برنامه ریزی تولید با تقاضای احتمالی ومحدودیت ظرفیت

مهدی بیجاری
استادیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی اصفهان
bijari@cc.iut.ac.ir
رسول حجی
استاد دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی شریف
rhaji@sharif.edu

واژه‌های کلیدی
برنامه‌ریزی تولید، تقاضای احتمالی، تعیین اندازه دسته تولیدچندمحصولی

چکیده

.تعیین اندازه دسته در حالت چند محصولی، چند دوره‌ای با هزینه آماده‌سازی، در حالت فروش از دست رفته و تقاضای احتمالی در پژوهش حاضر مورد بررسی قرار گرفته است. یک روش برای رسیدن به جوابهای نزدیک به بهینه ارائه شده است. شرایطی که روش به جواب بهینه می‌رسد، نیزمشخص شده است. در روش ارائه شده ابتدا با حل یک مدل خطی شده با متغیرهای صفر و یک، به نام **PD** ، که تقریبی از مدل احتمالی مسئله است، دوره‌هایی که در آنها آماده سازی و تولید انجام می‌شوند بدست می‌آید. سپس با استفاده از روش ارائه شده در مدل بدون هزینه آماده‌سازی، جواب مقادیر تولید بهبود پیدا می‌کند. اگر مدل **PD** دوره‌های آماده‌سازی و تولید بهینه را بدست آورد، جواب بهینه مسئله بدست می‌آید.

۱-مقدمه

بدلیل استفاده از بر نامه ریزی تولید با تقاضای احتمالی در سیستم های تولید مطابق سفارش مشتری و سیستم های مونتاژ مطابق سفارش، اهمیت این نوع برنامه ریزی افزایش یافته است. در نظر گیری تقاضا به صورت متغیر تصادفی نتایج برنامه ریزی را به واقعیت نزدیک می کند. در حالتی که مقدار تقاضا متغیر تصادفی باشد مسئله بسیار پیچیده می‌شود و در این زمینه کارهای اندکی صورت گرفته است. کارهای انجام شده عمدتاً روی مسائل احتمالی بدون محدودیت ظرفیت بوده است. لیکن مسئله برنامه‌ریزی تولید با تقاضای تصادفی و محدودیت ظرفیت به اندازهٔ قبلی مورد توجه نبوده است. اغلب نتایج عملی در دسترس به دو پریود یا ساختار هزینه‌ای خاص محدود است [۱]. مدل ارائه شده در این مقاله برای تعیین برنامه اصلی تولید (**MPS**) در محیط احتمالی قابل استفاده است. مدل مورد بحث در واقع حالت احتمالی مسئله **CLSP** است.

۲- مروری بر تحقیقات انجام شده

گریوز [۲] مدل تولید چندمحصولی چند دوره ای در حالتی که توزیع احتمال تقاضا در هر دوره مشابه باشد را بررسی کرده و یک روش حل ابتکاری ارائه داده است.

بیتران و یاناسی [۳] یک روش ابتکاری برای برنامه‌ریزی تولید چنددوره‌ای با محدودیت ظرفیت تولید و محدودیت سطح خدمت ارائه کرده‌اند. آنها یک تقریب قطعی (غیرتصادفی) از مدل احتمالی را توسعه داده‌اند که برای مثالهای با سطح خدمت زیاد خطای نسبتاً کوچکی دارد.

مدل بررسی شده توسط این دو محقق به صورت زیر است **:**

$$Min\ E\left\{\sum_{t=1}^{T}\left[C_t(X_t)+H_t(I_t^+)+o_tO_t\right]\right\}$$

(۱)

$$\begin{aligned}
&s.t.\\
&I_T = I_{T-1}+X_T-d_t && t=1,\ldots,T\\
&MX_t-O_t\le P_t && t=1,\ldots,T\\
&\Pr\left[I_t\le O\right]\le\alpha_t && t=1,\ldots,T\\
&X_t,O_t\ge 0 && t=1,\ldots,T
\end{aligned}$$

که تعریف پارامترها به شرح زیرند:

X t : مقدار تولید در دوره **t**

O t : ساعات اضافه‌کاری در دوره **t**

C t : هزینه تولید مقدار X_t در دوره **t** ، شامل هزینه آماده‌سازی

I t : موجودی (اگر بزرگتر از صفر باشد) یا کمبود (کوچکتر از صفر باشد) منتقل شده از دوره **t** به دوره **t**+۱

H t : هزینه نگهداری موجودی I_t از دوره **t** به دوره **t** +۱

d t : تقاضا در دورهٔ **t** متغیر تصادفی

α_t : احتمال اینکه در دوره **t** کمبود موجودی اتفاق بیافتد

Pt : ظرفیت کار در ساعات عادی در دوره **t**

ot : هزینه نفر ساعت نیروی کار در اضافه‌کاری

O t : تعداد نفر ساعت نیروی کار موردنیاز برای تولید یک واحد محصول

آنها مدل فوق را با یک مدل قطعی تقریب زده‌اند. در این مدل محدودیت اول و سوم مدل (۱) با محدودیت زیر جایگزین می‌شوند:

$$\sum_{k=1}^{t}X_t\ge l_t-I_o$$

فرض کنید f_t تابع چگالی احتمال و F_t تابع توزیع $\sum_{k=1}^{t}d_k$ باشند. که l_t به گونه‌ای تعیین می‌گردد که :

$$F_t(l_t)=1-\alpha_t=\int_0^{l_t}f_t(y)\,dy$$

آنها مدل خود را به حالت چندمحصولی نیز گسترش داده‌اند.

خانگ و فوجیورا۱ [۴} در روش خود به طور زیادی از کار قبلی (بیتران) استفاده کرده‌اند. آنها مسئله را به صورت یک مسئله جریان شبکه فرموله کرده‌اند. در این تحقیق یک تقریب قطعی از مسئله احتمالی بدست آورده‌اند که می‌تواند با استفاده از روشهای مناسب جریان شبکه حل شود.

۱-Khang & Fujiwara

سوکس و موکستادت [۵]۲ یک مدل و یک روش حل تقریبی برای مسئله برنامه‌ریزی تولید با افق محدود و محدودیت ظرفیت بـا تقاضـای تصادفی برای چند محصول وبا چند منبع تولید ارائه کرده‌اند. مدل مذکور شامل هزینه‌های خطی نگهداری و کمبود در تابع هدف اسـت. بـه جای محدودیت سطح خدمت، هزینه کمبود وارد مدل شده است. اما هزینه و زمان آماده‌سازی درنظر گرفته نـشده اسـت. در مرجـع مـذکور آمده است ، چون درنظرگیری آماده‌سازی منجر به یک ساختار ترکیبی پیچیده می‌شود که نیاز به شمارش مستقیم یا برنامـه‌ریـزی پویـا دارد ،حل مسئله دشوار می‌شود. و از طرفی اغلب سیستم‌های تولیدی به سمت حذف و کاهش آماده‌سازی می‌روند. بدین دلایـل آمـاده‌سـازی در مدل وارد نشده است. در مدل ارائه شده توسط این دو باید توزیع تجمعی تقاضا تا هر دوره مشحص باشد. تقاضای هر دوره جداگانه در مـدل وارد نمی‌شود بلکه توزیع تجمعی تقاضای از ابتدای افق برنامه‌ریزی تا هر یک از دوره‌ها در مدل موردنیاز است. در صورت کمبود موجـودی، تقاضا پس افت می‌شود. این مدل می‌تواند چند منبع تولید متفاوت را درنظر گیرد. این منابع متفاوت می‌توانند از قبیل اضافه‌کاری و خریـد از عرضه‌کنندگان باشد. هر چند روش ارائه شده یک روش تقریبی است ولی در مقایسه با کارهای قبلی این مزیت را دارد که با تعداد زیاد کالا و دوره‌ها می‌تواند در زمان مناسب عمل کند.

برای حل مدل آنها روشی ارائه داده‌اند که مسئله را تجزیه کرده و با استفاده از ضرایب لاگرانژ جواب نزدیک به بهینه مدل را می‌یابند.

هانولد [۶]۳ و پترز و همکاران [۷] مسئله را به صورت یک برنامه‌ریزی تصادفی با منبع فرموله کرده‌اند. روش حـل آنهاگسـسته کـردن توزیع احتمال و فرموله کردن مسئله به صورت یک مدل خطی است که با الگوریتم‌های برنامه‌ریزی خطی در مقیاس بزرگ قابل حل اسـت. روشهای ارائه شده برای مسائل با تعد ا د کالا و تعداد دوره زیاد قابل استفاده نیست. مثالهای ارائه شده نیز دارای اندازه کوچک در حد چهار دوره و سه محصول است.

یکی از کارهای ارائه شده در حالت تصادفی بودن تقاضا توسط یوکویاما [۸] انجام شده است. در بررسی وی فرض شده است که تقاضای هر دوره مستقل از یکدیگر بوده و توزیع احتمال شناخته شده است و محصولات مختلف توسط یک ماشین منفرد تولید شده و حداکثر یک محصول در هر دوره تولید می‌گردد. در این مطالعه هزینه آماده‌سازی وجود دارد. تابع هدف کمینه کردن مقدار موردانتظار مجموع هزینه‌های تولید، انبارداری، هزینه‌های کمبود و هزینه‌های آماده‌سازی است. در این مطالعه یک روش محاسباتی با استفاده از روش انشعاب و تجدید توسعه داده شده است.

ملو و دلارت [۹] یک مسئله تعیین اندازه دسته تولید با محدودیت ظرفیت را برای استفاده در محیط تولید مطابق سفارش مشتری ارائه کرده اند. هدف تعیین مقدار بهینه اندازه دسته تولید در هر دوره افق برنامه ریزی است، به طوریکه زمان های تحویل کالا تا حد ممکن متوسط هزینه ها را کمینه کند. این هزینه ها شامل هزینه های آماده سازی، هزینه های نگهداری سفارشاتی که قبل از موعد تحویل به مشتری آماده شده اند، و هزینه جریمه سفارشاتی است که در زمان مورد نظر آماده نشده اند.

۳- تعریف مسئله

مسئله تعیین اندازه دسته تولید **n** محـصول بـا هزینـه آمـاده سـازی در یـک افـق T دوره ای قبـل از شـروع افـق برنامـه ریـزی است.فرضیات این مسئله به شرح زیرند .

فرضیات:

۱- تقاضای محصولات تصادفی با توزیع گسسته معلوم.
۲- توزیع تقاضا در هر دوره مستقل از دوره دیگر.
۳- یک منبع تولید وجود دارد و ظرفیت تولید محدود است.
۴- هزینه های تولید نگهداری و فروش در دوره های مختلف می تواند متفاوت باشد.
۵- **n** محصول تولید می شود.
۶- هزینه آماده سازی داریم. از زمان آماده سازی صرفنظر می شود.

۲-Sox & Muckstadt

1-Haneveld

۷- کمبود به دوره بعد منتقل نمی شود. تقاضای غیرقابل تأمین از دست می رود.

مدل ارائه شده تا حدی با مدل بیتران و یاناسی[۳] مشابهت دارد. تفاوت این دو مدل عبارتند از:

- در مدل آنها هزینه کمبود وجود ندارد و از سطح خدمت استفاده می شود. در مدل این تحقیق هزینه کمبود وجود دارد.
- در مدل قبلی کمبود پس افت می شود. در مدل ما حالت فروش از دست رفته در نظر گرفته شده است.
- دراین مدل تقاضا یک متغیر تصادفی گسسته است. در مدل آنها تقاضا یک متغیر تصادفی پیوسته است.

.

٤- مدل

هدف کمینه کردن امید ریاضی هزینه ها شامل هزینه های تولید، نگهداری، کمبود و هزینه آماده سازی است.

نمادهای به کار رفته در مدل به شرح زیرند:

C_{it}: هزینه تولید محصول **i** در دوره t

H_{it}: هزینه نگهداری محصول **i** در دوره t

π_{it}: هزینه کمبود محصول **i** در دوره t

X_{it}: تقاضای محصول **i** در دوره t ، متغیر تصادفی

$P_{it}(x)$: تابع جرم احتمال تقاضای محصول **i** در دوره t

$F_{it}(x)$: تابع توزیع احتمال تقاضا محصول **i** در دوره t

Q_{it}: اندازه دسته تولید محصول **i** در دوره t

I_{it}: موجودی محصول **i** در انتهای دوره t ، متغیر تصادفی

S_{it}: کمبود محصول **i** در دوره t ، متغیر تصادفی

a_i: میزان استفاده از منبع تولید برای یک واحد از محصول **i**

$\mathbf{Cap_t}$: ظرفیت تولید در دوره **t**

مدل ریاضی مسئله، مدل **PS**، به صورت زیر نوشته می شود:

(۳)

$$Min\sum_{i=1}^{n}\sum_{t=1}^{T}\left(C_{it}Q_{it}+h_{it}E(I_{it}^{+})+\pi_{it}E(S_{it})+A_{it}Z_{it}\right)$$

$s.t.$

$$\sum_{i=1}^{n}a_iQ_{it}\le Cap_t \qquad t=1,\ldots,T$$

$$I_{it}=I_{it-1}^{+}+Q_{it}-X_{it} \qquad \forall t,\forall i$$

$$Q_{it}\le Z_{it}M \qquad \forall t,\forall i$$

$$I_{it}^{+}=Max(o,I_{it})$$

$$S_{it}=Max(o,-I_{it})$$

$$Q_{it}\ge 0$$

M یک عدد بزرگ است. محدودیت سوم تضمین می کند که اگر آماده سازی محصول i در دوره t انجام نـشود، بـه عبـارتی $Z_{it} = 0$ باشد، آنگاه مقدار تولید، یعنی Q_{it} ، نیز صفر باشد.مدل فوق را مدل PS می نامیم.

۵-حل مدل

حل مسئله PS و بدست آوردن جواب بهینه آن دشوار است. این مسئله حتی در حالتی که تقاضا قطعی باشد در دسته مـسائل خیلـی سخت قرار دارد. برای حل مدل قطعی که همان مسئله **CLSP** است، راه حلهای ابتکاری برای بدست آوردن جواب نزدیک به بهینه ارائـه شده است. در حالت تقاضای تصادفی کارهای زیادی انجام نشده است.

۵-۱-روش پیشنهادی

روش پیشنهادی این مقاله برای حل مسئله **PS** شامل دو مرحله اصلی است. در مرحله اول یک مدل قطعی خطـی شـده کـه تقریـب نسبتا دقیقی از مدل احتمالی است، حل می شود. این مدل را مدل **PD** می نامیم، برای تعیین دوره های آماده سـازی (تولیـد) محـصولات حل می شود. در مرحله دوم با توجه به دوره هایی که هر محصول تولید می شود، مقادیر تولید محصول با اسـتفاده از مـدل احتمـالی یـک دوره ای با موجودی تصادفی در ابتدای دوره سازی ارائه شده توسط حجی وبیجاری[۱۰] بدست می آیند.

۵-۲-مـدل PD

برای تعیین دوره های تولید محصول از یک مدل قطعی استفاده می کنیم. این مدل جدید بوده و در کارهای قبلی مطرح نشده اسـت.در این مدل تقاضای گسسته، وارد شده و تابع هدف خطی شده است. مدل تقریب مناسبی از مدل PS است.

برای ساخت مدل ابتدا تقاضای محصولات در هر دوره برابر **d** قرار داده می شود. مقادیر **d** با استفاده از مدل احتمالی یک دوره ای بدست می آیند. به عبارتی با تولید این مقادیر ، مجموع هزینه های تولید، نگهداری وتولید درهردوره کمینه می شود. **d** از رابطه (۴) بدست می آید.

رابطه زیر برای محاسبه **d** استفاده می شود، که از مدل احتمالی یک دوره ای بدست می آید.

$$F(d_{it} - 1) < \frac{\pi_{it} - C_{ij}}{\pi_{it} + H_{ij}} \leq F(d_{it}) \qquad (٤)$$

از آنجا که تقاضای محصولات در هر دوره برابر **d** قرار داده شده، کمبود در این مدل تفاوت تولید و مقدار **d** است. کمبود و موجودی هر دوره با توجه به مقادیر متغیر تصادفی تقاضا به صورت گسسته در مدل وارد شده است.

نمادهای زیر برای ساخت مدل PD تعریف می شوند.

Si t k :**k** ا منین مقدار کمبود محصول **i** در دوره **t** نسبت به مقدار **dit**

Ii t k **k** ا مین مقدار موجودی محصول **i** در دوره **t** نسبت به مقدار **dit**

Bi t میانگین موجودی محصول **i** در انتهای دوره **t** اگر در این دوره به اندازه **d it** تولید شود.

$\alpha(S_{itk})$ میانگین کاهش **B i t** به ازاء **k** امین کمبود موجودی محصول **i** در دوره**t**

O it میانگین کمبود محصول **i** در انتهای دوره **t** اگر در این دوره به اندازه **d it** تولید شود.

حداکثر اولین مقدار کمبود ، **Si t 1** ، برابر تفاوت مقدار**di t** با اولین مقدار متغیر تصادفی قبل از **di t** است. حداکثر دومین مقدار برابر تفاوت مقدار**di t** بادومین مقدار متغیر تصادفی کوچکتراز **di t** است و به همین ترتیب تا آخر. تعداد این متغیر ها برای هر محصول در هر دوره برابر تعداد مقادیر متغیر تصادفی تقاضا،که کوچکتر از **di t** باشند، است.اعضا مجموعه **KSit** برابریک باضافه تعداد مقادیر متغیر

$$d_{it} - \sum_{l=1}^{k} U\,S_{itl}$$

تصادفی تقاضا، کوچکتر از **d i t** است. احتمال وقوع **k** امین مقدار کمبود متناظر با احتمال بزرگتر شدن تقاضا از است.
تا وقتی که **S i tk** بزرگتر از صفر نشود، **k+1** امین و مراتب بزرگتر از آن نمی توانند بزرگتر از صفر شوند. . آخرین متغیر مقادیر کوچکتر از حداقل مقدار تقاضا را نشان می دهد و برای آن حد تعیین نمی شود.

تعداد متغیر های مربوط به موجودی، برابر یک باضافه تعداد اعضاء دامنه متغیرتصاد فی تقاضاست که از **d** بزر گتر باشند. حداکثر اولین مقدار موجودی ، **I it1** ، برابر تفاوت مقدار **d it** با اولین مقدار متغیر تصادفی بزرگتراز **d it** است.و مراتب دو به بعد نیز به همین

$$d_{it} - \sum_{l=1}^{k} U\,I_{itl}$$

ترتیب تعریف می شوند. احتمال وقوع موجودی **k** امین مقدار متناظر با احتمال کوچکتر شدن تقاضا از است. تا وقتی که **I i tk** بزرگتر از صفر نشود، **k+1** امین متغیرموجودی و مراتب بزرگتر از آن نمی توانند بزرگتر از صفر شوند. **Nit** حداکثر تعداد متغیرهای موجودی تعریف شده محصول **i** در دوره **t** است. اعضا مجموعه **KIit** برابرتعداد مقادیر متغیر تصادفی تقاضا، بزرگتر از **d it** باضافه یک است. آخرین متغیر مقادیر بالاتر از حداکثر مقدار تقاضا را نشان می دهد و برای آن حد تعیین نمی شود.
مدل **PD** به صورت زیر نوشته می شود:

$$Min \sum_{i=1}^{n} \sum_{t=1}^{T} \left(C_{it} Q_{it} + h_{it} \bar{I}_{it} + \pi_{it} \bar{S}_{it} + A_{it} Z_{it} \right)$$

(۵)

$$s.t.$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i Q_{it} \le Cap_t \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$Q_{it} + \sum_{k} S_{itk} - \bar{I}_{i,t-1} + \sum_{l} I_{itl} = d_{ij} \qquad \forall t, \forall i, k \in KS_{it}$$

$$S_{itk} \le US_{itk} \qquad \forall i, \forall t, k \in KS_{it}$$

$$I_{itk} \le UI_{itk} \qquad \forall i, \forall t, k \in KI_{it}$$

$$Q_{it} \le Z_{it} M \qquad \forall t, \forall i$$

$$Z_{it} = 0,1 \qquad \forall t, \forall i$$

محدودیت اول امکان پذیری ظرفیت تولید را نشان می دهد. محدودیت دوم نشان می دهد که حداکثر نیاز به تولید محصول **i** در دوره **t** برابر **d** است.در محدودیت دوم مدل، موازنه تقاضای یک دوره با مقادیر تولید در آن دوره مقدار کمبود دوره و موجودی ابتدا و انتهای دوره آمده است.

محدودیت سوم حداکثر مقدار هر یک از متغیرهای کمبود که مجموع آنها مقدار کمبود یک محصول است، را نشان می دهد. این متغیرها برای خطی کردن مدل تعریف شده اند واحتمال کمبود در مدل دیده می شود. این محدودیت تضمین می کند که هر یک از متغیرهای کمبود از مقدار مجاز بیشتر نمی شود.

محدودیت چهارم حداکثر مقدار هر یک از متغیرهای موجودی که مجموع آنها مقدار موجودی یک محصول است، را نشان می دهد.محدودیت پنجم به شرط پرداخت هزینه آماده سازی در یک دوره تولید محصول را امکان پذیر می کند.

در تابع هدف مدل فوق هزینه های تولید، نگهداری، آماده سازی و کمبود ظاهر شده اند. متغیر تصمیم **Q**، اندازه دسته تولید محصول i در دوره **t** است. متغیر تصمیم Z_{it} تولید یا عدم تولید محصول در دوره را نشان می دهد. در این تابع هدف امید ریاضی موجودی و

امید ریاضی کمبود با استفاده از مقادیر و احتمالات آنها که متناظر با متغیر تصادفی تقاضاست، وجود دارد. امید ریاضی موجودی با $\bar{I}$ نشان داده شده است، که به صورت زیر بدست می آید :

$$\bar{I}_{it} = B_{it} - \sum_{k \in KS_{it}} \alpha(S_{itk}) + \sum_{l < N} I_{itl} F_{it}(d_{it} + \sum_{m \le l} I_{itm}) \qquad (۶)$$

آخرین متغیر موجودی مربوط به محصول **i** دردوره **t** مطابق تعریف از حداکثر تقاضای محصول **i** در دوره **t** بزرگتر است. در نتیجه در احتمال یک ضرب می شود.

در این رابطه **B i , t** میانگین اثر موجودی محصول **i** در انتهای دوره **t** است، اگر در این دوره به اندازه **dit** تولید شود. $\alpha(S_{itk})$ برای وارد کردن تولید کمتر از **dit** در مدل استفاده شده است و نشان دهنده میانگین کاهش موجودی به ازاء هر یک از مقادیر متغیر کمبود است.

امید ریاضی کمبود با $\bar{S}$ نشان داده شده است، که به صورت زیر بدست می آید :

$$\bar{S}_{it} = O_{it} + \sum_{k \in KS_{it}} S_{itk} \left(\mathbf{1} - F_{it}(d_{it} - \sum_{l \le k} S_{itl})\right)$$

۵-۳- بهبود جواب

در مدل اثر موجودی انتها ی یک دوره در دوره بعد، با میانگین موجودی دیده شده است. از آنجا که این موجودی خود یک متغیر تصادفی است، از آنچه در مقاله حجی و بیجاری [۱۰] آمده می دانیم که به این ترتیب کمی خطا در محاسبه مقدار بهینه تولید وجود دارد. برای اصلاح این خطا روش دقیق را عمل می کنیم. همچنین نشان داده شده[۱۱] در حالت چنددوره ای مسئله روزنامه فروش اگر دو دوره داشته باشیم جواب بهینه دوره اول از مقدار بهینه بدست آمده برای آن دوره در مدل احتمالی یک دوره ای، ممکن است بیشتر باشد. نکته مذکور نیز در بهبود جواب استفاده می شود.

برای الگوی آماده سازی بدست آمده از مدل **PD** ، مقادیر تولید تعیین می شوند. دوره هایی که در آنها آماده سازی صورت می گیرد، بدست آمده از مدل را ثابت در نظر می گیریم. سپس به صورت زیر عمل می شود. الف) با استفاده از رابطه تعیین مقدار بهینه سفارش در مدل احتمالی یک دوره ای با موجودی تصادفی در ابتدای دوره ، تشریح شده در مرجع فوق الذکر [۱۰]، مقادیر تولید بهبود می یابد. به این ترتیب که موجودی تصادفی در ابتدای دوره دوم با استفاده از مقدار تولید دوره اول بدست می آید و مقدار تولید بهینه دوره بعدی (دوره دوم در صورت تولید درآن) به شرط مقدار تولید دوره اول بدست می آید. این عمل برای دوره سوم با استفاده از مقادیر تولید دوره اول و دوم انجام شده و تا انتهای افق برنامه ریزی به همین ترتیب عمل می شود. هزینه جواب بدست آمده محاسبه می شود.
ب) مقدار تولید هر محصول در دوره اول یک واحد افزایش می یابد. بند الف اجرا شده ،تغییر در هزینه هر محصول محاسبه شده و در صورت به صرفه بودن مقادیر جدید به عنوان مقدار تولید انتخاب می شوند.

۵-۴- شرط بهینه بودن جواب

اگر مدل **PD** الگوی آماده سازی و تولید بهینه را بدست آورده باشد، با استفاده از بهبود جواب ، جواب بهینه مطلق مسئله بدست می آید. در ضمن این مسئله بیش از یک بهینه ندارد، زیرا تابع هدف آن مشابه تابع هدف (۳) اکیدا محدب است.پس از بدست آوردن یک جواب دقیق برای الگوی دوره های آماده سازی وتولید بدست آمده، امید ریاضی دقیق موجودی قابل محاسبه است. در صورت برقراری شرایط قضیه ۱ جواب بدست آمده بهینه است. این شرایط کافی هستند ولی لازم نیستند.

$E(b_{it})$ امید ریاضی کمبود محصول **i** در دوره **t** است،هنگامی که اندازه دسته تولید از مقدار بهینه مدل احتمالی یک دوره ای بدست آید.

قضیه ۱

اگردوره تولید قبلی **l** باشد و در هر دوره **t**،

۱. $Z_{it} = 0$ است و دوره بعد ازآن $Z_{i,t+1} = 1$ است،

$$A_{it} + C_{it}(E(I_{it}^{+}) - E(I_{i,t-1}^{+})) \geq C_{il}(E(I_{it}^{+}) - E(I_{i,t-1}^{+})) + \sum_{k=l}^{t-1} H_{ik}(E(I_{it}^{+}) - E(I_{i,t-1}^{+}))$$

و

$$A_{it} > \pi_{it}(E(S_{it}) - E(b_{it}))$$

باشد،

۲. $Z_{it} = 1$ است ،

$$A_{it} + C_{it}Q_{it} \leq C_{il}Q_{il} + \sum_{k=l}^{t-1} H_{ik}Q_{il}$$

و

$$A_{it} + C_{it}Q_{it} + E(I_{it}^{+}) \leq E(S_{it})$$

آنگاه جواب بدست آمده بهینه است.

اثبات:

$E(I_{it}^{+}) - E(I_{i,t-1}^{+})$ مقدار مصرف شده محصول **i** در دوره **t** است. اگر در شرط یک $Z_{it} = 1$ شود، از اولین رابطه این شرط نتیجه می شود که تولید در دوره **t** به جای تولید در دوره **l** و پرداخت هزینه نگهداری تا دوره **t** هزینه بیشتری دارد. از دومین رابطه این شرط هم نتیجه می شود که اگر در دوره **t** هزینه آماده سازی پرداخت شده ومحصول تولید شود، و مقدار تولید در حدی شود که هزینه کمبود را به مقدار بهینه **S PP** برساند، ولی هزینه آماده سازی بیش از کاهش هزینه کمبود باشد، تولید در دوره **t** به صرفه نیست. بنابراین $Z_{it} = 0$ بهتر از $Z_{it} = 1$ است.

اگر تحت شرط دو $Z_{it} = 0$ شود، آنگاه باید در دوره **l** برای این دوره تولید شود. در اینصورت از اولین رابطه این شرط نتیجه می شود که هزینه تولید در دوره **l** برای دوره **t** بیش از هزینه تولید (و آماده سازی) در این دوره است. از دومین رابطه نیز نتیجه می شود که جمع هزینه های تولید، آماده –سازی وامیدریاضی هزینه موجودی کمتر از امیدریاضی هزینه کمبود در دوره **t** است. بنابراین تولید در این دوره بهتر از تولید نکردن است.

چون مقادیر بهینه تولید برای الگوی تولید مورد بحث بدست آمده است، در نتیجه دوره های تولید و مقادیر تولید بهیته هستند، یعنی جواب بهینه بدست آمده است.

۶- مثال و نتایج عددی

در کارگاهی ۳ قطعه تولید می شود. مسئول برنامه ریزی تولید باید برای ۵ دوره آینده برنامه ریزی کند. تقاضای این سه محصول به صورت احتمالی است. ظرفیت تولید کارگاه محدود است و در هر دوره ۱۴۰ قطعه می تواند تولید کند. میزان استفاده از ظرفیت برای تولید در سه نوع قطعه یکسان است. هزینه های نگهداری، کمبود، آماده سازی و تولید محصولات در تمام دوره ها مشابه اند و در جدول ۱ آمده اند.موجودی هر سه قطعه در ابتدای افق برنامه ریزی صفر است.تقاضای محصولات به صورت زیر پیش بینی شده است.

قطعه ۱: دوره اول تا سوم تقاضا دارای توزیع یکنواخت بین ۵۰ تا ۷۹ واحددوره چهارم و پنجم تقاضا دارای توزیع یکنواخت بین ۷۱ تا ۹۰ واحد

جدول شماره ۱- هزینه ها

محصول	تولید	کمبود	نگهداری	آماده سازی

۱	۳	۵	۲	۱۰۰
۲	۴	۸	۲	۷۰
۳	۹	۱۵	۵	۸۰

قطعه ۲:

توزیع تقاضا به صورت جدول زیر است.

۳۴	۳۲	۳۰	۲۷	۲۵	X_2
۰/۱۵	٪۲۵	٪۳۰	٪۲۰	٪۱۰	$P(X_2)$

قطعه ۳:

این قطعه به صورت یک متغیر تصادفی یکنواخت گسسته بین ۱۶ تا ۲۰ واحد است.

برای بدست آوردن جواب مسئله مطابق روش پیشنهادی به صورت زیر عمل می شود.ابتدا باید مدل **PD** ساخته شود. برای ایجاد مدل غیرتصادفی ابتدا مقادیر پارامترهای مورد استفاده درمدل وتعداد متغیرهای کمبود و موجودی آنطور که بیان شد، باید مشخص شوند.

مقادیر **d** قطعه ۱ در جدول زیر آمده است.

دوره	۱	۲	۳	۴	۵
d	۶۱	۶۱	۶۰	۷۸	۷۶

مقادیر **d** برای قطعه ۲ در دوره های اول تا چهارم ۳۰ و در دوره آخر ۲۷ است. برای قطعه ۳ این مقادیر در چهار دوره اول ۱۸ و در دوره پنج، ۱۷ بدست می آیند.

تعداد متغیرهای موجودی وکمبود، و میانگین موجودی محصول **i** در انتهای دوره **t** اگر در این دوره به اندازه **d it** تولید شود، و میانگین کمبود محصول **i** در انتهای دوره **t** اگر در این دوره به اندازه **d it** تولید شود قطعات درجداول ۲ تا ۴ آمده اند.

جدول شماره ۲- تعداد متغیرهای موجودی وکمبود، B_{it} و O_{it} قطعه ۱

دوره	۱	۲	۳	٤	٥
موجودي	۱۹	۱۹	۲۰	۱۳	۱٥
كمبود	۱۲	۱۲	۱۱	۸	٦
B_{it}	۱/۸	۱/۸	۱/٥	۱/٤	۰/۷٥
O_{it}	٥/۷	٥/۷	٦/۳	۳/٦	٤/۲

جدول شماره ۳- **تعداد متغيرهاي موجودي وكمبود ، B_{it} و O_{it} قطعه ۲**

دوره	۱	۲	۳	٤	٥

موجودي	٣	٣	٣	٣	٤
کمبود	٣	٣	٣	٣	٢
B it	١/١	١/١	١/١	١/١	٠/٢
١/١	١/١	١/١	١/١	١/١	٢/٧

جدول شماره ۴- تعداد متغیرهای موجودی وکمبود، B it وO it قطعه ۳

دوره	۱	۲	۳	۴	۵
موجودی	۳	۳	۳	۳	۴
کمبود	۳	۳	۳	۳	۲
B it	۰/۶	۰/۶	۰/۶	۰/۶	۰/۲
Oit	۰/۶	۰/۶	۰/۶	۰/۶	۱/۲

$\alpha(S_{itk})$ نشان دهنده میانگین کاهش موجودی به ازاء هر یک از مقادیر متغیر کمبود است و در رابطه (۴) ظاهرمی شود، به شرح زیرند:

قطعه ۱، در دوره های اول تا سوم ۰/۰۳۳ و دوره های چهارم و پنجم ۰/۰۵ است.

قطعه ۲، برای اولین متغیرکمبود ، $k = 1$، $\alpha(S_{itk}) = 0/2(S_{it1})$

برای دومین متغیرکمبود ، $k = 2$، $\alpha(S_{itk}) = 0/1(S_{it1})$

قطعه ۳، در تمام دوره ها و برای کلیه مقادیر ۰/۲ است.

مدل این مثال در ادامه آمده است.

$$Min. \sum_t (3Q_{1t} + 4Q_{2t} + 9Q_{3t}) + \sum_t (2\bar{I}_{1t} + 2\bar{I}_{2t} + 3\bar{I}_{3t}) + \sum_t (5\bar{S}_{1t} + 6\bar{S}_{2t} + 10\bar{S}_{3t}) +$$

$$\sum_t (100Z_{1t} + 50Z_{2t} + 100Z_{3t})$$

s.t.

$$\sum_{i=1}^{3} Q_{it} \leq 140 \qquad t = 1, \ldots, 5$$

$$Q_{11} + \sum_{k=1}^{12} S_{11k} - \sum_{l=1}^{19} I_{11l} = 61$$

$$Q_{12} + \bar{I}_{11} + \sum_{k=1}^{12} S_{12k} - \sum_{l=1}^{19} I_{12l} = 61$$

$$Q_{13} + \bar{I}_{12} + \sum_{k=1}^{11} S_{13k} - \sum_{l=1}^{20} I_{13l} = 60$$

$$Q_{14} + \bar{I}_{13} + \sum_{k=1}^{8} S_{14k} - \sum_{l=1}^{13} I_{14l} = 78$$

$$Q_{۱۵} + \bar{I}_{۱۴} + \sum_{k=1}^{6} S_{۱۵k} - \sum_{l=1}^{15} I_{۱۵l} = ۷۶$$

$$Q_{۲۱} + \sum_{l=1}^{3} S_{۲۱k} - \sum_{l=1}^{3} I_{۲۱l} = ۳۰$$

$$Q_{۲۲} + \bar{I}_{۲۱} + \sum_{k=1}^{3} S_{۲۲k} - \sum_{l=1}^{3} I_{۲۲l} = ۳۰$$

$$Q_{۲۳} + \bar{I}_{۲۲} + \sum_{k=1}^{3} S_{۲۳k} - \sum_{l=1}^{3} I_{۲۳l} = ۳۰$$

$$Q_{۲۴} + \bar{I}_{۲۳} + \sum_{k=1}^{3} S_{۲۴k} - \sum_{l=1}^{3} I_{۲۴l} = ۳۰$$

$$Q_{۲۵} + \bar{I}_{۲۴} + S_{۲۵۱} + S_{۲۵۲} - \sum_{l=1}^{4} I_{۲۵l} = ۲۷$$

$$Q_{۳۱} + \sum_{k=1}^{3} S_{۳۱k} - \sum_{l=1}^{3} I_{۳۱l} = ۱۸$$

$$Q_{۳۲} + \bar{I}_{۳۱} + \sum_{k=1}^{3} S_{۳۲k} - \sum_{l=1}^{3} I_{۳۲l} = ۱۸$$

$$Q_{۳۳} + \bar{I}_{۳۲} + \sum_{k=1}^{3} S_{۳۳k} - \sum_{l=1}^{3} I_{۳۳l} = ۱۸$$

$$Q_{۳۴} + \bar{I}_{۳۳} + \sum_{k=1}^{3} S_{۳۴k} - \sum_{l=1}^{3} I_{۳۴l} = ۱۸$$

$$Q_{۳۵} + \bar{I}_{۳۴} + S_{۳۵۱} + S_{۳۵۲} - \sum_{l=1}^{4} I_{۳۵l} = ۱۷$$

$S_{۱tk} \leq ۱,\ S_{۳tk} \leq ۱ \qquad ; t = ۱ \ldots ۵$

$S_{۲t۱} \leq ۳,\ S_{۲t۲} \leq ۲ \qquad ; t = ۱ \ldots ۴$

$S_{۲۵۱} \leq ۲$

$I_{۱tk} \leq ۱,\ I_{۲tk} \leq ۲,\ I_{۳tk} \leq ۱ \qquad ; t = ۱ \ldots ۵$

$Q_{it} \leq ۱۰۰۰۰\, Z_{it} \qquad ; t = ۱ \ldots ۵,\ i = ۱, ۲, ۳$

مدل فوق با نرم افزار**Lingo** حل شده است.جواب بدست آمده از حل این مدل در جدول ۵ نشان داده شده است.

جدول شماره ۵ - جواب مثال با حل مدل PD

دوره	۱	۲	۳	۴	۵

محصول					
۱	۶۱	۵۹/۲	۵۸/۲	۷۶/۵	۷۴/۶
۲	۳۰	۵۷/۸	۰	۵۴/۸	۰
۳	۳۴/۴	۰	۳۴	۰	۱۶/۴

با بهبود جواب با استفاده از روش تشریح شده، جدول ۶ بدست می آید.

جدول شماره ۶ - جواب پس از اجرای الگوزیتم بهبود

دوره / محصول	۱	۲	۳	۴	۵
۱	۶۱	۵۹	۵۸	۷۷	۷۴
۲	۳۰	۵۸	۰	۵۶	۰
۳	۳۴	۰	۳۴	۰	۱۷

جواب بدست آمده با هزینه ۳۸۰۴ در این مثال جواب بهینه مسئله است.

۷-نتیجه گیری

مدل ارائه شده در این مقاله برای تعیین برنامه اصلی تولید (**MPS**) در محیط احتمالی قابل استفاده است. مدل مورد بحث در واقع حالت احتمالی مسئله **CLSP** است. این مدل برا ی کارخانجات با تقاضای احتمالی قابل استفاده است.

راه حل ارائه شده برای برنامه‌ریزی تولید با در نظرگیری هزینه آماده‌سازی یک روش ابتکاری تلقی می‌شود، ولی در شرایطی خاصی به جواب بهینه مسئله دست پیدا می‌کند. این شرایط بدست آمده است. راه حل مذکور تنها برای مسائل با ابعاد کوچک یا متوسط، یعنی حاصلضرب تعداد دوره‌ها در محصولات از حدود ۸۰ فراتر نرود، مناسب است و مسائل با ابعاد بزرگ را نمی‌تواند حل کند. زیرا در یک مرحله از روش یک مدل با متغیرهای صفر و یک حل می‌شود. ولی مدل خطی شده برای تقریب مدل احتمالی می‌تواند با روشهای فرا ابتکاری مانند الگوریتم ژنتیک ، برای حل مسائل بزرگ مورد استفاده قرار گیرد. برای تحقیقات آتی حل مدل برنامه‌ریزی تولید با هزینه آماده‌سازی برای مسائل با تعداد محصول و تعداد دوره زیاد از موارد قابل توجه است. در این زمینه می‌توان از روشهای فرا ابتکاری الگوریتم ژنتیک، جستجوی ممنوع و شبیه‌سازی تبرید استفاده کرد. تلفیق این روشها با شبکه‌های عصبی می‌تواند جوابهای خوبی ایجاد کند.

مـر ا جع

[1] Gupta ,S.K.,"Decision Rules in Production Planning",Decision Sciences,Vol 8., 521-533,1977.

[2] Graves, S.C. “The multi- product production cycling problem”,AIIE Transactions ,Vol 12, No. 3, 233-240,1980.

[3] Bitran G.R. , H.H. Yanasse,”Determinstic approximations to stochastic prod-.tion problems”,Operations Research , Vol 32, 999-1018,1984

[4],Khang,D.B., Fujiwara,O. “Multi period network flow problems with service level requirments”,IIE Transaction, Vol 25,No.2, 104-110,1993.

[5] Sox,C. R.,Muckstadt, J.A., “Multi-item, multi-period production planning with uncertain demand", IIE Transactions,Vol 28, No. 891-900,1996.

[6] Haneveld, W.K.K.,” A stochastic programming approach to multiperiod production planning",Research Memorandum 276,University of groningen,Institute of Economic Research ,1988.

[7] Peters,R.J. ,Boskam,K. , Kupper,H.A.E.,”Stochastic programming in production planning :a case with non-simple resource.",Statistica Neerlandica, Vol 31 ,113-126 ,1977.

[8] Yokoyama, M. ,"The eclectic model for stochastic dynamic production cycling problem” , International Journal of Production Economics,Vol 60, 359-367,1999.

[9] Melo,m.T., Dellaret,N.P. ,"Production strategies for a stochastic lot-sizing problem with constant capacity”,European Journal of Operational Research, 92, 281-301,1996.

[10] Bijari M. , Rasul Haji, "The Single Period (News- vendor Problem With Stochastic Initial Inventory" , International Journal of Engineering Science, Vol. 15, 2004.

[11] Bijari M. , Ph.D. thesis, Sharif University of Technology, 2003, 60-63 .