ارائه یک الگو برای تجزیه و ترکیب مسائل برنامه ریزی تولید چند مرحله ای – چند محصولی و چند پریودی با محدودیت ظرفیت تولید

حسن خادمی زارع(۱) و سید محمد تقی فاطمی قمی(۱)

(۱) دانشکده مهندسی صنایع، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، تهران، ایران

چکیده

مسئله تعیین اندازه انباشته پویا و بهینه در برنامه ریزی تولید چند مرحله ای، چند محصولی و چند پریودی یکی از مهم ترین و در عین حال مشکل ترین مسائل تصمیم گیری می باشد. تاکنون الگوریتم های بهینه و ابتکاری متنوعی برای حل مسئله تعیین اندازه انباشته در اینگونه مسائل برنامه ریزی تولید ارائه شده است. در این مقاله یک روش کارا جهت تجزیه یک مسئله برنامه ریزی تولید چند مرحله ای، چند محصولی و چند پریودی با محدودیت ظرفیت تولید به n مسئله تک محصولی ارائه شده است. این روش تجزیه بر پایه ضرایب لاگرانژ و استفاده بهینه از منابع کمیاب در بین مراحل مختلف فرآیند تولید است تا مسئله تعیین اندازه انباشته تولید در چند مرحله ای، چند محصولی و چند پریودی ساده تر گردد. بدین جهت در این مقاله یک مدل ریاضی برای مسائل برنامه ریزی تولید n محصول ارائه و به n مسئله یک محصولی مستقل تجزیه شده است. بعد از ارائه یک مدل ریاضی تک محصولی برای هر یک از محصولات، با مقایسه ظرفیت تخصیص داده شده و استفاده شده، برای هر یک از محصولات، میزان ظرفیت باقیمانده هر یک از محصولات محاسبه و تعدیلات لازم انجام می شود. بر این اساس در طی چند مرحله تعدیل ظرفیت های باقیمانده جواب مطلوب مسئله اصلی حاصل شده است.

واژه های کلیدی: اندازه انباشته پویا، برنامه ریزی تولید چند مرحله ای، محدودیت ظرفیت تولید، منابع کمیاب، تجزیه و ترکیب ، ضرایب لاگرانژ.

۱- مقدمه

معمول ترین سیستم ها در دنیای ساخت و تولید، برنامه ریزی سیستم های تولید چند محصولی، چند پریودی و چند مرحله ای می باشد [۳ و ۲ و ۱]. تصمیمات مدیریتی در برنامه ریزی سیستم های تولید چند مرحله ای را بطور کلی می توان در سه دسته مسائل تصمیم گیری بلند مدت، میان مدت و کوتاه مدت تقسیم بندی نمود [۴]. آن بخشی از تصمیمات مدیریتی که در برنامه ریزی تولید بیشتر مورد نظر است. تصمیمات میان مدت بوده که تعیین اندازۀ انباشته از جمله مسائل مهم آن است، زیرا در سیستم های تولید چند محصولی، چند مرحله ای بعد از راه اندازی هر یک از مراحل برای هر یک از محصولات، عملیات تولیدی بر روی انباشته ای از آن محصول صورت می گیرد [۶ و ۵]. یکی از مهمترین و بهترین راههای کنترل هزینه های تولید، تصمیم گیری صحیح در مورد تعیین انباشته تولید هر یک از محصولات، در هر یک از مراحل تولید است. زیرا در سیستم های تولید چند مرحله ای موجودیهای در جریان ساخت، هزینه زیادی به سیستم تحمیل می نماید [۸ و ۷]، لذا کنترل میزان این موجودی ها از اهمیت ویژه ای برخوردار است. هرچند بعنوان یک اصل می توان گفت هر چه اندازه انباشته بیشتر باشد، زمان سیکل کاری طولانی تر شده و به تبع آن میزان موجودی بین مراحل و هزینه نگهداری افزایش می یابد [۹] ، ولی از جهت دیگر با افزایش میزان انباشته تولیدی هزینه راه اندازی کاهش می یابد.

بر این اساس تلفیق سیاستهای سفارش دهی و تعیین اندازۀ تولیدی در هر یک از مراحل با درنظرگرفتن محدودیت منابع، هزینه های کل سیستم را حداقل می نماید [۱۰]. عموماً روش لاگرانژ یکی از روشهای حل مسائل بهینه سازی عملی است که راه حلهای کاملاً نزدیک به جواب بهینه ارائه می کند [۱۱]. "فیشر" برای اولین بار به تشریح این روش پرداخت و کاربردهایی از آنرا ارائه نمود [۱۲]. "افنتاکیس و گاویش" با تکیه و بکارگیری Echelon بدون در نظر گرفتن محدودیت منابع اقدام به ارائه مدلی برای حالت سیستم های تولیدی پیچیده نمود و با بکارگیری ضرایب لاگرانژ و بهبود بخشیدن آنها در مراحل تکرار و با تعریف یک حد پائین به توسعۀ یک روش انشعاب و تحدید پرداخته است [۱۳]. "فرانکاوپالو" جهت تعیین

اندازهٔ انباشته در سیستم های چند مرحله ای یک مدل هیورستیک با استفاده از ضرایب لاگرانژ ارائه داده اند. [۱۴]. "دومارو باروسگو" با استفاده از روشهای ابتکاری ترکیبی برای تعیین اندازه انباشته تولید در سیستم های تولید چند مرحله ای استفاده نمود [۱۵]. "شاوکای وابواتا" جهت تعیین اندازه انباشته در سیستم های تولید یک مرحله ای، یک محصولی با محدودیت ظرفیت از روش هندسی استفاده کرده اند. ایشان تقاضا را ثابت فرض کرده و به کمک ضرایب لاگرانژ و مدل پایه EOQ مجموع هزینه های نگهداری و سفارشات را حداقل نموده است [۱۶]. "جوزف و روس" جهت تعیین اندازه انباشته در سیستم های تولید چند مرحله ای با ساختار مونتاژی و بدون محدودیت ظرفیت تولید جهت یک محصول چند قطعه ای از ضرایب لاگرانژ استفاده نمود [۱۷]. "مارلی و صالح" جهت تعیین اندازه انباشته در سیستم های تولید چند کارخانه ای، چندمحصولی و با تقاضای پویا و محدودیت ظرفیت از ترکیب ضرایب پایه لاگرانژ و روشهای هیورستیک استفاده نمود [۱۸].

همانطور که مشخص شده است روش لاگرانژ یکی از روشهای حل مسائل بهینه سازی محسوب می گردد، زیرا جواب نزدیک به بهینه را ارائه داده و به صورت گسترده مورد استفاده قرار گرفته است.

۲- مدل اصلی ریاضی

در این بخش به تشریح مدل اصلی ریاضی برنامه ریزی تولید چند مرحله ای – چند محصولی و چند پریودی با محدودیت ظرفیت می پردازیم. در این مسئله محصولات مختلف در تخصیص منابع محدود با یکدیگر رقابت می کنند، لذا می بایست با توجه به محدودیت منابع، دسته های تولیدی در هر یک از مراحل و پریودها بگونه ای تعیین گردد که تقاضای تمامی محصولات در پریودهای مختلف برآورده شود. در این مدل سیستم تولیدی بصورت سری فرض شده و در هر مرحله تولید محدودیت ظرفیت وجود دارد. کمبود موجودی یا سفارشات عقب افتاده مجاز نبوده و تقاضای هر پریود معین ولی متغیر است. همچنین می بایست برای همه محصولات در پریود اول حداقل به میزان تقاضای پریود اول تولید وجود داشته باشد. زیرا در غیراینصورت با کمبود مواجه خواهیم شد. حال با هدف حداقل نمودن مجموع هزینه های نگه داری و راه اندازی در یک افق برنامه ریزی محدود، پارامترها و متغیرهای تصمیم گیری مربوط به این مدل تشریح می گردد.

متغیرهای تصمیم گیری و پارامترها:

X_{ijt} = میزان تولید محصول i در مرحله j و پریود t

I_{ijt} = میزان موجودی محصول i در مرحله j در انتهای پریود t

$Y_{ijt} = \begin{cases} 1 & \text{اگر محصول i در مرحله j و در پریود t تولید شود.} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$

d_{it} = میزان تقاضای محصول i در پریود t

C_{jt} = زمان در دسترس برای انجام مرحله j در پریود t

a_{ij} = زمان تولید محصول i در مرحله j

A_{ijt} = هزینه راه اندازی برای تولید محصول i در مرحله j و پریود t

V_{ijt} = هزینه متغیر تولید محصول i در مرحله j و پریود t

H_{ijt} = هزینه نگهداری هر واحد محصول i در مرحله j و پریود t

S_{ij} = زمان راه اندازی برای تولید محصول i در مرحله j

براساس پارامترها و متغیرهای تصمیم گیری، تابع هدف و محدودیت های این مدل بصورت زیر تعریف می گردد:

تابع هدف:

$$Min \quad Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{t=1}^{T}\left[A_{ijt}.Y_{ijt} + V_{ijt}.X_{ijt} + H_{ijt}.I_{ijt}\right] \qquad (۱)$$

محدودیت ها:

$$I_{i,m,t-1} + X_{i,m,t} - I_{i,m,t} = d_{it} \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad t = 1,2,\ldots,T \qquad (۲)$$

$$I_{i,j,t-1} + X_{i,j,t} = I_{i,j,t} + X_{i,j+1,t} \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad j = 1,2,\ldots,m-1 \qquad t = 1,2,\ldots,T \qquad (۳)$$

$$\sum_{i=1}^{n}(X_{ijt}.a_{ij}) + S_{ij} \le Y_{ijt}.C_j \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad j = 1,2,\ldots,m \qquad t = 1,2,\ldots,T \qquad (۴)$$

$$(X_{ijt}, I_{ijt}) \ge 0 \qquad , \quad Y_{i,j,t} = 0,1 \qquad (۵)$$

در مدل ارائه شده، رابطه (۱) بیانگر تابع هدف است که مجموع هزینه های راه اندازی، متغیر تولید و نگه داری را حداقل می نماید و رابطه (۲) تضمین کننده تامین تقاضا در هر پریود است. رابطه (۳) نشان می دهد که مجموع جریان خارج شده از هر گره (i,j,t) در یک شبکه مساوی، مجموع جریان وارد شده به آن گره است. رابطه (۴) مانع از افزایش تولید به میزان بیشتر از ظرفیت موجود است و رابطه (۵) بیانگر وضعیت متغیرها است.

همان طور که ملاحظه می گردد محدودیت های مدل ریاضی دارای ساختارهای متفاوت هستند. این امر سبب NP-hard شده مدل مذبور می گردد، لذا جهت حل مسئله می بایست از روش های هیورستیک استفاده نمود [۹].

۳- تجزیه مدل ریاضی چند محصولی بهn مدل ریاضی مسئله تک محصولی

در مورد مسائلی که دارای چندین دسته محدودیت با ساختارهای متفاوت هستند، معمولاً این سوال مطرح می گردد. که کدام دسته از محدودیت ها باید بعنوان عامل تجزیه در نظر گرفته شود. در پاسخ به این سوال باید رابطه متضادی را که بین عوامل زیر برقرار است در نظر گرفت [۱۹].

الف – قدرت حد حاصل از ترکیب جواب مسائل

ب – سهولت تجزیه مسئله اصلی به مسائل فرعی

ج – سهولت حل هر یک از مسائل فرعی

در مدل اصلی ریاضی مشاهده می شد که تنها محدودیت سوم (رابطه ۴) در ارتباط با همه محصولات است و در مسئله دوگان این محدودیت با یک مجموعه از مضارب لاگرانژ λ_{jt} مواجه است که این امر موجب پیروی تابع هدف از روابط (۲و۳و۵) می گردد. بدین ترتیب مسئله ترکیبی چند محصولی به n مسئله یک محصولی تبدیل می شود.

در این مدل از نظر عامل (الف) جواب حاصل لزوماً بهینه نیست زیرا :

$$Convex\left\{X : Min(\sum_{i=1}^{n} X_{ijt}.a_{ij} + S_{ij} - Y_{ijt}.C_{jt}) \qquad j=1,2,...m \qquad t=1,2,...,T\right\}$$

$$\underset{-}{C}\left\{X : (\sum_{i=1}^{n} X_{ijt}.a_{ij} + S_{ij} \leq Y_{ijt}.C_{jt}) \qquad j=1,2,...m \qquad t=1,2,...,T\right\}$$

یعنی حد حاصل از مسئله فرعی قوی تر از حد حاصل از آزادسازی خطی است. به عبارت دیگر حد پائین تابع هدف جهت هر یک از مسائل فرعی کوچکتر یا مساوی با حد پائین تابع هدف مسئله اصلی است، یعنی $(W_{LD} \leq Z_{LD})$. از نظر عامل (ب) تجزیه مسئله اصلی باعث ایجاد n مسئله یک محصولی مستقل می شود. از نظر عامل (ج) هر یک از مسائل مستقل دارای m متغیر است که حل آن نسبت به حالت قبل که در آن nm متغیر تصمیم گیری وجود دارد، بمراتب آسان تر است.

در مورد استفاده از روش تجزیه بر پایه ضرایب لاگرانژ برای سایر محدودیت ها شرایط فوق (الف، ب و ج) برقرار نیست، زیرا اولاً بدلیل وجود متغیرهای آزاد در علامت (ضرایب لاگرانژ) برای هر یک از محدودیت های مساوی، مسائل پیچیده تری بوجود می آید. ثانیاً نمی توان مسئله را به n مسئله مستقل تجزیه نمود [۱۹]. در این رابطه تیزی نشان داده است که اولاً ساده سازی لاگرانژ نسبت به سایر ساده سازیها دقیق تر عمل می کند و ثانیاً ساده سازی لاگرانژ محدودیت ظرفیت، در مقایسه با سایر محدودیت ها قوی ترین حد پائین را نسبت به جواب بهینه ارائه می دهد. ثالثاً استفاده از تکنیک تجزیه بر پایه ضرایب لاگرانژ منابع کمیاب، در مدلهای برنامه ریزی تولید چند مرحله ای باعث ساده سازی مدل اصلی به n مسئله مستقل خواهد شد [۲۰].

برای تجزیه مسئله اصلی به n مسئله تک محصولی ابتدا متوسط زمان تولید محصولات توسط رابطه (۶) محاسبه می شود:

$$\bar{a}_j = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} a_{ij} \quad , \quad j=1,2,...,m \tag{۶}$$

a_j: متوسط زمان تولید محصول در ایستگاه j

سپس برای تعیین ایستگاه گلوگاه (q) از رابطه (۷) استفاده می شود:

$$q = Min\left\{\frac{C_1}{\bar{a}_1}, \frac{C_2}{\bar{a}_2}, \ldots, \frac{C_m}{\bar{a}_m}\right\} \quad (۷)$$

با فرض انتخاب ایستگاه j بعنوان ایستگاه گلوگاه، تخصیص ظرفیت به محصولات به نسبت میزان مصرف ظرفیت در ایستگاه (j) از رابطه (۸) بدست می آید.

$$R_i = \frac{\bar{d}_i . a_{ij}}{\sum_{i=1}^{m} \bar{d}_i . a_{ij}} \qquad \text{j = ایستگاه گلوگاه} \quad (۸)$$

در رابطه (۸) مقدار $\bar{d}_i = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} d_{it}$ متوسط مصرف محصول i در پریودهای $t = 1,2,\ldots,T$ است که براساس مفهوم شناخته شده مقدار سفارش اقتصادی (EOQ) ویلسون [۲۱] بنا شده است که در آن متوسط تقاضا در هر پریود جهت هر یک از محصولات بصورت یکنواخت فرض شده است.

با توجه به نسبت میزان مصرف ظرفیت برای هر یک از محصولات (R_i) در ایستگاه گلوگاه (j)، ماتریس C_{ij} را بصورت رابطه (۹) تشکیل می گردد.

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_1R_1 & C_2R_1 & \ldots\ldots & C_mR_1 \\ C_1R_2 & C_2R_2 & \ldots\ldots & C_mR_2 \\ & & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ & & . & . \\ C_1R_n & C_2R_n & \ldots\ldots & C_mR_n \end{bmatrix} \quad (۹)$$

هر سطر ماتریس فوق بیانگر ظرفیت تفکیک شده برای هر یک از محصولات در مراحل مختلف است.

۴- مدل ریاضی یک محصولی

پس از تجزیه مدل ریاضی چند محصولی به n مدل ریاضی تک محصولی، مدل برنامه ریزی تولید چند مرحله ای و چند پریودی هر یک از محصولات با محدودیت ظرفیت تولید $(C_1R_i, C_2R_i, \ldots, C_mR_i) = (C'_1, C'_2, \ldots, C'_m)$ بصورت زیر خواهد بود. متغیرهای تصمیم گیری و پارامترهای مربوط به این مدل بشرح زیر است.

A_{jt} = هزینه راه اندازی مرحله j در پریود t

X_{jt} = میزان تولید مرحله j در پریود t

V_{jt} = هزینه متغیر تولید مرحله j در پریود t

h_{jt} = هزینه نگهداری مرحله j در پریود t

I_{jt} = میزان موجودی مرحله j در پایان پریود t

C'_j = میزان ظرفیت تولید در مرحله j

D_t = میزان تقاضای محصول نهائی در پریود t

$Y_{jt} = \begin{cases} 1 & \text{اگر محصول در مرحله j و پریود t تولید شود.} \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}$

براساس متغیرهای تصمیم گیری و پارامترهای فوق الذکر، تابع هدف و محدودیت ها بصورت زیر خواهد بود.

تابع هدف:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{m} \sum_{t=1}^{T} \left[A_{j,t}.Y_{j,t} + V_{j,t}.X_{j,t} + h_{j,t}.I_{j,t} \right] \qquad (۱۰)$$

محدودیت ها:

$$I_{m,t-1} + X_{m,t} - I_{m,t} = D_t \qquad t = 1,2,\dots,T \qquad (۱۱)$$

$$I_{j,t-1} + X_{j,t} - I_{j,t} - X_{j+1,t} = 0 \qquad t = 1,2,\dots,T \qquad j = 1,2,\dots,m-1 \qquad (۱۲)$$

$$X_{j,t} \le Y_{j,t}.C'_j \qquad (۱۳)$$

$$\left(X_{j,t}, I_{j,t}\right) \ge 0 \qquad (۱۴)$$

$$Y_{j,t} = \begin{cases} 1 & IF \quad X_{j,t} > 0 \\ 0 & O.W \end{cases} \qquad (۱۵)$$

در مدل ارائه شده فوق رابطه (۱۰) بیانگر تابع هدف است که مجموع هزینه های راه اندازی، متغیر تولید و نگه داری را حداقل می کند. رابطه (۱۱) تضمین کننده تامین تقاضا در هر پریود است. رابطه (۱۲) نشان می دهد در یک شبکه، مجموع جریان خارج شده از هر گره (j,t) مساوی مجموع جریان وارد شده به آن گره است. رابطه (۱۳) مانع از افزایش تولید در هر مرحله بیش از ظرفیت موجود می شود.

۵- تعدیل ظرفیت های تخصیص یافته

در این مرحله برای انجام عملیات تسطیح منابع میزان ظرفیت باقیمانده (مازاد) برای هر یک از مسائل جزئی بکمک رابطه (۱۶) محاسبه شده است.

$$RC_i = (P_i' - \sum_{j=1}^{m} \overline{D}_i . a_{ij}) \quad (۱۶)$$

کل ظرفیت باقیمانده بوسیله رابطه $\left(RCT = \sum_{i=1}^{n} RC_i \right)$ محاسبه می شود. این ظرفیت باقیمانده را به نسبت ظرفیت منابع استفاده شده در هر یک از مسائل جزئی تقسیم می کنیم. روش اجرای کار به این صورت است که به مسائل (p_i) که دارای ظرفیت باقیمانده زیادتری هستند مقدار ظرفیت کمتری تخصیص می یابد و به مسائل (P_i) که ظرفیت باقیمانده کمتری دارند مقدار ظرفیت بیشتری تخصیص می یابد. عملیات تسطیح منابع مورد نظر طبق رابطه (۱۷) انجام می شود تا جوابهای موجه بهتری حاصل شود.

$$CA_i = RCT . \frac{\overline{D}_i . a_{ij}}{\sum_{i=1}^{n} P_i' . a_{ij}} \quad (۱۷)$$

۶- الگوریتم حل مسئله (p)

قدم ۱: مسئله اصلی را با استفاده از ضرایب لاگرانژ در منابع کمیاب به n مسئله مستقل تبدیل کنید.

قدم ۲: هر یک از مسائل جزئی را با روش ابتکاری ارائه شده حل کنید.

قدم ۳: ظرفیت باقیمانده هر یک از مسائل جزئی را نسبت به ظرفیت تخصیص یافته محاسبه کنید.

قدم ۴: عملیات تسطیح منابع را برای کل ظرفیت های باقیمانده RCT انجام دهید.

قدم ۵: به قدم دوم برگردید و تا رسیدن به شرط توقف مسئله را ادامه دهید.

۷- نتیجه:

هدف اصلی این مقاله ارائه یک روش کارا جهت تجزیه یک مسئله برنامه ریزی چند مرحله ای، چند محصولی و چند پریودی با محدودیت ظرفیت تولید، به n مسئله تک محصولی با هدف حداقل نمودن مجموع هزینه های راه اندازی و نگه داری بوده است. بدین جهت ضمن ارائه یک مدل ریاضی چند محصولی، با توجه به غیرقابل حل بودن آن(NP-hard)، از طریق روش تجزیه بر پایه ضرایب لاگرانژ مدل مزبور به n مسئله یک محصولی مستقل تجزیه گردید تا ساده تر بتوان آن را حل نمود. روش لاگرانژ به دلیل ارائه راه حلهای کاملاً نزدیک به جواب، بهینه است، مورد استفاده قرار گرفته است. با حل هر یک از مسائل برنامه ریزی تولید یک محصولی، چند مرحله ای و چند پریودی، ظرفیت باقیمانده تسطیح و در چند مرحله تکرار جواب مطلوب حاصل شده است. روش لاگرانژ بدلیل اجرای ساده در مراحل محاسباتی برای حل مسائل بهینه سازی در این مقاله نیز مورد استفاده قرار گرفته است.

منابع و ماخذ:

[1] Gayal ,S.K., Gunasekaran, A. , “Multi – stage productron Inventory systems” , Eur.j. of operations Research” , Vol.46 , 1990.

[2] Zapfel , G. , Missbauer, H., “New Concepts for production planning and Cntrol , Eur.j. of operations Research , Vol 67, 1993.

[3] Amin , M. Altiock ,(1997) , “control policies for multi – product Multi - stage Manufacturing Systems.” International Journal OF Production Research Society , Vol.49 , PP.625-634.

[4] L.F.Gelders, L.N. Wassenhove, Production Planning A review , European Journal of operational Research, 7 (2) (1981)101-110.

[5] H.Bah L , L. Ritzman, J.Gupta, Determining Lot – Sizes and Resource Requirements: A Rereiw , Operations Research Society of America , 35, (3) (1987)

[6] Takeda , Kuroda , (1999) , “optimal Inventory configuration of finished and semifinished products in Multi – stage production inventory system with an Acceptable Response Time” , Computers and Industrial Engineering , Vol.37, No.1, pp-251-255.

[7] Simpson, N.C., “Questioning the relative virtues of dynamic Lot sizing rules” , Computers and operations research”, Vol.28, pp.899 – 914,2001.

[۸] Cunasekaran , A. Goyal , S.K. , “ Multi – Level Lot – sizing in a Rayon yarn company : A Case study” , Eur.j. of operations research.65, 1993.

[۹] B.Karimi , S.M. T. Fatemi Ghomi , J.M. Wilson, “the capucitated lot sizing problem: a review of models and algorithms” , omega the International journal of Manayemeont Science , Vol.31, 2003.

[۱۰] GEORGE Liberopoulos and Yves DALLERY , “comparative modeling of multi- stage production – inventory control policies with lot sizing” , INT.T. ProD.RES. Vol.,41, NO.6, 2003.

[۱۱] Newson , E.F. , “ Multi – Item Lot – size scheduling by Heuristic purt II: with Fixed Resources”, Management science, Vol.21 , No. 10 ,1975 .

[۱۲] Fisher, M.L., The Lagrangain Relaxation Method for Solved Integer Programming Problems, Management Seience 27, 1-18,1981.

[13] Afentakes , P. Gavish , B., Karmarkar , u. , “Computationally Efficient optimal solutions to the Lot – sizing Problem in Multi - stage Assembly Systems” , Management science Vol.30 , No. 2 , 1984.

[14] France, Armentano. (1997) , “A Heuristic Method for Lot – sizing in Multi – stage systems” , Computers and operations Research , Vol.24 , NO.9 , pp.861-874.

[19] L.Ozdamar, G. Barbarosoglu, An intergreated Lagrangean – relaxation – Simulated annealing approach to the multi-Level multi-item Capacited Lot – Sizing Problem. International Journal of Production Economic 68 (200) 319-331.

[16] A.I. SHAWKY and M.O.A Bou – El – ATA, “constrained Production Lot – size model with tradecredit policy: “a comparison geometric programming approach via Lagrange” , Production planning and control , Vol. 12 , No. 7-2001.

[17] jozsef Voros, “ on the relaxation of Multi - Level Dynamic Lot – sizing models” , International journal of Production economics, Vol.77 , 2002.

[18] Murali sambasivan , Salleh yahya , “A lagrongean – based heuristic for Multi –plant , Multi – Item , Multi –period capacitated Lot – sizing problems with inter – plant transfers” , computers and operations research , 2004.

[19] Biggs , J.R. Good man , S.H. , Handy . S.T. , “Lot – sizing Rules in a Hierarchical Multi – Stage Inventory systems , Production and Inventory Management , First Quarter, 1977.

[20] Gobay , H. , “Multi – stage Production planning” , Management science, Vol.25 , No.11 , 1979.

[21] Bleak burn , j. D. Millen, R. A. , “Improved Heuristics for multi – stage Requiements planning systems”, Management Science , Vol.28 , No.1, 1982.