلی قرار دارد میرود.

فرض شود که $\bar{x}$ بهترین جواب بدست امده تا کنون و $\bar{f}=f(\bar{x})$ باشد(در ابتدا قرار دهید $\bar{f}\leftarrow+\infty$).

از $x=0$ شروع و با استفاده از قواعد ذیل شمارش ضمنی صورت می گیرد.

قاعده ۱ . اگر در x فعلی $f_1(x)-f_2(x^@)\ge\bar{f}$ یا $\exists i, i=1,\ldots,m \ni g_{i1}(x^@)-g_{i2}(x)<b_i$ باشد با شروع از $x^\#$ شمارش را ادامه دهید. به عبارت دیگر اگر در نقطه فعلی حد پائین تابع هدف از بهترین مقدار تابع هدف بدست امده تا کنون کوچکتر نیست یا حد بالای سمت چپ محدودیت i ام از سمت راست آن کوچکتر است شمارش را از $x^\#$ ادامه دهید.

برهان: برای هر بردار y که

$$\forall y\in S\ni x\overset{L}{\le}y\overset{L}{\le}x^@ \rightarrow x\le y\le x^@ \rightarrow \begin{cases} f_k(x)\le f_k(y)\le f_k(x^@), \\ g_{ik}(x)\le g_{ik}(y)\le g_{ik}(x^@),\end{cases} i=1,\ldots,m, k=1,2$$

لذا میتوان نوشت:

$$(f_1(x)\le f_1(y)\,\&-f_2(x^@)\le -f_2(y))\Rightarrow \bar{f}\le f_1(x)-f_2(x^@)\le f_1(y)-f_2(y)$$
$$(g_{i1}(x^@)\ge g_{i1}(y)\,\&-g_{i2}(x)\ge -g_{i2}(y))\Rightarrow g_{i1}(y)-g_{i2}(y)\le g_{i1}(x^@)-g_{i2}(x)<b_i$$

پس بین x و $x^@$ هیچ برداری وجود ندارد که مقدار تابع هدف را بهبود دهد و یا در آن محدودیت صادق باشد و این بدین معنی است که بطور ضمنی تمام نقاط بین x و $x^@$ شمارش شده اند.

قاعده ۲ . اگر قاعده ۱ قابل استفاده نباشد و

$f(x)=f_1(x)-f_2(x)\ge\bar{f}$ یا $\exists i, i=1,\ldots,m \ni g_i(x)=g_{i1}(x)-g_{i2}(x)<b_i$ باشد با شروع از x' شمارش را ادامه دهید چونکه x' ممکن است نقطه قابل قبول بهتری باشد.

قاعده ۳ . اگر $f(x)=f_1(x)-f_2(x)<\bar{f}$ و $g_i(x)=g_{i1}(x)-g_{i2}(x)\ge b_i, i=1,\ldots,m$ باشد آنگاه x فعلی را نامزد جواب بهینه نامید و قرار دهید

$$\bar{f}\leftarrow f(x)$$
$$\bar{x}\leftarrow x$$

و سپس با شروع از x' شمارش را ادامه دهید چونکه x' ممکن است نقطه قابل قبول بهتری باشد.

شمارش ضمنی با استفاده از قواعد مذکور را تا آنجا ادامه دهید که میبایست به x' یا $x^\#$ نقطه فعلی رفت ولی بردار مربوطه وجود نداشته باشد و این بیانگر آنست که کلیه نقاط S بررسی شده اند. اگر مساله شدنی باشد جواب بهینه آن $\bar{x}$ و مقدار بهینه تابع هدف در $\bar{f}$ است.

توجه شود که اگر $f_2(x)=0$ فرض شود آنگاه $f(x)=f_1(x)$ است که یک تابع هدف غیرکاهشی گسسته است. همچنین اگر فرض شود $g_{i2}(x)=0$ آنگاه $g_i(x)=g_{i1}(x)$ است که یک تابع غیرکاهشی گسسته است. بنابراین مدلهائی که در آنها تابع هدف و یا برخی محدودیتها توابع غیرکاهشی گسسته هستند حالت خاصی از مدل مفروض می باشند.

در نمودار جریان عملیات روش که در ذیل امده است به موارد زیر توجه شود.

- تا زمانی که اولین نقطه شدنی در ترتیب لغتنامه ای بدست نیامده است شرط $f_1(x)-f_2(x^{@})<\bar{f}$ همواره صادق است.
- اگر تابع هدف غیرکاهشی گسسته باشد قاعده ۳ بصورت زیر در می اید.

قاعده ۳. اگر $f(x)=f_1(x)<\bar{f}$ و $\forall i, g_i(x)=g_{i1}(x)-g_{i2}(x)\geq b_i, i=1,\ldots,m$ باشد آنگاه x فعلی را نامزد جواب بهینه نامید و قرار دهید

$$\bar{f}\leftarrow f(x)$$

$$\bar{x}\leftarrow x$$

و سپس با شروع از $x^{\#}$ شمارش را ادامه دهید چونکه بین x و $x^{@}$ هیچ برداری وجود ندارد که مقدار تابع هدف را بهبود دهد.

۶. مثالهای عددی

مثال ۱: اجازه دهید مدل زیر را با استفاده از این روش حل کنیم.

$$\begin{aligned}&\text{Minimize}\quad f(x)=3x_1^3+5x_2^2+3x_3\\&s.t.\begin{cases}(x_1^2+x_2)-x_3\geq 4\\3(x_2^2+x_3)-x_1\geq 2\end{cases}\\&x_j=0,\ldots,10,\quad j=1,2,3.\end{aligned}$$

در این مثال $N=\prod_{j=1}^{3}(u_j+1)=11\times11\times11=1331$ است و تابع هدف یک تابع غیرکاهشی و محدودیتها بصورت تفاضل دو تابع غیر کاهشی به صورت ذیل می باشند:

$$f(x)=f_1(x)=3x_1^3+5x_2^2+3x_3,\ f_2(x)=0$$
$$g_{11}(x)=(x_1^2+x_2),\ g_{12}(x)=x_3$$
$$g_{21}(x)=3(x_2^2+x_3),\ g_{22}(x)=x_1$$

از نقطه $x=0$ با $x^{@}=u$ شروع کنید. در نقطه $x^{@}$ حد بالای سمت چپ هر محدودیت از سمت راست آن بزرگتر است. لذا بین بردارهای $x=0$ و $x^{@}=u$ ممکن است برخی بردارها در محدودیتها صادق باشند. هدف تعیین کوچکترین آنها در ترتیب الفبائی با توجه به x فعلی است.

ایا $x=0$ شدنی است؟ خیر لذا با توجه به قاعده ۲ به $x=(0,0,1)$ با $x^{@}=(0,0,10)$ بروید. در این نقطه جدید حد بالای سمت چپ محدودیت اول از سمت راست آن کوچکتر است. در نتیجه با توجه به قاعده ۱ به $x\leftarrow x^{\#}=(0,1,0)$ با $x^{@}=(0,10,10)$ بروید. در این نقطه جدید قاعده ۲ قابل استفاده است لذا با $x\leftarrow x'=(0,1,1)$ با $x^{@}=(0,1,10)$ شمارش را ادامه دهید. در جدول شماره ۲ بردارهای جدید و قاعده مربوطه مشخص شده اند. در ستون اخر جدول شماره ۲ قاعده ۳ نشانگر آنست که نقطه مربوطه یک جواب شدنی بهتر است. لذا $\bar{x}=(0,4,0)$ اولین جواب شدنی در ترتیب الفبائی است و $\bar{x}=(1,3,0)$ جواب شدنی بهتر از آن و $\bar{x}=(2,1,1)$ جواب بهینه مساله مذکور است.

مثال ۲: مدل کوله پشتی خطی زیر را در نظر بگیرید (برای حل این مدل با استفاده از DOS-QSB به جواب غیر صحیح رسیدیم).

$$Minimize \quad f(x) = 11111x_1 + 9123x_2 + 2345x_3 + 1928x_4 + 213x_5$$

$$Subject\ to: \sum_{j=1}^{5} a_j x_j = 366x_1 + 855x_2 + 611x_3 + 123x_4 + 122x_5 = b$$

$$x \geq 0\ and\ x\ \text{integer}$$

در مدل خطی مذکور توابع هدف و محدودیت غیر کاهشی هستند. برای حل این مدل ما تنها محدودیت آنرا که بصورت معادله است با دو نا معادله جایگزین می کنیم و از معادله مذکور حدود بالای متغیرها $u_j = \lfloor b/a_j \rfloor$ بدست می آید.

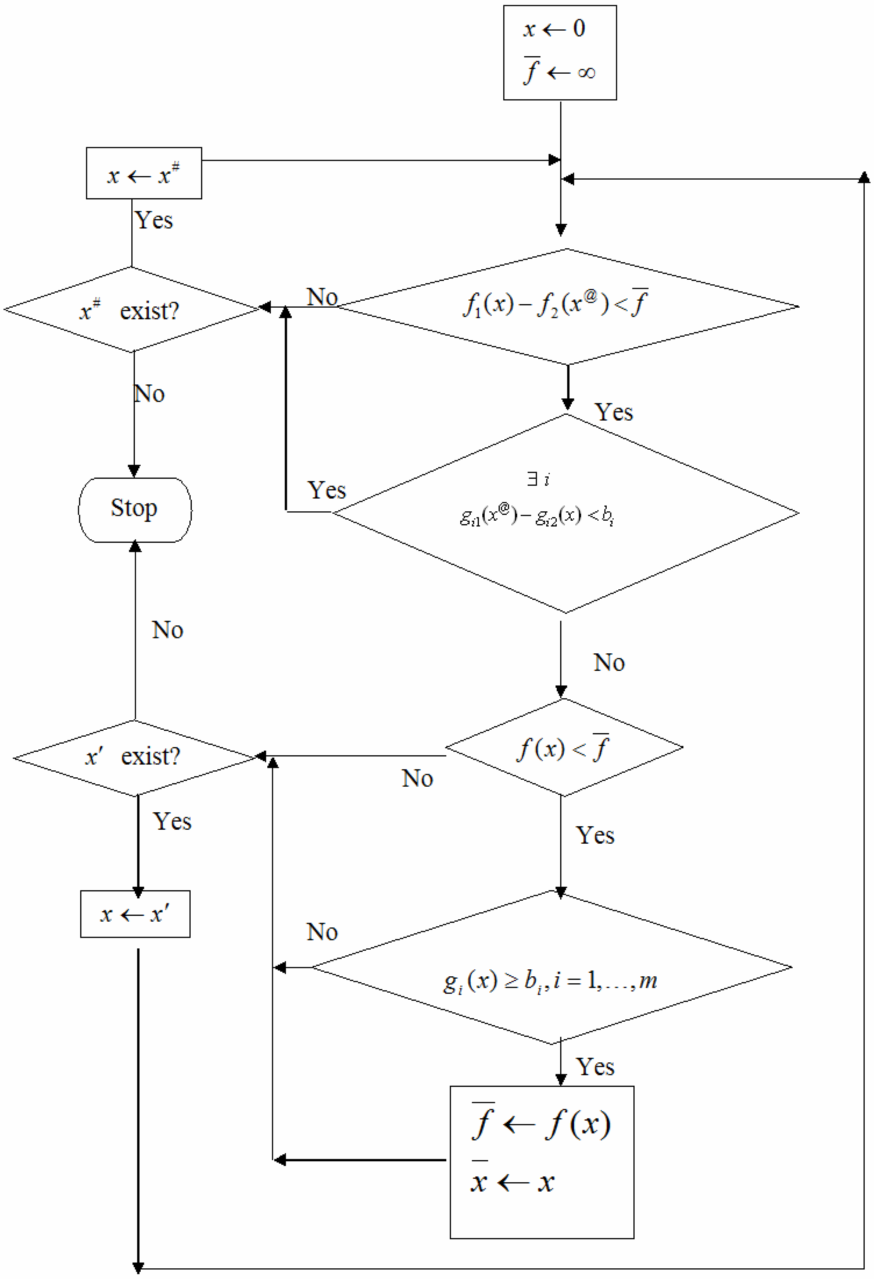
$$366x_1 + 855x_2 + 611x_3 + 123x_4 + 122x_5 \geq b$$

$$-(366x_1 + 855x_2 + 611x_3 + 123x_4 + 122x_5) \geq -b$$

الف – قرار دهید $b = 20770$ آنگاه با استفاده از این روش جواب بهینه $f(x) = 74610, x = (0 \quad 0 \quad 30 \quad 0 \quad 20)$ در ۰/۲ ثانیه بدست می آید. اگر این مدل را با استفاده از LINGO حل کنیم در ۱۳۰ ثانیه به همان جواب می رسیم.

ب – برای $b = 89643$ با استفاده از این روش جواب بهینه $f(x) = 277942, x = (0 \quad 0 \quad 95 \quad 0 \quad 259)$ در ۷۸ ثانیه بدست می آید. اگر این مدل را با استفاده از LINGO حل کنیم بعد از گذشت ۱۲۶ ثانیه حافظه رایانه تمام و اجرای برنامه متوقف می گردد و جواب غیربهینه $f(x) = 318832, x = (0 \quad 0 \quad 1 \quad 94 \quad 635)$ بهترین جواب قبل از توقف است.

نمودار جریان عملیات (flowchart) این روش حل بصورت زیر است:



جدول ۲: فهرست بردارهای تولید شده برای مثال ۱ با N= ۱۳۳۱ بردار در مکعب مستطیل مربوطه

x	$x^{@}$	$x^{\#}$	x'	شماره قاعده
(0,0,0)	(10,10,10)		(0,0,1)	۲
(0,0,1)	(0,0,10)	(0,1,0)		۱
(0,1,0)	(0,10,10)		(0,1,1)	۲
(0,1,1)	(0,1,10)	(0,2,0)		۱
(0,2,0)	(0,10,10)		(0,2,1)	۲
(0,2,1)	(0,2,10)	(0,3,0)		۱
(0,3,0)	(0,10,10)		(0,3,1)	۲
(0,3,1)	(0,3,10)	(0,4,0)		۱
$\bar{x} = (0,4,0),\ f(\bar{x}) = 80$	(0,10,10)	(1,0,0)		۳
(1,0,0)	(10,10,10)		(1,0,1)	۲
(1,0,1)	(1,0,10)	(1,1,0)		۱
(1,1,0)	(1,10,10)		(1,1,1)	۲
(1,1,1)	(1,1,10)	(1,2,0)		۱
(1,2,0)	(1,10,10)		(1,2,1)	۲
(1,2,1)	(1,2,10)	(1,3,0)		۱
$\bar{x} = (1,3,0),\ f(\bar{x}) = 48$	(1,10,10)	(2,0,0)		۳
(2,0,0)	(10,10,10)		(2,0,1)	۲
(2,0,1)	(2,0,10)	(2,1,0)		۱
(2,1,0)	(2,10,10)		(2,1,1)	۲
$\bar{x} = (2,1,1),\ f(\bar{x}) = 32$	(2,1,10)	(2,2,0)		۳
(2,2,0)		(3,0,0)		۱
(3,0,0)		وجود ندارد		۱

مثال ۳: اجازه دهید مدل (IV) را با استفاده از این روش حل کنیم.
در مدل مذکور تابع هدف و توابع محدودیتهای اول و سوم غیرکاهشی و تابع محدودیت دوم بصورت تفاضل دو تابع غیر کاهشی هستند. مقدار u حد اقل ۷ می بایست باشد تا محدودیت اول صادق گردد. این مساله برای u از ۷ تا ۵۰ حل شده است که خلاصه نتایج آن در جدول ۳ امده است. با نگاه به ستون زمان حل شمارش کامل روشن می شود که با بالا رفتن u زمان حل به شدت بالا می رود بطوریکه برای u = ۱۷ نزدیک به ۶ ساعت بر روی پنتیوم ۴ وقت صرف شده است ولی در مقابل زمان حل شمارش ضمنی آن ۶ ثانیه شده است. توجه شود که برای مقادیر $u \leq 17$ که هم شمارش کامل و هم شمارش ضمنی انجام شده است نتایج در همه موارد بجز زمان حل تطابق دارند.
برای u های بزرگتر از ۱۷ بخاطر طولانی بودن زمان حل در شمارش کامل، اجرای برنامه متوقف شده است و بجای زمان حل "***" نوشته شده است.

در این مساله برای ۵۰ = u ،با $N=\prod_{j=1}^{8}\left(50+1\right) = 45,767,944,570,401$ نقطه، بررسی انجام شده نشان میدهد که در هر ثانیه حدود ۱،۰۰۰،۰۰۰ نقطه در شمارش کامل بررسی میگردد. لذا تخمین زمان حل شمارش کامل حدود ۱۷ ماه میباشد یعنی مقدار((۱،۰۰۰،۰۰۰)(۳۶۰۰)(۲۴)(۳۰))/N تقریبا ۱۷ می باشد که قابل مقایسه با زمان حل شمارش ضمنی ۳/. ثانیه آن نیست.
در ستون اخر جدول ۳ ملاحظه می شود که برای u از ۷ تا ۲۴ زمان حل روند صعودی دارد ولی برای u از ۲۵ تا ۵۰ زمان حل روند نزولی را نشان می دهد. دلیل این امر آنست که برای این مقادیر u، مقدار تابع هدف اولین جواب شدنی در ترتیب الفبائی (و یا جوابهای شدنی بعد از آن) جوابهای بسیار خوبی شده اند و این امر سبب گردیده است تا قاعده ۱ در مورد تابع هدف زیاد مورد استفاده قرار گیرد.

مثال ۴: مدل کوله پشتی غیرخطی زیر را در نظر بگیرید.

$$Maximize\ f(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_4^2 - 5x_3^2 - 3x_5^2$$
$$\Rightarrow Minimize\quad -f(x) = f_1(x) - f_2(x) = (5x_3^2 + 3x_5^2) - (x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_4^2)$$
$$Subject\ to: \sum_{j=1}^{5} a_j x_j = 366x_1 + 855x_2 + 611x_3 + 123x_4 + 122x_5 = 20770$$
$$x \ge 0\ and\ x\ \text{integer}$$

در مدل غیرخطی مذکور تابع هدف به صورت بیشینه است که ما آنرا به صورت کمینه تبدیل کرده و به صورت تفاضل دو تابع غیر کاهشی در نظر می گیریم. محدودیت غیر کاهشی آن همان محدودیت مثال ۲- الف است که شرح داده شد. با استفاده از این روش جواب بهینه $x = (5\quad 0\quad 0\quad 152\quad 2), -f(x) = -115533 \Rightarrow f(x) = 115533,$ در ۴۳ ثانیه بدست می آید.

جدول ۳. نتایج مربوط به مدل (IV) برای u های مختلف

حد بالای متغیرها u	تعداد کل نقاط ابر مکعب مستطیل $N=(u+1)^8$	مقدار تابع هدف اولین جواب شدنی در ترتیب الفبائی	جواب بهینه	مقدار بهینه تابع هدف $f(\bar{X})$	زمان حل به ثانیه: شمارش کامل	زمان حل به ثانیه: شمارش ضمنی
7	16,777,216	31,152	(7,4,7,7,7,4,7,7)	18,698	23.4	0.0
8	43,046,721	75,016	(8,6,3,7,8,2,8,8)	8,947	58.7	0.2
9	100,000,000	265,266	(8,7,0,8,9,0,9,9)	3,618	130.7	0.3
10	214,358,881	1,049,533	(6,7,0,8,9,0,10,10)	2,176	273.3	0.3
11	429,981,696	4,194,654	(4,7,0,8,9,0,11,11)	1,458	545.1	0.4
12	815,730,721	16,777,521	(3,7,0,8,8,0,12,12)	1,063	1033.3	0.4
13	1,475,789,056	4,194,659	(2,7,0,8,7,0,13,13)	890	1865.4	0.5
14	2,562,890,625	1,048,985	(2,6,0,8,5,1,14,14)	816	5429.1	0.9
15	4,294,967,296	262,611	(2,6,0,6,2,4,15,15)	762	8806.2	1.8
16	6,975,757,441	66,065	(2,6,0,4,0,6,16,16)	744	13926.5	3.7
17	11,019,960,576	16,979	(1,6,0,4,0,6,16,17)	741	21461.4	6.0
18	16,983,563,041	4,761	(2,6,0,4,0,6,18,14)	736	***	8.9
19	25,600,000,000	1,763	(2,6,0,5,0,6,19,12)	724	***	11.8
20	37,822,859,361	1,073	(2,6,0,5,0,6,20,11)	708	***	14.5
21	54,875,873,536	963	(2,6,0,5,0,6,21,10)	688	***	16.9
22	78,310,985,281	1,001	(2,6,0,5,0,6,22,9)	664	***	18.4
23	110,075,314,176	1,079	(2,6,0,6,0,6,23,7)	634	***	19.3
24	152,587,890,625	1,170	(2,6,0,6,0,6,24,6)	600	***	19.6

ادامه جدول ۳. نتایج مربوط به مدل (IV) برای u های مختلف

حد بالای متغیرها u	تعداد کل نقاط ابر مکعب مستطیل $N=(u+1)^8$	مقدار تابع هدف اولین جواب شدنی در ترتیب الفبائی	جواب بهینه	مقدار بهینه تابع هدف $f(\bar{X})$	زمان حل به ثانیه	
					شمارش کامل	شمارش ضمنی
25	208,827,064,576	1,168	(2,6,0,6,0,6,25,5)	562	***	19.1
26	282,429,536,481	1,162	(2,6,0,6,0,6,26,4)	520	***	18.3
27	377,801,998,336	67,110,327	(2,6,0,7,0,6,27,2)	472	***	16.7
28	500,246,412,961	16,778,789	(2,6,0,7,0,6,28,1)	420	***	14.7
29	656,100,000,000	4,195,991	(2,6,0,7,0,6,29,0)	364	***	12.4
30	852,891,037,441	1,050,381	(2,6,0,6,0,6,30,0)	312	***	10.3
31	1,099,511,627,776	264,071	(2,6,0,5,0,6,31,0)	268	***	8.1
32	1,406,408,618,241	67,589	(2,6,0,4,0,6,32,0)	232	***	6.2
33	1,785,793,904,896	18,567	(1,6,0,4,0,6,33,0)	197	***	4.7
34	2,251,875,390,625	6,413	(1,5,0,4,0,6,34,0)	165	***	3.5
35	2,821,109,907,456	3,479	(1,5,0,4,0,5,35,0)	133	***	2.5
36	3,512,479,453,921	2,853	(1,5,0,3,0,5,36,0)	105	***	1.8
37	4,347,792,138,496	2,807	(1,5,0,2,0,5,37,0)	85	***	1.2
38	5,352,009,260,481	2,909	(1,4,0,2,0,5,38,0)	69	***	0.9
39	6,553,600,000,000	3,051	(1,4,0,2,0,4,39,0)	53	***	0.6
40	7,984,925,229,121	3,206	(1,4,0,1,0,4,40,0)	41	***	0.4
41	9,682,651,996,416	3,204	(1,3,0,1,0,4,41,0)	33	***	0.3
42	11,688,200,277,601	3,198	(1,3,0,1,0,3,42,0)	25	***	0.2
43	14,048,223,625,216	3,188	(0,3,0,1,0,3,43,0)	20	***	0.3
44	16,815,125,390,625	3,174	(0,2,0,1,0,3,44,0)	16	***	0.2
45	20,047,612,231,936	3,156	(0,2,0,0,0,3,45,0)	12	***	0.1
46	23,811,286,661,761	3,134	(0,2,0,0,0,2,46,0)	8	***	0.1
47	28,179,280,429,056	3,108	(0,2,0,0,0,1,47,0)	6	***	0.3
48	33,232,930,569,601	3,078	(0,2,0,0,0,0,48,0)	5	***	0.2
49	39,062,500,000,000	3,044	(0,2,0,0,0,0,48,0)	5	***	0.2
50	45,767,944,570,401	3,006	(0,2,0,0,0,0,48,0)	5	***	0.3

۷. بحث و نتیجه گیری

همانطور که ملاحظه شد روش پیشنهادی در این مقاله روشی کارا برای مسائل کوچک برنامه ریزی با متغیرهای مقدار صحیح است. امـا بـا افزایش تعداد متغیرها و یا دامنه آنها تعداد نقاط موجود در ابر مکعب مستطیل مربوطه که تعـداد آنهـا $N=\prod_{j=1}^{n}\left(u_j+1\right)$ اسـت بـشدت افزایش می یابد. لذا هر اندازه هم که شمارش ضمنی بتواند نقاط زیادی را بطور ضمنی شمارش کند بازهم برای مسائل بزرگ نقـاط بـسیار زیادی می بایست بررسی گردند که اینکار بسیار وقت گیر است و نمی توان آن مسائل را در زمان مناسبی حل کرد.

روش شمارش ضمنی هنگامی توصیه میگردد که مساله بزرگ نباشد و قاعده ۱ زیاد کاربرد پیدا کند یعنی اینکه تابع هدف غیرکاهشی گسسته باشد یا حد اقل $f_1(x)$ صفر نباشد و همچنین تعداد قابل ملاحظه ای از b_i ها مثبت باشند

منابع و مراجع

1. Lawler E.L. and Bell M.D. A method for solving discrete optimization problems. Operations Res. 14 (1966), pp. 1098-1112.
2. Sasaki M., Kaburaki S., and Yanagi S. System availability and optimum spare units. IEEE Trans. Reliability R-26 (1977), pp. 182–188.
3. Sabbagh M.S. A general lexicographic partial enumeration algorithm for the solution of integer nonlinear programming problems. D.Sc. Dissertation, The George Washington University, Washington, D.C. (1983).
4. Soland R.M. Optimal defensive missile allocation: a discrete min-max problem. Operations Research 21 (1973), 590-596.
5. Tillman F.A., Hwang C.L., Fan L.T., and Balbale S.A. System reliability subject to multiple nonlinear constraints. IEEE Trans. Reliability R-17 3 (1968), pp. 153–157.
6. Vanston J.H., Nichols S.P., and Soland R.M. PAF – A new probabilistic, computer-based technique for technology forecasting. Technological Forecasting and Social Change 10 (1977), 239-258.
7. Balana A.R., Gross D., and Soland R.M. Optimal provisioning for single-echelon repairable item inventory control in a time-varying environment. IIE Transactions 21 (1989), 202-212.
8. Chern M. and Jon R. Reliability optimization problems with multiple constraints. IEEE Trans. Reliability R-35 4 (1986), pp. 431–436.
9. Gross D., Miller D.R., and Soland R.M. A closed queueing network model for multi-echelon repairable item provisioning. IIE Transactions 15 (1983), 344-352.
10. Srivastava V.K. and Fahim A. A two-phase optimization procedure for integer programming problems. Computers & Mathematics with Applications 12 (2000), pp. 1585-1595.
11. Aardal K., Weismantel R., and Wolsey L.A. Non-standard approaches to integer programming. Discrete Applied Mathematics, Nov 2002.
12. Apostol T. M. Mathematical Analysis, Second Edition, Addison Wesley Publishing Company, Reading MA (1975), pp. 127-133.