

بررسی روشهای کنترل آماری فرایند برای داده های خود همبسته (مطالعه موردی: کارخانه شهید قندی)

محمد صابر فلاح نژاد: دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی شریف
Fallahnezhad@Mehr.Sharif.edu

سید تقی اخوان نیکی: استاد مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی شریف
Niaki@Sharif.edu

چکیده (abstract)

کنترل آماری فرایند (SPC) به بهبود کیفیت از طریق کاهش تغییرات می‌پردازد و بهترین ابزار شناخته شده در این زمینه نمودار کنترل است. در حالی که در عمل با موارد بسیاری مواجه ایم که در آنها داده های ناشی از فرایند همبسته اند، ولی یک فرض اساسی در این نمودارها، مستقل بودن مشاهدات ناشی از فرایند است. با نقض فرض استقلال، عملکرد این نمودارها دچار اختلال می‌شود و برای کنترل داده‌های همبسته، کارایی نمودارهای کنترل استاندارد برای مشاهدات مستقل، بسیار پایین است. به همین دلیل، شناسایی نمودارهای کنترلی که بتواند برای کنترل اینگونه داده‌ها مورد استفاده قرار گیرد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. در این مقاله، راه کارهای کنترل داده‌های همبسته به وسیله نمودارهای کنترلی بررسی و توسعه داده شده و توسط منحنی های ARL مقایسه شده اند و یک الگوریتم ساده برای کنترل داده های خود همبسته ارائه شده است. سپس کاربرد این الگوریتم در یک مطالعه موردی در کارخانه کابل‌های مخابراتی شهید قندی مطرح شده است.

کلید واژه

۱- کنترل آماری فرایند (SPC) ۲- متوسط طول دنباله (ARL)¹ ۳- نمودار کنترلی شوهارت ۴- نمودار کنترلی باقیمانده ها ۵- نمودارهای کنترلی EWMA

¹ Average Run Length

مقدمه و بررسی ادبیات :

یک روش علمی برای به تصویر کشاندن و بهبود کیفیت، کنترل آماری فرایند² (SPC) است که هدف آن بررسی تحت کنترل بودن یک فرایند، چه به لحاظ میانگین و چه از نظر واریانس با استفاده از نمودارهای کنترل³ است. این نمودارها بعد از معرفی در قرن بیستم توسط شوهارت⁴، به یک استراتژی بهبود کیفیت، به نام مدیریت کیفیت جامع⁵ (TQM) توسط دمیینگ توسعه داده شد که نه تنها در محیط های تولیدی کارایی دارد بلکه در همهٔ قسمتهای سازمان از مدیریت تا فروش به کار می آید.

دو فرض اساسی در استفاده از نمودارهای کنترلی وجود دارد. اولاً فرض می‌شود که تابع توزیع احتمال مشاهدات ناشی از یک مشخصه کیفی نرمال است. ثانیاً فرض می‌شود که داده‌های فرایند به طور مستقل توزیع شده‌اند. اما در عمل، یک یا هر دو این فرض‌ها مکرراً نقض می‌شود. در ادبیات کنترل آماری روشهایی وجود دارد تا داده های غیر نرمال را به داده های نرمال تبدیل کرد [1]. در این زمینه شور [2] روشی برای آنالیز داده های کیفیتی غیر نرمال با کاربرد در تحلیل قابلیت فرایند ارائه داده است. همینطور بور [3] و شیلینگ و همکار [4] اثر داده های غیر نرمال بر نمودارهای \bar{X} و R را بررسی کرده اند. هریدی و همکار [5] روشی برای طراحی اقتصادی نمودارهای $CUSUM$ برای کنترل میانگین داده های غیر نرمال ارائه داده اند. در مورد عدم کارایی نمودارهای کنترل استاندارد برای داده های همبسته، الون و همکار [6] نشان داده اند که برای ۲۳۵ نمونه از داده ها، در ۸۵ درصد از موارد حدود کنترل به طور اشتباه محاسبه شده که بیش از ۵۰ درصد آن به خاطر نقض فرض استقلال بوده است. با نقض فرض استقلال، عملکرد نمودارهای کنترل استاندارد دچار اختلال می‌شود؛ طوری که نقاط رسم شده روی این نمودارها دیگر قابل تعبیر و تفسیر نخواهند بود و نتایج نامطلوبی ارائه می‌کنند.

در این مقاله، در حالی که فرض می‌کنیم داده ها از توزیع نرمال برخوردارند، تمرکز روی مواردی است که استقلال مشاهدات متوالی نقض می‌شود. در این زمینه شناسایی نمودارهای کنترلی که بتواند برای کنترل اینگونه داده‌ها مورد استفاده قرار گیرد، از اهمیت ویژه‌ای برخوردار است. بدین منظور راه کارهای کنترل داده‌های همبسته بوسیلهٔ نمودارهای کنترلی بررسی شده و توسط منحنی های ARL مقایسه می‌شوند و یک الگوریتم ساده برای کنترل داده های همبسته ارائه خواهد شد. سپس کاربرد این الگوریتم برای یک مطالعهٔ موردی در کارخانهٔ کابلهای مخابراتی شهید قندی مطرح می‌شود.

در بخش بعدی ابتدا روشهای کنترل آماری فرایند برای داده های ناشی از فرایندهای $AR^7(1)$ بررسی شده، کارایی آنها از طریق متوسط طول دنباله سنجیده، و موارد به کارگیری آنها مشخص می‌شود. سپس در بخش بعدی همین کار برای فرایندهای $AR(2)$ توسعه داده می‌شود. آنگاه یک الگوریتم ساده در نحوهٔ به کارگیری این روشها ارائه می‌شود و در پایان این الگوریتم در یک مطالعهٔ موردی به کار گرفته خواهد شد و نتایج گزارش می‌شود.

روشهای کنترل آماری فرایند برای داده های خود همبسته $AR(1)$

فرض می‌کنیم داده های فرایند از همبستگی برخوردارند و اینکه نوع همبستگی موجود در داده ها از نوع $AR(1)$ است. بدین ترتیب اگر X_t مبین یک مشاهده از مشخصهٔ کیفی در زمان t باشد، آنگاه:

$$X_t - \mu = \phi(X_{t-1} - \mu) + \varepsilon_t \quad t \in Z \quad (1)$$

که در آن μ میانگین فرایند، ε_t خطای تصادفی در زمان t طوری که $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ و ϕ پارامتر مدل $AR(1)$ است. در این مدل می‌توان نشان داد که واریانس مشاهدات، برابر:

² Statistical Process Control

³ Control Charts

⁴ Walter A. Shewhart

⁵ Total Quality Management

⁶ W. Edwards Deming

⁷ Auto-Regressive

$$\sigma_x^2 = \text{var}(X_t) = \sigma_\varepsilon^2 / (1 - \phi^2) \quad (2)$$

است. حال چنانچه در داده‌های ناشی از یک فرایند همبستگی از نوع $AR(1)$ وجود داشته باشد و از نمودار شوهارت استاندارد برای کنترل این مجموعه داده استفاده کنیم، بررسیهای انجام شده با استفاده از شبیه‌سازی نشان داده است که این نمودار به ازای $\phi < 0$ بسیار کم اثر عمل می‌کند و به ازای $\phi > 0$ نمودار مرتباً زنگ خطرهای اشتباهی ایجاد می‌کند [7]. برای حل این مشکل روشهای مختلفی در ادبیات موجود است که در ادامه بررسی خواهند شد.

نمودار کنترل شوهارت اصلاح شده

در تصحیح نمودارهای کنترل شوهارت، واسیلوپولوس و همکار [8] با تغییر حدود کنترل روشی برای کنترل داده‌های خود همبسته از نوع $AR(1)$ ارائه داده‌اند. در پژوهشی دیگر شمید [9] طول دنباله داده‌های داخل حدود کنترل در نمودار شوهارت را برای داده‌های خود همبسته ارائه داده است. کرامر و همکار [10] نمودارهای کنترل برای داده‌های ناشی از سریهای زمانی ارائه داده‌اند. همینطور نمودارهای کنترل برای بررسی میانگین و واریانس فرایندهای همبسته توسط لو و همکار [11] ارائه شده است. در روش اخیر، که در این مقاله از آن استفاده خواهد شد، از دو نوع تطبیق در مورد نمودار کنترلی استفاده می‌شود. در اولین تطبیق از واریانس واقعی موجود در فرایند، که برابر $\sigma_\varepsilon^2 / (1 - \phi^2)$ است، استفاده می‌شود. در دومین تطبیق ضریب انحراف معیار واقعی موجود در فرایند در حدود کنترل طوری تعدیل می‌شود که ARL نمودار کنترلی در حالت خودهمبستگی با ARL نمودار کنترلی در حالت استقلال در زمانیکه هیچ تغییری در فرایند روی نداده باشد برابر باشد. (به عبارت دیگر حدود کنترلی طوری تغییر داده می‌شود که هر دو نمودار دارای خطای نوع اول برابر باشند و سپس با توجه به خطای نوع دوم به مقایسه نمودارها پرداخته می‌شود).

نمودار کنترل باقیمانده‌ها

در نمودار کنترل باقیمانده‌ها از این واقعیت استفاده می‌شود که باقیمانده‌های مشاهداتی که به وسیله مدل $AR(1)$ ایجاد شده‌اند دارای استقلال خطی‌اند. بنابراین می‌توان \mathcal{E}_t را به دست آورد و با آنها مانند داده‌ای مستقل رفتار کرد و از نمودارهای کنترلی استاندارد برای کنترل آنها استفاده کرد.

کبتوکس و همکاران [12] در اولین تحقیقی که در این زمینه مطرح شده روشی برای کنترل باقیمانده‌های یک مدل اتورگرسیو ارائه داده‌اند. همینطور ارمر و همکاران [13] و ارمر [14] روشی برای کنترل باقیمانده‌های یک مدل $ARMA(2,1)$ ⁸ مطرح کرده‌اند. نوتوهاردیونو و همکار [15] برای کنترل باقیمانده‌های یک مدل $ARMA$ از درجه چهارم یک روش جدید ارائه داده‌اند. محاسبه ARL نمودار باقیمانده‌ها را شمید [9] و کرامر و همکار [10] ارائه داده‌اند.

ویرینگا [7] نشان داده است که کارایی نمودار باقیمانده‌ها نسبت به نمودار شوهارت اصلاح شده به ازای مقادیر $\phi < 0$ و مقادیر ϕ به اندازه کافی نزدیک به یک بهتر است. در حالت خود همبستگی مثبت تنها نسبتی از تغییرات به باقیمانده‌ها منتقل می‌شود که این خود باعث کاهش کارایی این نمودار می‌شود. چنانچه به اندازه $\delta\sigma_x$ در میانگین فرایند تغییر به وجود آید مقدار تغییر انتقال یافته به باقیمانده فرایند برابر $(1 - \phi)\delta\sigma_x$ خواهد بود. بنابراین کارایی نمودار باقیمانده‌ها در زمانیکه ϕ مثبت و بزرگ باشد کاهش می‌یابد. البته ثابت می‌شود که به ازای مقادیر ϕ به اندازه کافی نزدیک به یک کارایی نمودار باقیمانده‌ها افزایش می‌یابد [7].

⁸ Auto-Regressive Moving Average

اصلاح نمودار کنترل باقیمانده‌ها

همانطور که عنوان شد در روش نمودار کنترل باقیمانده‌ها در حالت خود همبستگی مثبت تنها نسبتی از تغییرات به باقیمانده‌ها منتقل می‌شود که این باعث کاهش کارایی این نمودار در حالت خود همبستگی مثبت خواهد شد. برای رفع این مشکل یک تخمین گر قوی میانگین، که معمولاً "تخمینگر EWMA⁹" است، به کار می‌آید. سپس این تخمین در مقدار ϕ ضرب می‌شود و به باقیمانده‌ها اضافه می‌شود. در نتیجه چنانچه به اندازه $\delta\sigma_x$ در میانگین فرایند تغییر به وجود آید، مقدار تغییر انتقال یافته به باقیمانده فرایند برابر $\delta\sigma_x = (1-\phi)\delta\sigma_x + \phi\delta\sigma_x$ خواهد بود. یعنی در حالی که فرض استقلال کماکان برقرار است، تمام تغییرات به باقیمانده‌ها منتقل می‌شود و مسئله به به کارگیری یک نمودار شوهارت ساده تبدیل می‌شود. نمودار باقیمانده‌های اصلاح شده در زمانیکه ϕ مثبت باشد دارای عملکرد بهتری نسبت به نمودار باقیمانده‌ها و نمودار شوهارت اصلاح شده است، اما زمانیکه ϕ منفی باشد نمودار باقیمانده‌ها دارای عملکرد بهتری نسبت به دو نمودار قبلی می‌باشد [7].

نمودار EWMA اصلاح شده

آماره EWMA که با $W_{x,t}$ نشان داده می‌شود، از طریق رابطه (۳) به دست می‌آید.

$$W_{x,t} = \lambda X_t + (1 - \lambda)W_{x,t-1} \quad (3)$$

و چنانچه X_t ها از هم مستقل باشند واریانس $W_{x,t}$ از رابطه (۴) به دست می‌آید.

$$\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right)\sigma_x^2 \quad (4)$$

بنابراین می‌توانیم به سادگی برای کنترل یک فرایند از آماره EWMA مربوط به آن استفاده کنیم. این نمودار را رابرتس [16] پیشنهاد کرده است و توسعه آن توسط هانتر [17] مطرح شده است. همینطور کرودر [18] یک روش ساده برای محاسبه متوسط طول دنباله داخل حدود کنترل در این نمودار ارائه داده است. نمودار EWMA نسبت به تغییرات در میانگین، در صورتیکه این تغییر مقدار خیلی زیادی نداشته باشد، ($\delta < 2.6$)، در مقایسه با نمودار شوهارت حساس تر است. البته در نمودار کنترلی EWMA مقدار بهینه ضریب انحراف معیار فرایند متناسب با تغییر در میانگین طوری تعیین می‌شود که نمودار بتواند سریعتر آن را شناسایی کند [7]. حال چنانچه همبستگی $AR(1)$ در داده‌ها وجود داشته باشد این همبستگی اثر بیشتری بر روی نمودار EWMA استاندارد نسبت به نمودار شوهارت استاندارد می‌گذارد و به ازای $\phi < 0$ این نمودار بسیار کم اثرتر عمل می‌کند و به ازای $\phi > 0$ نمودار زنگ خطرهای اشتباه بیشتری تولید می‌کند.

در نمودار EWMA اصلاح شده نیز از استدلال مربوط به نمودار شوهارت اصلاح شده استفاده می‌شود به طوری که ابتدا واریانس واقعی موجود در فرایند در حضور همبستگی نوع اول¹⁰ محاسبه می‌شود. می‌توان ثابت کرد که واریانس آماره $W_{x,t}$ از رابطه (۵) به دست می‌آید [7].

$$Var(W_{x,t}) \approx \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\phi^2} \left(\frac{\lambda}{2-\lambda}\right) \left(\frac{1+\phi(1-\lambda)}{1-\phi(1-\lambda)}\right) \quad (5)$$

از این واریانس برای محاسبه ARL فرایند استفاده می‌شود. سپس حدود کنترل طوری اصلاح می‌شود که هر دو نمودار EWMA برای داده‌های مستقل و EWMA برای داده‌های همبسته دارای خطای نوع اول برابر باشند. آنگاه با توجه به خطای نوع دوم دو نمودار به مقایسه نمودارها پرداخته می‌شود [20].

⁹ Exponentially Weighted Moving Averages

¹⁰ Lag One Correlation

نمودار EWMA باقیمانده‌ها

در این روش ابتدا باقیمانده‌های مشاهداتی که به وسیله مدل (1) AR به دست آمده اند با استفاده از رابطه (6) محاسبه می‌شوند.

$$e_t = X_t - \mu - \phi(X_{t-1} - \mu) \quad (6)$$

حال چون e_t ها مستقل اند، می‌توانیم نمودار EWMA استاندارد را برای آنها استفاده کنیم. برای این کار آماره $W_{e,t}$ را از رابطه (7) محاسبه می‌کنیم.

$$W_{e,t} = \lambda e_t + (1 - \lambda)W_{e,t-1} \quad (7)$$

همچنین واریانس $W_{e,t}$ را از رابطه (8) محاسبه می‌کنیم.

$$\sigma_{W_{e,t}}^2 \approx \sigma_{\varepsilon}^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \quad (8)$$

بنابراین به سادگی می‌توانیم نمودار EWMA استاندارد را برای کنترل باقیمانده‌ها به کار ببریم. این نمودار در حالت $\phi < 0$ عملکرد بهتری نسبت به نمودار EWMA اصلاح شده دارد ولی در حالت $\phi > 0$ نمودار EWMA اصلاح شده عملکرد بهتری خواهد داشت [7].

نمودار EWMA باقیمانده‌های اصلاح شده

در روش نمودار کنترل EWMA باقیمانده‌ها در حالت خود همبستگی مثبت تنها نسبتی از تغییرات به باقیمانده‌ها منتقل می‌شود که این باعث کاهش کارایی این نمودار در حالت خود همبستگی مثبت می‌شود [7]. بنابراین می‌توان از یک تخمین گر قوی میانگین استفاده کرد و مضرب ϕ از آن را به باقیمانده‌ها اضافه کرد تا همه تغییرات به باقیمانده‌ها منتقل شود. حال با این مقادیر مانند داده‌های مستقل رفتار می‌کنیم و نمودار EWMA استاندارد را برای آنها ترسیم می‌کنیم.

مقادیر $W_{u,t}$ از رابطه (9) محاسبه می‌شود

$$W_{u,t} = \lambda u_t + (1 - \lambda)W_{u,t-1} \quad t=1,2,\dots \quad (9)$$

و واریانس $W_{u,t}$ از رابطه (10) به دست می‌آید.

$$\sigma_{W_{u,t}}^2 \approx \sigma_{\varepsilon}^2 \left(\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right) \quad (10)$$

حال به سادگی می‌توانیم نمودار کنترلی EWMA را پیاده سازی کنیم. نمودار EWMA باقیمانده‌های اصلاح شده در حالت $\phi > 0$ عملکرد بهتری نسبت به نمودارهای EWMA اصلاح شده و EWMA باقیمانده‌ها دارد اما در حالت $\phi < 0$ نمودار EWMA باقیمانده‌ها بهترین انتخاب خواهد ماند [7].

روشهای کنترل آماری فرایند برای داده‌های خود همبسته AR(2)

در این بخش حالتی را در نظر می‌گیریم که نوع همبستگی موجود در داده‌های فرایند از نوع AR(2) باشد و به توسعه الگوریتمهایی می‌پردازیم که در بخش قبلی برای داده‌های خود همبسته از نوع AR(1) مطرح شد.

برای داده‌های خود همبسته یک فرایند که از مدل AR(2) می‌آیند، داریم:

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \phi_2(X_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t \quad t \in Z \quad (11)$$

که در آن $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_{\varepsilon}^2)$ عناصر تصادفی خطا، ϕ_1 و ϕ_2 پارامترهای مدل، μ میانگین فرایند، و X_t مشاهده فرایند در زمان t هستند.

در پیوست A نشان داده ایم که واریانس مشاهدات مدل فوق از رابطه (۱۲) به دست می آید.

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - 2 \frac{\phi_2 \phi_1^2}{1 - \phi_2}} \quad (12)$$

حال می توان روشهای مطرح در بخش قبلی را به صورتهای زیر توسعه داد.

نمودار کنترل شوهارت اصلاح شده

در این روش نیز از دو نوع تطبیق استفاده می شود. در تطبیق اول از واریانس مشاهدات (رابطه ۱۲) استفاده می شود و در تطبیق دوم حدود کنترلی را طوری اصلاح می کنیم که ARL نمودار کنترلی در حالت خودهمبستگی با ARL نمودار کنترلی در حالت استقلال در زمانیکه هیچ تغییری در فرایند روی نداده باشد، برابر باشد (به عبارت دیگر حدود کنترلی را طوری تغییر می دهیم که هر دو نمودار دارای خطای نوع اول برابر باشند و سپس با توجه به خطای نوع دوم به مقایسه نمودارها می پردازیم).

نمودار کنترل باقیمانده ها

همانند نمودار کنترل باقیمانده برای مشاهداتی که از مدل AR(1) می آیند، در این روش نیز از این واقعیت استفاده می شود که باقیمانده های مشاهداتی که به وسیله مدل AR(2) ایجاد شده اند مستقلند. به عبارت دیگر می توان از رابطه (۱۱) آنها را محاسبه نمود و با استفاده از نمودارهای کنترلی استاندارد آنها را پایش کرد.

نمودار کنترل باقیمانده های اصلاح شده

در نمودار کنترل باقیمانده ها در حالتی که همبستگی مثبت وجود داشته باشد، تنها نسبتی از تغییرات که برابر $\delta(1 - \phi_1 - \phi_2)\sigma_x$ است، به باقیمانده ها منتقل می شود که این باعث کاهش کارایی این نمودار می شود. برای رفع این مشکل از نمودار کنترل باقیمانده های اصلاح شده استفاده می کنیم. در این نمودار مقادیر u_t را به صورت

$$u_t = y_t - \phi_1 y_{t-1} - \phi_2 y_{t-2} + (\phi_1 + \phi_2) \hat{\mu}_t \quad (13)$$

تعریف می کنیم و همه تغییرات را به باقیمانده ها منتقل می کنیم.

نمودار EWMA اصلاح شده

در این روش حدود کنترل طوری تعدیل می شود که هر دو نمودار EWMA برای داده های مستقل و EWMA برای داده های خود همبسته دارای خطای نوع اول برابر باشند.

نمودار EWMA باقیمانده‌ها

در این روش ابتدا باقیمانده‌های مشاهداتی که به وسیله مدل $AR(2)$ ایجاد شده‌اند، محاسبه می‌شود و سپس با آنها مانند داده‌های مستقل رفتار می‌شود و نمودار EWMA استاندارد برای آنها به دست می‌آید.

نمودار EWMA باقیمانده‌های اصلاح شده

در نمودار کنترل EWMA باقیمانده‌ها در حالتی که همبستگی‌ها از نوع مثبت باشند تنها نسبتی از تغییرات به باقیمانده‌ها منتقل می‌شود که این باعث کاهش کارایی این نمودار می‌شود. برای رفع این مشکل از نمودار کنترل EWMA باقیمانده‌های اصلاح شده طوری استفاده می‌شود که همه تغییرات به باقیمانده‌ها منتقل شود. در این روش ابتدا از یک تخمینگر قوی میانگین استفاده می‌شود و سپس مضرب $\phi_1 + \phi_2$ از آن به باقیمانده‌ها اضافه می‌شود. در این حالت چنانچه تغییری در میانگین فرایند به وجود آید این تغییر عیناً به باقیمانده‌ها منتقل می‌شود و بدین ترتیب با یک مجموعه از داده‌های مستقل مواجه ایم و می‌توانیم از نمودار EWMA استاندارد برای کنترل آن استفاده کنیم.

مقایسه متوسط طول دنباله (ARL) برای روشهای مطرح شده

چمپ [21] متوسط طول دنباله نمودارهای شوهارت اصلاح شده را از روش Fredholm-Integral که برای ارزیابی انتگرال مطرح شده در محاسبه متوسط طول دنباله، به کار می‌رود، به دست آورده است. ARL نمودار EWMA اصلاح شده و EWMA باقیمانده‌ها و نمودار باقیمانده‌های اصلاح شده و EWMA باقیمانده‌های اصلاح شده را از طریق شبیه سازی نیز می‌توان به دست آورد. ویرینگا [7] ابتدا رابطه‌ای برای محاسبه ARL نمودار باقیمانده‌ها به دست آورد و سپس با استفاده از این رابطه مقادیر ARL این نمودار را محاسبه کرد.

در این تحقیقات نشان داده شده است که روشهای EWMA به ازای $\phi < 0$ دارای ARL بهتری نسبت به نمودارهای شوهارت هستند. برای $0 < \phi < 0.9$ نیز این نمودارها دارای ARL بهتری نسبت به نمودارهای شوهارت می‌باشند، ولی برای $\phi > 0.9$ نمودار شوهارت باقیمانده‌های اصلاح شده دارای عملکردی مشابه با نمودارهای EWMA است و چون طراحی این نمودارها آسانتر است، بهتر است از این نمودارها استفاده کنیم. همینطور از مقایسه جداول ARL مربوط به مدل $AR(2)$ در این تحقیقات می‌توان به این نتیجه رسید که روش EWMA باقیمانده‌های اصلاح شده دارای بهترین مقادیر ARL برای بیشترین مقادیر خود همبستگی می‌باشد.

الگوریتم پیشنهادی

با فرض بر اینکه خود همبستگی موجود در داده‌ها حداکثر تا فاصله زمانی دو ($lag2$) مورد نظر است، با توجه به توضیحات قسمتهای قبلی برای کنترل آماری یک فرایند با $n=1$ قدمهای زیر پیشنهاد می‌شود:

۱. بعد از جمع آوری داده نمودار خود همبستگی را رسم کنید.
۲. مقدار خودهمبستگی فاصله زمانی یک ($lag1$) و دو ($lag2$) را برای مشخصه کیفی به دست آورید. چنانچه این مقادیر خود همبستگی داخل حدود کنترل بودند به قدم ۳ بروید و چنانچه تنها مقدار خودهمبستگی فاصله زمانی یک خارج از حدود کنترل بود، به قدم ۴ بروید. اگر هر دو مقدار خودهمبستگی فاصله زمانی یک و دو خارج از حدود کنترل بودند به قدم ۵ بروید.
۳. از نمودار استاندارد برای اندازه گیریهای انفرادی استفاده کنید.

۴. در این حالت به وسیله نرم افزارهای آماری مدل $AR(1)$ مناسب را تخصیص دهید. چنانچه باقیمانده های مدل تخصیصی ناهمبسته باشند و از توزیع نرمال برخوردار باشند، آنگاه به ازای خودهمبستگی $0 < \phi < 0.9$ ، برای کنترل فرایند از نمودار $EWMA$ باقیمانده های اصلاح شده استفاده کنید. چنانچه $\phi > 0.9$ باشد از نمودار شوهارت باقیمانده های اصلاح شده استفاده کنید و چنانچه خودهمبستگی منفی بین داده ها وجود داشته باشد، برای کنترل فرایند از نمودار $EWMA$ باقیمانده ها استفاده کنید.

۵. به وسیله نرم افزارهای آماری مدل $AR(2)$ مناسب را تخصیص دهید و سپس چنانچه باقیمانده های مدل غیر همبسته و از توزیع نرمال برخوردار باشند برای کنترل فرایند از نمودار $EWMA$ باقیمانده های اصلاح شده استفاده کنید.

مطالعه موردی در کارخانه شهید قندی

در این بخش به کاربرد واقعی الگوریتم پیشنهادی می پردازیم. برای اینکار ابتدا به شرایط موجود می پردازیم، آنگاه فرایند تولید، مشخصه های کیفی فرایند، روش جمع آوری داده و به کارگیری الگوریتم مطرح خواهند شد.

معرفی کارخانه

کارخانجات کابل‌های مخابراتی شهید قندی تحت پوشش وزارت ارتباطات و فناوری اطلاعات در راستای نیل به خودکفائی صنعتی و تأمین روزافزون شبکه مخابراتی کشور به کابل‌های مخابراتی، در سال ۱۳۶۳ و در شهر یزد تأسیس گردید. این مجتمع عظیم صنعتی در زمینی به مساحت یکصد هکتار و زیربنائی معادل ۲۰۰ هزار متر مربع و با سرمایه ریالی معادل ۳۰ میلیارد ریال و سرمایه ارزی معادل ۹۳ میلیون دلار به منصه ظهور رسید. عملیات ساختمانی که با پیشرفت بسیار سریع همراه بود در فروردین ۱۳۶۷ آغاز شد و در ۲۲ بهمن همان سال، فاز اول (سالن تولید کابل نوری) به بهره‌برداری رسید.

تولید انبوه کابل مسی، در قالب فاز دوم در سال ۱۳۶۹ آغاز شد و در هفتم آذر ماه ۱۳۷۱، فاز یک و دو افتتاح گردید. ظرفیت تولید سالیانه فاز یک، ۵۰۰۰ کیلومتر انواع کابل نوری و میزان تولید انواع کابل مسی فاز دو سالیانه ۴۰۰۰ MCM معادل چهار میلیارد متر هادی مخابراتی است. همچنین این کارخانه قادر به تولید ۴۰۰۰۰ کیلومتر سیم دابل هوایی و ۲۰۰۰۰ کیلومتر کابل ساده هوایی در سال است که مصرف بالایی در شبکه مخابرات کشور دارد.

ویژگی بارز این مجتمع صنعتی به کارگیری پیشرفته‌ترین ماشین‌آلات کابل‌سازی جهان، انجام عملیات نصب توسط متخصصین داخلی و نیز ساخت بخشی از ماشین‌آلات مورد نیاز توسط نیروهای متعهد و متخصص کارخانه می‌باشد. در این کارخانه کلیه مراحل تولید و پردازش مواد توسط مدرن‌ترین دستگاه‌های کامپیوتری و اتوماتیک تحت کنترل قرار دارد. به کارگیری این نوع سیستم کنترل نه تنها باعث افزایش کیفیت تولید شده، بلکه در تقلیل ضایعات تولیدی نیز نقش بسزائی داشته است. در همین راستا استفاده از سیستم ربات در خطوط تولید که در نوع خود در سطح کشور منحصر به فرد است باعث افزایش تولید و نیز افزایش بهره‌وری در این کارخانه گردیده است. ربات‌های هوشمند قادر به تشخیص رنگ، تهیه آمار تولید، جابجایی قرقره ها بوده، جایگاه ارزشمندی را در افزایش میزان تولید و بالا رفتن کیفیت محصول به خود اختصاص داده‌اند.

مراحل تولید کابل‌های مسی

مراحل تولید کابل‌های تک رشته به قرار زیر است:

۱. کشش اولیه

۲. کشش و عایق‌زنی (تاندوم)

۳. خطوط زوجین

۴. گروپ توئینر

۵. تابنده کوچک (استرندر ۱۶۰۰)

۶. تابنده بزرگ (استرندر ۲۵۰۰) / ۷. ژله‌زنی

۸. روکش‌زنی

از آنجا که پارامترهای کیفی قطر مس، قطر عایق و ازدیاد طول از مهم‌ترین پارامترهای کابل‌های تکرشته می‌باشند و نامطلوب بودن آنها در مراحل بعدی منجر به مشکلات مضاعفی می‌شود، لذا این سه پارامتر جهت بررسی و تجزیه و تحلیل، انتخاب شدند. برای نمونه‌گیری از این سه پارامتر، ابتدا عوامل مؤثر بر تغییر آنها در خط شناسایی و در هنگام نمونه‌گیری، تحت کنترل در آمدند. برای عمل نمونه‌گیری از اندازه‌گیریهای انفرادی استفاده شده است. در بسیاری از موارد به منظور کنترل فرایند از اندازه نمونه $n=1$ استفاده می‌شود و یا به عبارت دیگر نمونه فقط شامل یک محصول است. به عنوان مثال، در هر یک از موارد زیر می‌توان از $n=1$ استفاده کرد: [22]

۱. در فن آوری اندازه‌گیری و بازرسی خودکار هر محصول تولید شده

۲. آهسته بودن نرخ تولید

۳. در بسیاری از فرایندهای تولید پیوسته (که محصول یک دسته تولیدی از کیفیت یکسانی برخوردارند)

سه پارامتر کیفی موردنظر در طول قرقه کابل تفاوت چندانی ندارند. بنابراین با توجه به بند ۳ می‌توان از اندازه‌گیریهای انفرادی استفاده کرد. نمونه‌گیری بدین صورت انجام گرفت که با جدا کردن مقداری تکرشته از انتهای هر قرقه (به ترتیب تولید)، برای هر پارامتر ۱ نمونه مورد بررسی قرار گرفت. جمعاً ۵۰ نمونه ۱ تایی برای هر پارامتر اندازه‌گیری شد و سپس توسط نرم افزار *Minitab* تجزیه و تحلیل شد. نتایج حاصل از نرم افزار به ازای هر یک از مشخصه‌های کیفی به قرار زیر است:

قطر مس

ابتدا نمودار *autocorrelation* (خودهمبستگی) جهت بررسی و تشخیص وجود و میزان همبستگی داده‌ها رسم شده است. برای فاصله زمانی یک ($lag1$) مقدار خودهمبستگی 0.519 و برای فاصله زمانی دو ($lag2$) مقدار خودهمبستگی 0.41 و برای فواصل زمانی دیگر نیز به همین ترتیب مقادیر خودهمبستگی محاسبه و بر روی نمودار ترسیم شده‌اند (شکل ۱). نمودار نشان می‌دهد که مقادیر خودهمبستگی اول و دوم از حدود استاندارد خارج شده‌اند و همبستگی نسبتاً زیادی بین داده‌ها وجود دارد. بنابراین مدل مناسب، مدل $AR(2)$ می‌باشد. نمودار کنترلی شوهارت معمولی مربوط به اندازه‌گیریهای انفرادی برای داده‌های خود همبسته نیز در ادامه آمده (شکل ۲) و نشان می‌دهد که چندین نقطه، از حدود کنترلی خارج هستند و بیانگر وضعیت خارج از کنترل می‌باشند. اما از آنجا که نمودار کنترلی، با استفاده از داده‌های خودهمبسته رسم شده، نقاط خارج از حدود نمی‌تواند دلالت بر خارج از کنترل بودن فرایند داشته باشد. جهت بررسی مدل سری زمانی داده‌ها، تجزیه و تحلیل *ARIMA* صورت گرفته است. مدل حاصل برای X_t به صورت

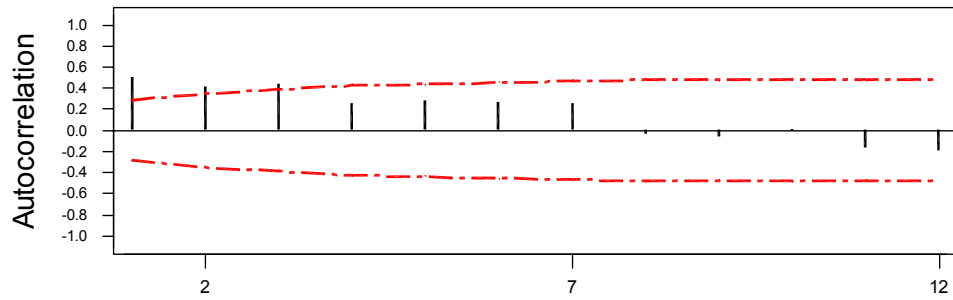
$$X_t = 0.4177X_{t-1} + 0.1964X_{t-2} + 0.1562$$

است.

نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌های قطر مس (شکل ۳) و نمودار خودهمبستگی باقیمانده‌های مربوط به قطر مس (شکل ۴) آمده است و نشان می‌دهد که باقیمانده‌ها از توزیع نرمال برخوردار هستند و بین آنها خود همبستگی وجود ندارد.

بر اساس الگوریتم پیشنهادی از نمودار *EWMA* باقیمانده‌های اصلاح شده استفاده می‌کنیم. برای استفاده از این الگوریتم یک برنامه به وسیله نرم افزار *Excel* نوشته شده است و سپس پارامترهای موردنیاز این برنامه توسط نرم افزار *Minitab* به دست آمده است. شکل (۵) نمودار باقیمانده‌های اصلاح شده را نشان می‌دهد. همانطور که از این شکل مشاهده می‌شود پارامتر کیفی قطر مس تحت کنترل آماری قرار دارد و نمودار *EWMA* باقیمانده‌های اصلاح شده هیچ نقطه خارج از کنترلی را تولید نمی‌کند.

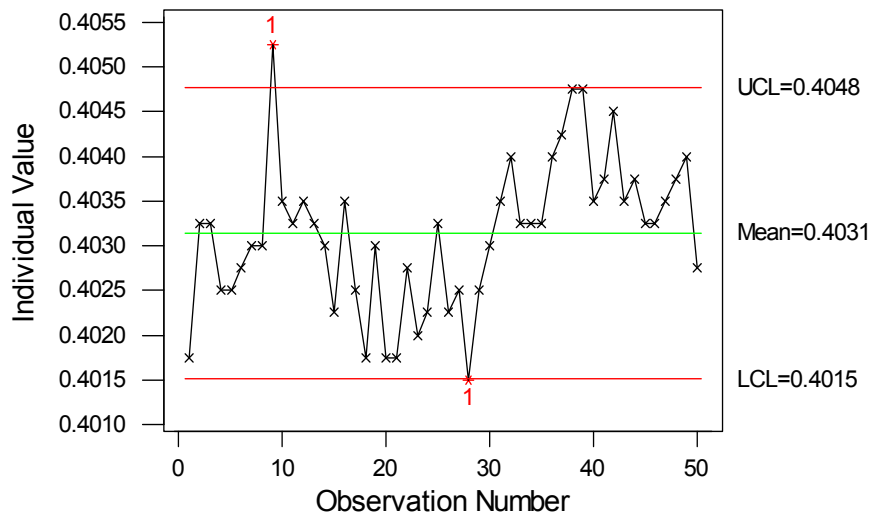
Autocorrelation Function for Copper Diameter



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	0.51	3.58	13.63	8	-0.04	-0.16	50.64
2	0.41	2.37	22.88	9	-0.06	-0.27	50.90
3	0.44	2.28	33.53	10	0.00	0.02	50.90
4	0.26	1.24	37.43	11	-0.16	-0.67	52.61
5	0.29	1.32	42.24	12	-0.19	-0.79	55.09
6	0.28	1.22	46.72				
7	0.25	1.08	50.55				

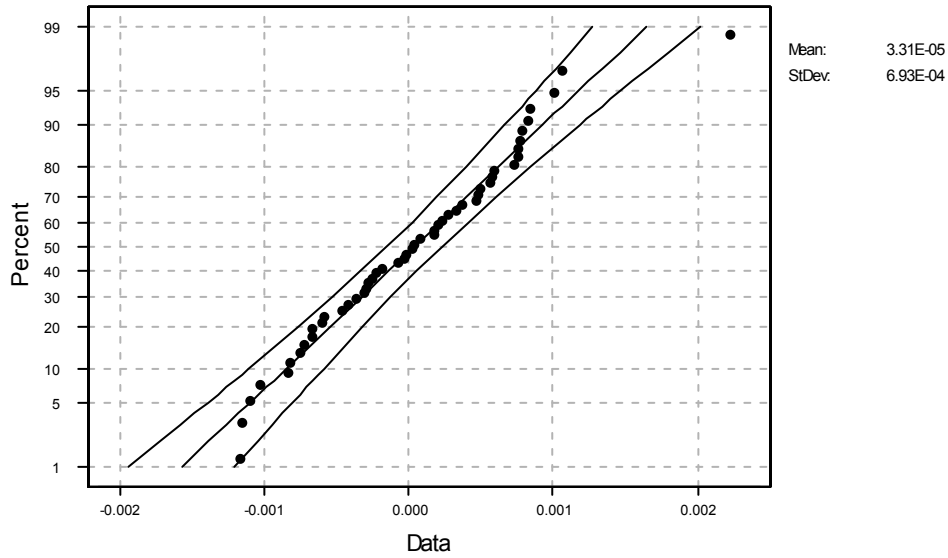
شکل (۱): نمودار *autocorrelation* (خودهمبستگی) مربوط به قطر مس

I Chart for copper diameter



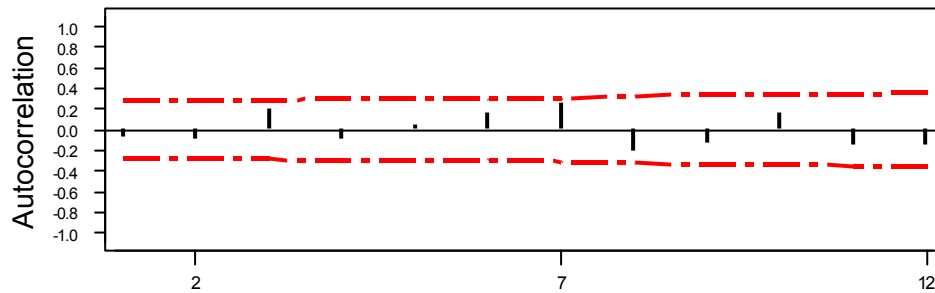
شکل (۲): نمودار استاندارد قطر مس برای مشاهدات انفرادی

Normal Probability Plot for RES11



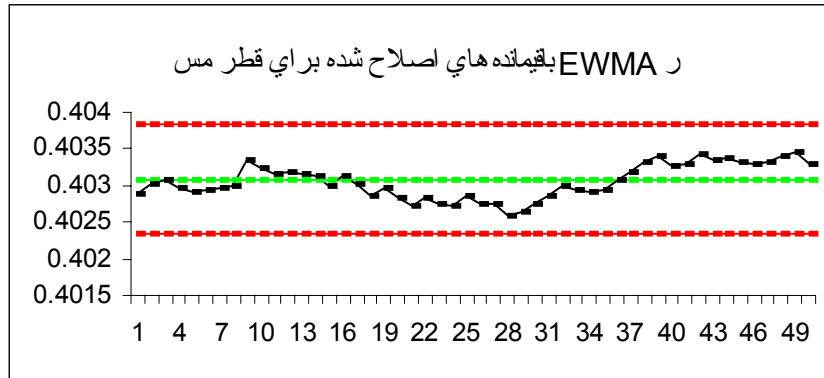
شکل (۳): نمودار احتمال نرمال باقیمانده های قطر مس

Autocorrelation Function for RES11



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	-0.06	-0.44	0.20	8	-0.21	-1.31	12.27
2	-0.09	-0.62	0.62	9	-0.13	-0.75	13.27
3	0.20	1.43	2.92	10	0.17	1.01	15.19
4	-0.09	-0.62	3.40	11	-0.14	-0.80	16.46
5	0.05	0.33	3.55	12	-0.14	-0.80	17.82
6	0.16	1.04	4.99				
7	0.27	1.77	9.45				

شکل (۴): نمودار خودهمبستگی باقیمانده های قطر مس

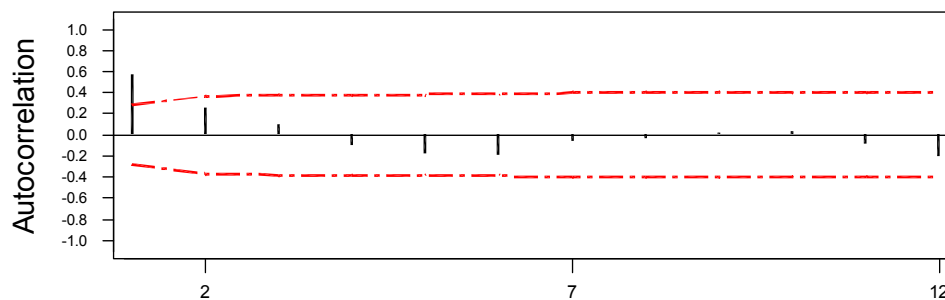


شکل (۵): نمودار $EWMA$ باقیمانده های اصلاح شده برای قطر مس در مورد مدل $AR(2)$

درصد ازدیاد طول

ابتدا نمودار $autocorrelation$ (خودهمبستگی) جهت بررسی و تشخیص وجود و میزان همبستگی داده‌ها رسم شده است. برای فاصله زمانی یک مقدار خودهمبستگی 0.57 برای فواصل زمانی دیگر نیز به همین ترتیب مقادیر خودهمبستگی محاسبه و بر روی نمودار ترسیم شده‌اند (شکل ۶). نمودار نشان می‌دهد که مقدار خودهمبستگی نوع اول از حدود استاندارد خارج شده است اما بقیه مقادیر خود همبستگی داخل حدود کنترل قرار دارند. بنابراین مدل مناسب، مدل $AR(1)$ می‌باشد. نمودار کنترلی شوهارت معمولی مربوط به اندازه گیریهای انفرادی برای داده‌های همبسته (شکل ۷) نشان می‌دهد که چندین نقطه، از حدود کنترلی خارج هستند و بیانگر وضعیت خارج از کنترل می‌باشند. اما از آنجا که نمودار کنترلی، با استفاده از داده‌های همبسته رسم شده، نقاط خارج از حدود نمی‌تواند دلالت بر خارج از کنترل بودن فرایند داشته باشد.

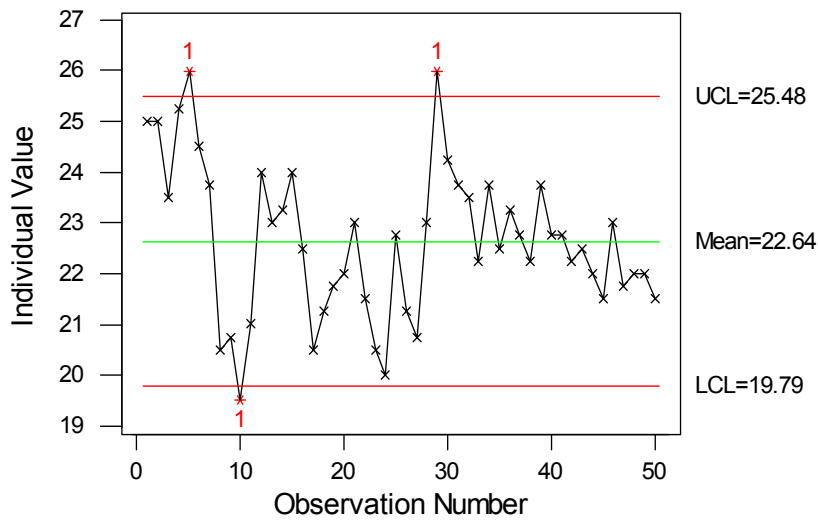
Autocorrelation Function for Percent Of Length Increase



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	0.57	4.03	17.28	8	-0.03	-0.17	25.93
2	0.25	1.40	20.78	9	0.02	0.08	25.94
3	0.10	0.52	21.31	10	0.04	0.18	26.03
4	-0.10	-0.51	21.85	11	-0.09	-0.46	26.57
5	-0.17	-0.91	23.59	12	-0.20	-1.01	29.35
6	-0.19	-0.96	25.64				
7	-0.06	-0.30	25.86				

شکل (۶): نمودار $autocorrelation$ (خودهمبستگی) مربوط به درصد ازدیاد طول

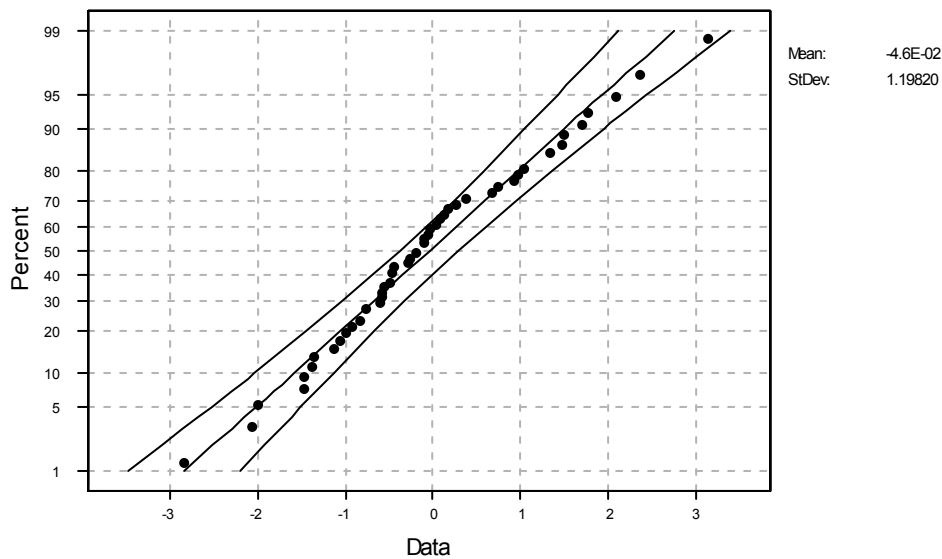
I Chart for Percent Of Length Increase



شکل (۷): نمودار استاندارد درصد افزایش طول برای مشاهدات انفرادی

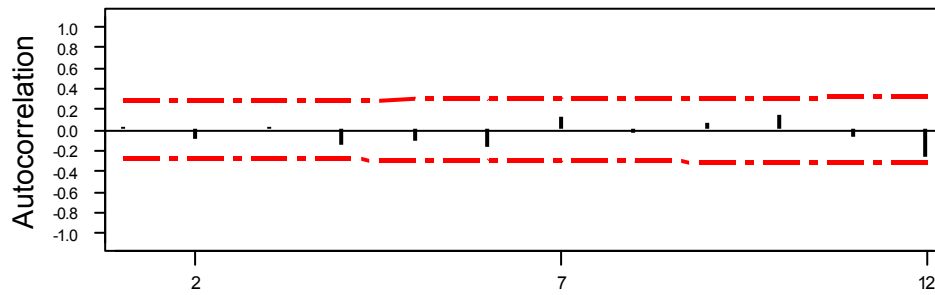
جهت بررسی مدل سری زمانی داده‌ها، تجزیه و تحلیل $ARIMA$ صورت گرفته است. مدل حاصل شده برای X_t به صورت $X_t = 0.6088X_{t-1} + 8.869$ است. نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌های درصد ازدیاد طول (شکل ۸) و نمودار خودهمبستگی باقیمانده‌های مربوط به درصد ازدیاد طول (شکل ۹) آمده است و نشان می‌دهد که باقیمانده‌ها از توزیع نرمال برخوردار هستند و بین آنها خود همبستگی وجود ندارد.

Normal Probability Plot for RESI1



شکل (۸): نمودار احتمال نرمال باقیمانده‌های درصد ازدیاد طول

Autocorrelation Function for RESI1

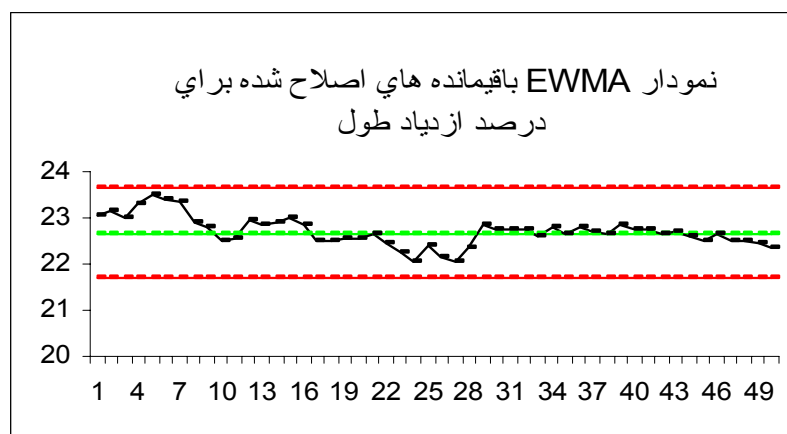


Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	0.02	0.17	0.03	8	-0.03	-0.17	5.10
2	-0.08	-0.58	0.39	9	0.06	0.40	5.34
3	0.03	0.23	0.46	10	0.14	0.94	6.70
4	-0.15	-1.05	1.72	11	-0.06	-0.38	6.94
5	-0.11	-0.77	2.45	12	-0.27	-1.69	11.76
6	-0.17	-1.16	4.19				
7	0.12	0.79	5.06				

شکل (۹): نمودار خودهمبستگی باقیمانده های درصد ازدیاد طول

بر اساس الگوریتمی که ارائه شد از نمودار EWMA باقیمانده های اصلاح شده استفاده می کنیم (چون $\phi < 0.9$). برای استفاده از این الگوریتم یک برنامه بوسیله نرم افزار Excel نوشته شده است و سپس پارامترهای موردنیاز این برنامه بوسیله نرم افزار Minitab بدست آمده است.

شکل (۱۰) نمودار EWMA باقیمانده های اصلاح شده برای درصد ازدیاد طول را نشان می دهد. همانطور که مشاهده می شود پارامتر کیفی درصد ازدیاد طول تحت کنترل آماری قرار دارد و نمودار EWMA باقیمانده های اصلاح شده هیچ نقطه خارج از کنترلی را تولید نمی کند.

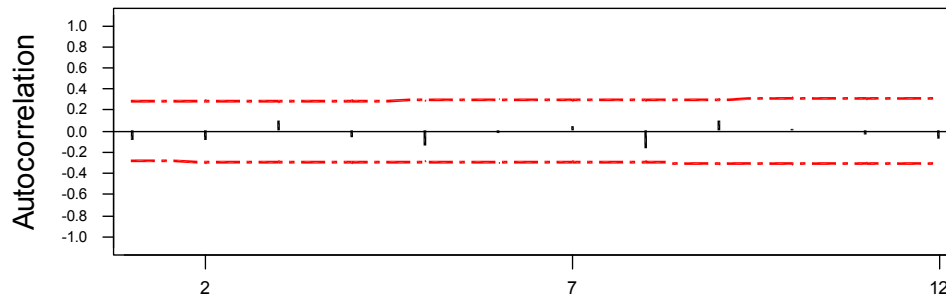


شکل (۱۰): نمودار EWMA باقیمانده های اصلاح شده برای درصد ازدیاد طول در مورد مدل $AR(1)$

قطر عایق

برای قطر عایق، مقدار خودهمبستگی فاصله زمانی یک برابر -0.09 می‌باشد. سایر مقادیر خودهمبستگی نیز خارج از حدود مورد انتظار واقع نشده‌اند (شکل ۱۱). بنابراین می‌توان از نمودار کنترلی معمولی شوهارت برای اندازه گیریهای انفرادی نیز جهت کنترل این پارامتر استفاده کرد (شکل ۱۲). از نمودار شکل ۱۱ پیداست که فرایند تقریباً تحت کنترل آماری است.

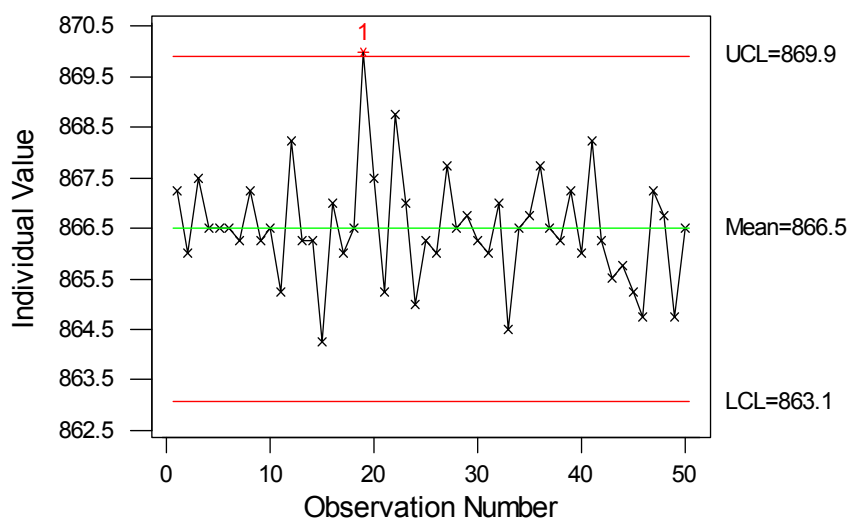
Autocorrelation Function for Insulator Diameter



Lag	Corr	T	LBQ	Lag	Corr	T	LBQ
1	-0.09	-0.63	0.43	8	-0.16	-1.08	4.20
2	-0.09	-0.60	0.82	9	0.10	0.68	4.88
3	0.09	0.65	1.30	10	0.01	0.09	4.89
4	-0.06	-0.39	1.48	11	-0.04	-0.25	4.98
5	-0.13	-0.91	2.49	12	-0.07	-0.45	5.31
6	-0.02	-0.10	2.50				
7	0.05	0.31	2.63				

شکل (۱۱): نمودار *autocorrelation* (خودهمبستگی) مربوط به قطر عایق

I Chart for insulator diameter



شکل (۱۲): نمودار استاندارد قطر عایق برای مشاهدات انفرادی

نتیجه گیری و پیشنهادات

نمودار های کنترل یکی از قویترین ابزار کنترل یک فرایند می باشند اما چنانچه یک فرایند، داده های خودهمبسته تولید کند نمودار های کنترل بسته به نوع همبستگی یا زنگ خطرهای اشتباهی تولید می کنند و یا بسیار کم اثر عمل می کنند. بنابراین برای اینکه از عملکرد صحیح نمودار های کنترل اطمینان حاصل کنیم باید ابتدا تحلیل خودهمبستگی را در مورد آنها انجام دهیم و چنانچه داده ها خودهمبسته بودند از الگوریتم های ارائه شده در این مقاله استفاده کنیم. برای این کار در این مقاله یک مطالعه موردی انجام شد و مراحل موجود در الگوریتم پیشنهادی برای این مورد به کار گرفته شد.

در این مقاله تنها مدل های AR(1) و AR(2) در نظر گرفته شده اند در حالیکه ممکن است در عمل با همبستگیهای درجه بالاتر مواجه باشیم که در این زمینه باید الگوریتم های مشابه توسعه داده شود و مقادیر حدود کنترل مناسب از روشهای تحلیلی و یا شبیه سازی تعیین گردد. همچنین می توان روشهایی را توسعه داد که بوسیله آنها یک مدل AR(p) را به یک مدل AR(p) طوری تبدیل کرد که کارایی فرایند در کشف تغییرات در میانگین افزایش یابد.

پیوست A

برای σ_x^2 ، واریانس مشاهدات AR (2)، داریم :

$$\sigma_x^2 = \text{var}(X_t) = \phi_1^2 \sigma_x^2 + \phi_2^2 \sigma_x^2 + 2\phi_1\phi_2 \text{Cov}(x_{t-1}, x_{t-2}) + \sigma_\varepsilon^2 \rightarrow$$

$$A = \text{Cov}(x_t, x_{t-1}) = \text{Cov}(\mu + \phi_1(x_{t-1} - \mu) + \phi_2(x_{t-2} - \mu) + \varepsilon_t, x_{t-1})$$

$$= \text{cov}(\phi_1 x_{t-1}, x_{t-1}) + \text{cov}(\phi_2 x_{t-2}, x_{t-1}) + \text{cov}(\varepsilon_t, x_{t-1}) +$$

$$\text{cov}(\mu(1 - \phi_1 - \phi_2), x_{t-1}) = \phi_1 \sigma_x^2 + \phi_2 A \rightarrow A = \phi_1 \sigma_x^2 + \phi_2 A \rightarrow A = \frac{\phi_1 \sigma_x^2}{1 - \phi_2}$$

$$\sigma_x^2 = \text{var}(X_t) = \phi_1^2 \sigma_x^2 + \phi_2^2 \sigma_x^2 + 2\phi_1\phi_2 A + \sigma_\varepsilon^2 = \phi_1^2 \sigma_x^2 + \phi_2^2 \sigma_x^2 + 2 \frac{\phi_1\phi_2\phi_1 \sigma_x^2}{1 - \phi_2} + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\sigma_x^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \phi_1^2 - \phi_2^2 - 2 \frac{\phi_2\phi_1^2}{1 - \phi_2}}$$

منابع و مأخذ

1. Chou, Y.-M., A. M. Polansky, and R. L. Mason (1998), "Transforming nonnormal data to normality in statistical process control", *Journal of Quality Technology*, 30(2), 133-141.
2. Shore, H. (1998), "A new approach to analyzing non-normal quality data with application to process capability analysis", *International Journal of Production Research*, 36(7), 1917-1934.
3. Burr, I. W. (1967), "The effect of non-normality on constants for \bar{X} and R charts", *Industrial Quality Control*, 23(11), 563-569.
4. Schilling, E. G. and P. R. Nelson (1976), "The effect of non-normality on the control limits of \bar{X} charts", *Journal of Quality Technology*, 8(4), 183-188.



5. Haridy, A. M. A. and A. Z. El-Shabrawy (1996), The economic design of cumulative sum charts used to maintain current control of non-normal process means", *Computers & Industrial Engineering*, 31, 783-790.
6. Alwan, L. C. and H. V. Roberts (1995), The problem of misplaced control limits", *Journal of the Royal Statistical Society, Series C*, 44(3), 269 -306 [With Discussion and Reply].
7. Wieringa, Jakob Edo , *Statistically Process Control For Serially Correlated Data* , Rijksuniversiteit Groningen , February 1999.
8. Vasilopoulos, A. V. and A. P. Stamboulis (1978), Modification of control chart limits in the presence of data correlation", *Journal of Quality Technology*, 10(1), 20-30.
9. Schmid, W. (1995b), On the run length of a Shewhart chart for correlated data", *Statistical Papers*, 36, 111-130.
10. Kramer, H. and W. Schmid (1996a), The influence of parameter estimation on the ARL of Shewhart type charts for time series", *Arbeitsbericht 60, Europa-Universität Viadrina Frankfurt (Oder), Fakultät für Wirtschaftswissenschaften*.
11. Lu, C.-W. and M. R. Reynolds, Jr. (1997), Control charts for monitoring the mean and variance of autocorrelated processes", *Technical report, Virginia Polytechnic Institute and State University [To appear in Journal of Quality Technology]*.
12. Berthouex, P. M., W. G. Hunter, and L. Pallesen (1978), Monitoring sewage treatment plants: Some quality control aspects", *Journal of Quality Technology*, 10(4), 139-149.
13. Ermer, D. S., M. C. Chow, and S. M. Wu (1979), A time series control chart for a nuclear reactor", in *Proceedings 1979 Annual Reliability and Maintainability Symposium*, 92-98.
14. Ermer, D. S. (1980), A control chart for dependent data", in *ASQC Technical Conference Transactions, ASQC*, 121-128.
15. Notohardjono, B. D. and D. S. Ermer (1986), Time series control charts for correlated and contaminated data", *Journal of Engineering for Industry*, 108, 219-226.
16. Roberts, S. W. (1959), Control chart tests based on geometric moving averages", *Technometrics*, 1(3), 239-250.
17. Hunter, S. J. (1986), The exponentially weighted moving average", *Journal of Quality Technology*, 18(4), 203-210.
18. Crowder, S. V. (1987), A simple method for studying run-length distributions of exponentially weighted moving average charts", *Technometrics*, 29(4), 401-407.
19. Lucas, J. M. and M. S. Saccucci (1990), Exponentially weighted moving average control schemes: Properties and enhancements", *Technometrics*, 32(1), 1-29.
20. Schmid, W. (1997b), On EWMA charts for time series", *Frontiers in Statistical Quality Control*, 5, 114 -137.
21. Champ, C. W. and S. E. Rigdon (1991), "A comparison of the Markov chain and the integral equation approaches for evaluating the run length distribution of quality control charts", *Communications in Statistics: Simulation and Computation*, 20(1), 191-204.
22. Montgomery, D. C. (1996), *Introduction to Statistical Quality Control*, third edition, John Wiley & Sons, New York.