



ارایه الگوریتم بهینه برای یافتن کوتاهترین مسیر دوطرفه برای یک طرح چیدمان

رضا زنجیرانی فراهانی

استادیار دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر
farahan@aut.ac.ir

مهدی حمزه‌ئی

دانشجوی کارشناسی دانشکده مهندسی صنایع دانشگاه صنعتی امیرکبیر
mahdi_hamzehi@yahoo.com

واژه‌های کلیدی

باربران خودکار، بلاک چیدمان، مسیر دوطرفه، برنامه ریزی عدد صحیح.

چکیده

در این مقاله مساله طراحی کوتاهترین مسیری که با هر یک از دپارتمانهای بلاک چیدمان همسایه باشد، در نظر گرفته می‌شود. برای این مساله یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح ارایه می‌شود. تابع هدف، کمینه کردن طول مسیر است. مسیر باید همبند بوده و با هر یک از سلولها حداقل در یک ضلع همسایه باشد. در مدل یکی از روشهای مدلسازی که برای طراحی کوتاهترین تک حلقه ارایه گردیده است، مورد استفاده قرار می‌گیرد. برای حل مدل از یک الگوریتم شاخه و برش ساده استفاده می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که مسایلی با اندازه‌های کمتر از ۴۵ سلول با یک نرم افزار حل کننده مسایل برنامه ریزی عدد صحیح به سادگی قابل حل هستند.

۱. مقدمه

برنامه ریزی تسهیلات^۱ به عنوان یکی از شاخه‌های مهندسی صنایع، از قدیمی‌ترین زمینه‌های کاری این رشته است. مکانیابی تسهیلات^۲ و چیدمان تسهیلات^۳ از شاخه‌های برنامه ریزی تسهیلات است. در زمینه چیدمان تسهیلات، تعیین چیدمان دپارتمانها، واحدهای تولید، واحدهای ساخت، انبارها و... از مهمترین تصمیمات است. تامکینز و همکارانش [۲۵] چیدمان تسهیلات را شامل طراحی چیدمان^۴، طراحی سیستم انتقال مواد^۵ و طراحی سیستم تسهیلات^۶ می‌داند. از آنجایی که بین ۲۰ تا ۵۰ درصد از هزینه‌های تولیدی، به طراحی چیدمان و انتقال مواد مربوط است (تامکینز و همکاران [۲۵])، صرفه جویی در هزینه‌ها به هر نوع در این زمینه، می‌تواند باعث کاهش چشمگیر هزینه‌های تولید در یک واحد تولیدی گردد.

در طراحی چیدمان، هر سلول با یک راستگوشه نشان داده می‌شود که لزوماً یک چند ضلعی محدب نیست. مجموعه‌ای از این سلولهای همسایه به عنوان بلاک چیدمان^۷ شناخته می‌شود. بلاک چیدمان را نمی‌توان بدون در نظر گرفتن سیستم انتقال مواد، برنامه ریزی و یا تحلیل کرد. انجمن انتقال مواد امریکا^۸ تعریف انتقال مواد را چنین می‌داند: «انتقال مواد هنر و دانش درگیر در انتقال، بسته بندی و انبار کردن مواد در هر شکل و فرمی است.» تانچوک و سینریج [۲۴] سیستم انتقال مواد را شامل تجهیزات انتقال مواد، شکل و جهت شبکه‌های انتقال مواد و تعداد و مکان ایستگاههای بارگیری و تخلیه می‌داند. نوعی از تجهیزات انتقال مواد که در این مقاله در نظر گرفته می‌شود، باربران خودکار^۹ است.

باربران خودکار، نوعی وسیله نقلیه است که به راننده نیازی ندارد. این نوع وسیله برای حمل مواد در یک محیط تولیدی بکار می‌رود که عموماً با دنبال کردن راههای از پیش تعیین شده با سیم، راهنمایی می‌شوند. (هاچسون و همکاران [۱۳]) هنگامی که بیش از یک وسیله در سیستم موجود باشد، یک کنترلگر برای کنترل ترافیک بکارگرفته می‌شود. در سالهای اخیر، باربران خودکار، به عنوان یکی از تجهیزات انتقال افقی مواد در محیطهای تولیدی، بسیار مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در استفاده از باربران خودکار، یکی از معمولترین مسایل، یافتن جریان موادی است که برای تمام سلولها در محیط تولیدی قابل سرویس دهی باشد. این مسأله اولین بار، توسط ماکسول و ماکسادت [۱۸] مطرح شد. آنها با این فرض که بهترین مسیر معلوم و موجود است، مدلی برای یافتن حداکثر تعداد وسیله مورد نیاز برای برقراری جریان مابین دپارتمانها ارائه کردند.

در مسیریابی باربران خودکار، چند نوع مسیر مورد بررسی قرار گرفته است. این مسیرها عبارتند از: (۱) سیستم سنتی^{۱۰}، (۲) تک حلقه یکطرفه^{۱۱}، (۳) پیکربندی تاندم^{۱۲}، (۴) SFT^{۱۳} و (۵) مسیر دوطرفه^{۱۴}. سیستم سنتی توسط گاسکین و تانچوک [۱۲]، کاسپی و تانچوک [۱۴] و سو و اگیلو [۲۱] بوسیله برنامه ریزی ریاضی مدلسازی شد. در سیستم سنتی تمامی یالها جزئی از مسیر هستند و مدل به تعیین جهت آنها می‌پردازد. تک حلقه یکطرفه نیز توسط تانچوک و سینریج [۲۴]، سینریج و تانچوک [۲۳، ۲۲]، لاپرت و همکاران [۱۶]، آصف وزیری و

¹ Facility planning

² Facility location

³ Facility layout

⁴ Layout design

⁵ Material handling system design

⁶ Facility system design

⁷ Block Layout

⁸ American Material Handling Society

⁹ Automated guided vehicle

¹⁰ Conventional systems

¹¹ Unidirectional single loop

¹² Tandem configuration

¹³ Segmented Flow Topology

¹⁴ Bi-directional path

همکاران [۴،۳] و فراهانی و همکاران [۱۰] مورد بررسی قرار گرفته است. مسأله تک حلقه یکطرفه به تعیین تک حلقه ای می پردازد که از تمام ایستگاههای بارگیری و تخلیه عبور کند. پیکربندی تاندم سطح بلاک چیدمان را به سلولهای مجزا تقسیم و برای هر یک حلقه ای تخصیص می دهد. تمامی حلقه های مجزا توسط مجموعه ای از نقاله ها به هم متصل هستند. (بازر و سرینیواسان [۶]) هر حلقه از یک وسیله استفاده می کند. پیکربندی تاندم توسط بازر و سرینیواسان ([۵]، [۷]) مورد مطالعه قرار گرفته است. آنها از الگوریتم جزءبندی^{۱۵} بر پایه یک روش حسی^{۱۶} برای تقسیم سطح بلاک به حلقه های تاندم استفاده کرده اند. SFT مانند تاندم سطح بلاک را به بخشهای غیر متصل تقسیم می کند. به هر یک از بخشها یک وسیله انتقال تخصیص داده می شود. شکل دیگری از شبکه های انتقال که در گذشته بررسی شده است، مسیر دو طرفه است که توسط کیم و تانچوکو [۱۵]، چاژد و همکاران [۸] و راجاگوپالان و همکاران [۱۹] مطالعه شده است. شکلی از شبکه های انتقال مواد که در این مقاله مورد بحث است، مسیر دو طرفه است. فرضیاتی که در نظر گرفته ایم عبارتند از اینکه (۱) چیدمان سلولها داده شده است، (۲) حرکتها دو طرفه است و (۳) نقاط بارگیری و تخلیه داده شده اند. در این مقاله ما از یک مدل عدد صحیح برای یافتن بهترین مسیر استفاده کرده ایم. ورودی های این مدل بلاک چیدمان است. تابع هدف هم حداقل کردن کل طول مسیر است. دگازمن همکاران [۹] ثابت کردند که این مساله NP-Hard است.

افتتاکیس [۱] مزایا و امتیازهای استفاده از حلقه را سادگی و بهره وری، هزینه پایین راه اندازی و گسترش، و انعطاف پذیری در فرآیند و تولید بیان می کند. موارد فوق برای مسیر دو طرفه نیز صادق است. علاوه بر موارد فوق، مسیر دو طرفه مزایایی دارد که ممکن است استفاده از مسیر را بر استفاده از حلقه برتری دهد. کوتاهتر بودن طول مسیر نسبت به حلقه که هم فضای کمتری از محیط تولید را برای راهرو اشغال می کند و هم باعث کاهش زمان و مسافت مورد نیاز برای انتقال مواد می شود، از این مزایا است. همچنین در بعضی موارد که ایجاد حلقه بدلیل شکل بلاک چیدمان نشدنی است، استفاده از مسیر یکی از گزینه هاست. پس از مقدمه و در بخش ۲، مساله را تعریف می کنیم. در بخش ۳ به تشریح مدل ریاضی ساخته شده و ارایه الگوریتم حل آن می پردازیم. در بخش ۴ مثالی به عنوان نمونه ارایه می شود. بخش ۵ نتایج آزمایشی را نشان می دهد. نتیجه گیری و جمع بندی مباحث نیز در بخش ۶ بیان خواهد شد.

۲. تعریف مسأله

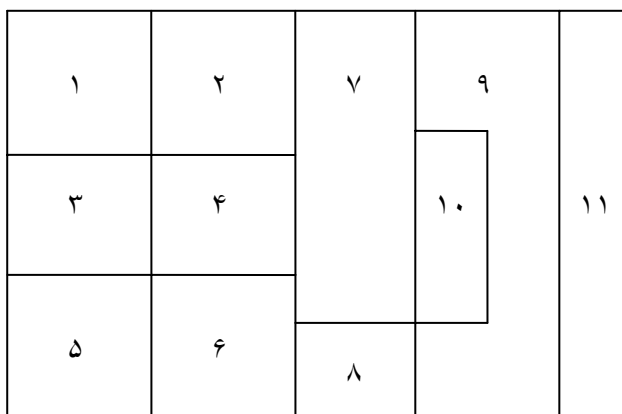
مسأله طراحی کوتاهترین مسیر (SPDP)^{۱۷} برای یک بلاک چیدمان تعریف می شود. فرض کنید که فضای تولیدی شامل n سلول است که هر سلول یک راست گوشه است. لزوما هر سلول یک مستطیل نیست، اما یک راست گوشه با زوایای ۹۰، ۱۸۰ و ۲۷۰ است. بنابراین هر سلول می تواند محدب نباشد.

همانطور که پیش از این نیز بیان شد، ورودی این مدل، بلاک چیدمان است. برای مدلسازی این مساله، ابتدا یک بلاک چیدمان داده شده را در نظر می گیریم. برای مثال اولیه، ما از بلاک چیدمان الگو که فراهانی و همکاران [۱۰] بکار برده اند و در شکل ۱ نمایش داده شده است، استفاده می کنیم.

¹⁵ Partitioning

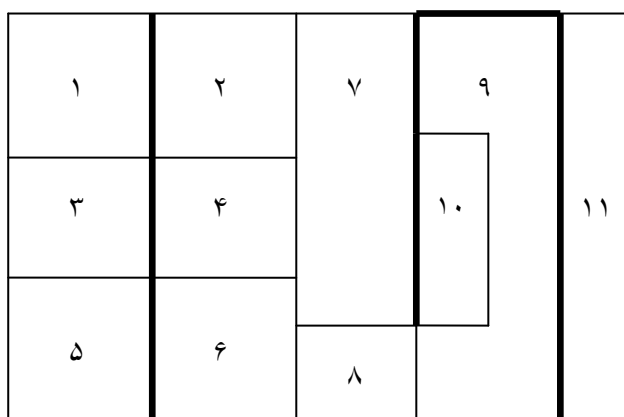
¹⁶ Heuristic

¹⁷ Shortest Path Design Problem

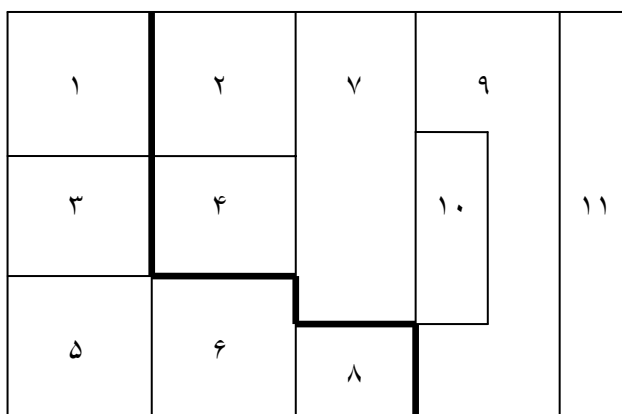


شکل ۱: بلاک چیدمان یک محیط تولیدی (فراهانی و همکاران [۱۰])

دو ویرایش برای SPDP در نظر گرفته می‌شود. یکی اینکه مسیر باید حتما شامل یک ضلع از هر سلول باشد (شکل ۲) و دیگر این که حداقل یک گره از هر سلول کافی است (شکل ۳). در این مقاله، نوع اول در نظر گرفته شده است. بنابراین مسیر باید با هر سلول در یک ضلع همسایه باشد.



شکل ۲: مسیر با حداقل یک ضلع از هر سلول



شکل ۳: مسیر با حداقل یک گره از هر سلول

مسیر شدنی مسیری است که با هر سلول حداقل در یک ضلع مجاور بوده و نیز همبند باشد. شکل‌های ۴ و ۵ مواردی را که هر یک از این شرایط برقرار نیست، نشان می‌دهد. همچنین مسیر نباید خودش را قطع کند.

۱	۲	۷	۹	۱۱
۳	۴	۸	۱۰	
۵	۶			

شکل ۴: جواب نشدنی، چند سلول با مسیر همسایه نیستند.

۱	۲	۷	۹	۱۱
۳	۴	۸	۱۰	
۵	۶			

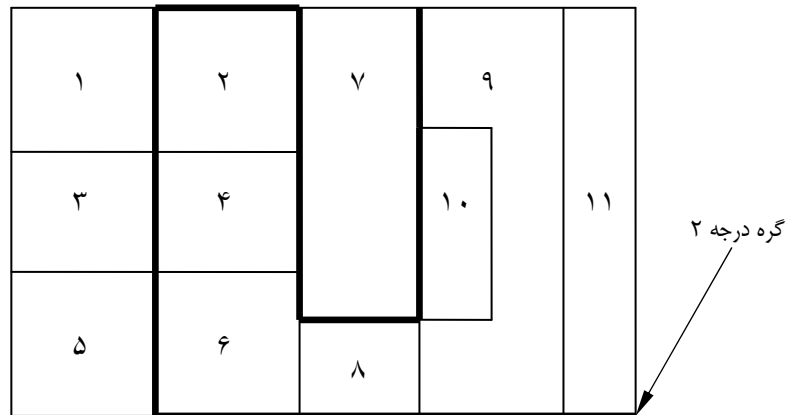
شکل ۵: جواب نشدنی، مسیر غیر همبند

ممکن است که یک بلاک چیدمان هیچ مسیر شدنی نداشته باشد. در شکل ۶ یک بلاک چیدمان بدون مسیر شدنی مشاهده می‌شود.

۱	۲	۷	۹	۱۱
۳	۴	۱۲	۱۰	
۵	۶	۸		

شکل ۶: بلاک چیدمان بدون جواب شدنی

آصف وزیری و همکاران [۳] مدلی برای یافتن کوتاهترین حلقه در بلاک چیدمان ساختند. چنانچه در این بلاک چیدمان یک گره مجازی در نظر بگیریم که این گره با تمام گره‌ها همسایه بوده و طول همسایگی برابر صفر باشد، آنگاه هر حلقه‌ای که شامل این گره مجازی باشد، در واقع یک مسیر است و نه حلقه. با این دیدگاه، از مدل آصف وزیری با اندکی تغییر استفاده می‌شود. بدین ترتیب که با اضافه کردن یک محدودیت، گره مجازی را همواره در مسیر قرار می‌دهیم. گره مجازی را در مدل با اندیس صفر نشان می‌دهیم. یک مسأله کوتاهترین مسیر با یک گراف یکطرفه $G = (V, E)$ نمایش داده می‌شود که V مجموعه گره‌ها و E مجموعه یالهاست. E همان لبه‌های n راست گوشه است. V هم شامل تمام گره‌های بلاک چیدمان و هم گره مجازی است. آصف وزیری و همکارانش [۳] در مدل خود، که SLDP¹⁸ بود، بیان کرده‌اند که گره‌های درجه ۲ نقشی ندارند. چنانچه فرض مسأله را بر این قرار دهیم که حداقل یک ضلع از هر دپارتمان باید در مسیر باشد، آنگاه بر خلاف مدل آصف وزیری، گره‌های درجه دو نیز باید در نظر گرفته شود. در شکل ۷ مسیری نشان داده شده است که با در نظر گرفتن گره درجه دو، شدنی است.



شکل ۷: مسیر با حداقل یک ضلع از هر دپارتمان

اما چنانچه فرض را بر این قرار دهیم که حداقل یک یال باید در مسیر قرار گیرد، آنگاه گره‌های درجه ۲ نقش اساسی در حل مسأله خواهند داشت. این فرض در فرمول بندی نقشی ندارد. فقط در روند الگوریتم می‌توان بسته به شرایط سیستم، با هر یک از دو فرض مسأله را حل کرد. بنابراین در این مدل، گره‌های درجه ۲، ۳ و ۴ قابل در نظر گرفتن هستند. برای سادگی، اگر (i, j) یک یال باشد، آنگاه $i < j$ است.

۴. مدل ریاضی

روش حل مسئله بر مبنای یک مدل ریاضی است که توضیحات آن در ذیل ارائه می‌شود.

۴.۱. مجموعه‌ها و اندیسها

$$C = \{1, 2, 3, \dots, n\}$$

مجموعه سلولها در شکل بلاک چیدمان

$$N = C \cup \{0\} = \{0, 1, 2, \dots, n\}$$

مجموعه سلولها در گراف بلاک چیدمان و سلول مجازی 0 . ($p \in N$)

$$S \subset C$$

¹⁸ Shortest Loop Design Problem



$\bar{S} = N \setminus S$: مجموعه مکمل S .

$V = \{0, 1, 2, \dots, v\}$: مجموعه گره‌ها در گراف بلاک چیدمان و گره مجازی. $(i, j, k, l \in V)$.

$V_p = \{1, 2, \dots, n_p\}$: مجموعه گره‌های سلول p ($\forall p \in N, \cup_{p \in N} V_p = V$)

$E = \{1, 2, 3, \dots, e\}$: مجموعه تمام ضلع‌های موجود در گراف بلاک چیدمان و ضلع‌های مجازی.

(گره‌های همسایه هستند $(k, l) \in E \mid k, l \in V$)

$E_p = \{1, 2, 3, \dots, e_p\}$: مجموعه ضلع‌های سلول p ($\forall p \in N, \cup_{p \in N} E_p = E$)

$E(S) = \{(i, j) \in E \mid a \in S : (i, j) \in a\}$: مجموعه تمام ضلع‌های متعلق به مجموعه S در گراف بلاک چیدمان.

رابطه‌ای تحت عنوان رابطه همسایگی تعریف می‌شود:

$$A_{ab} = E_a \cap E_b, \forall a, b \in C$$

بر اساس این رابطه زیرمجموعه‌های همسایگی در C مطابق زیر تعریف می‌شود:

$$S_A = \{S \subset C \mid \forall a \in S : \sum_{b \in S} |A_{ab}| \geq 1\}$$

S_{A_m} : زیرمجموعه m از S_A

توضیح در مورد S_A این که این مجموعه شامل تمام زیرمجموعه‌هایی از C است که همسایه هستند.

$$B(S_A) = \{(i, j) \in E(S_A) \mid \exists b \in \bar{S}_A : (i, j) \in E_b\}$$

۴.۲. ثابت‌ها و متغیرها

c_{ij} : طول ضلع واصل دو گره i و j .

y_k : متغیر دودویی که برابر ۱ است اگر و فقط اگر گره k در مسیر باشد و صفر در غیر اینصورت. $y_0 = 1$ قرار داده شود.

x_{kl} : متغیر دودویی که برابر ۱ است اگر و فقط اگر مسیر شامل ضلع (k, l) باشد و صفر در غیر اینصورت. (گره‌های همسایه

هستند $(k, l) \in E \mid k, l \in V$)

۵. مساله طراحی کوتاهترین مسیر (SPDP)

همانطور که در قسمت قبل بیان شد، مساله شامل طراحی مسیری است که حداقل در یک ضلع و یا یال هر سلول همسایه باشد. آصف

وزیری و همکاران [۳] یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح برای طراحی یک حلقه در بلاک چیدمان توسعه داده‌اند. ما از روش آنها برای

طراحی کوتاهترین مسیر استفاده می‌کنیم، اما محدودیت جلوگیری از حلقه در مدل ما، با محدودیت آنها متفاوت است.

SPDP می‌تواند به شکل زیر با استفاده از برنامه‌ریزی عدد صحیح، فرمول شود:

$$\text{Minimize} \quad \sum_{i < j} c_{ij} \cdot x_{ij} \quad (1)$$

Subject to:

$$\sum_{i < k} x_{ik} + \sum_{j > k} x_{kj} = 2y_k \quad (k \in V), \quad (2)$$



$$\sum_{(i,j) \in E_p} x_{ij} \geq 1 \quad (p \in N, p \neq 0), \quad (3)$$

$$\sum_{(i,j) \in B(S_{A_m})} x_{ij} \leq |B(S_{A_m})| - 1 \quad (S_{A_m} \in S_A), \quad (4)$$

$$y_k = 0 \text{ or } 1 \quad (k \in V, k \neq 0), \quad (5)$$

$$x_{ij} = 0 \text{ or } 1 \quad ((i,j) \in E), \quad (6)$$

$$y_0 = 1 \quad (7)$$

تابع هدف (۱) کمینه کردن^{۱۹} کل طول مسیر است.

محدودیت (۲) محدودیت درجه^{۲۰} است. این محدودیت اجبار می‌کند که اگر گرهی در مسیر باشد، باید حتماً دو یال از یالهای مجاور آن در مسیر باشند. این دو یال شامل یالهای مجازی نیز هست. چنانچه گره در مسیر نباشد، نباید هیچ یک از یالهای مجاور آن در مسیر باشد. توجه به این نکته ضروری است که وجود گره مجازی در مسیر الزامی است تا مسیر به حلقه تبدیل نشود. محدودیت (۳) محدودیت پوشش^{۲۱} است. این محدودیت الزام می‌کند که از هر دیپارتمان غیر از دیپارتمان مجازی، حداقل یک یال در مسیر باشد. این محدودیت مانند محدودیت پوشش است که آصف وزیری و همکاران [۳] بکار برده است. محدودیت (۴) محدودیت جلوگیری از تشکیل حلقه^{۲۲} است. این محدودیت با افزایش تعداد دیپارتمانها بطور نمایی افزوده می‌شود. محدودیت (۵) و (۶) محدودیت دودویی بودن متغیرهاست. محدودیت (۷) هم بیان می‌کند که گره مجازی باید در مسیر باشد.

مدلی که آصف وزیری و همکاران [۳] بکار برده‌اند، از مدلی که تانچوکو و سینریج [۲۴] استفاده کرده‌اند، فشرده‌تر و کاملتر است. تانچوکو و سینریج [۲۴] دو متغیر برای هر جهت یال (i, j) بکار برده‌اند، در حالی که آصف وزیری و همکاران [۳] از یک متغیر استفاده کرده‌اند.

مسئله طراحی کوتاهترین حلقه، با GTSP^{۲۳} مرتبط است، بنابراین مساله طراحی کوتاهترین مسیر هم با تغییراتی که ایجاد کردیم، همین وضعیت را دارد. GTSP شامل تعیین کوتاهترین دور همیلتونی^{۲۴} است که از هر گره یکبار عبور کند. هنگامی که هر مجموعه تنها دربردارنده یک گره باشد، GTSP به TSP^{۲۵} تبدیل می‌شود. GTSP با استفاده از برنامه ریزی عدد صحیح توسط لاپرته و نوبرت [۱۷] و فیسپتی و همکاران [۱۱] فرمول و حل شد. همانطور که آصف وزیری و همکاران [۳] بیان کرده‌اند، اگر تمام گره‌های بلاک چیدمان درجه ۳ باشند، آنگاه استفاده از محدودیت زیر به جای محدودیت (۳) امکانپذیر است

$$\sum_{k \in V_p} y_k \geq 1 \quad (p \in N, p \neq 0), \quad (8)$$

چنانچه از محدودیت (۸) به جای محدودیت (۳) استفاده شود، در یک بلاک چیدمان که تمامی گره‌ها از درجه ۳ هستند، می‌توان مطمئن بود که هر سلول حداقل در یک یال با مسیر همسایه است. اما از آنجایی که در این مقاله فرض ما بر این است که گره‌ها می‌توانند از درجه ۴ نیز باشند، از محدودیت (۳) استفاده می‌کنیم.

در یک مساله برنامه ریزی عدد صحیح، حذف یک متغیر دودویی بسیار بر کارایی می‌افزاید. (آصف وزیری و همکاران [۳]) می‌توان با

¹⁹ Minimization

²⁰ Degree constraint

²¹ Covering constraint

²² Tour eliminator constraint

²³ Generalized Traveling Salesmen Problem

²⁴ Hamiltonian cycle

²⁵ Traveling Salesmen Problem



تغییری در محدودیت (۲) متغیر y_k را حذف کرد. محدودیت (۲) را با چهار محدودیت زیر جایگزین می‌کنیم:

$$\sum_{i < k} x_{ik} + \sum_{j > k} x_{kj} \leq 2 \quad (k \in V, k \neq 0), \quad (9)$$

$$\sum_{i < k} x_{ik} + \sum_{j > k, j \neq l} x_{kj} \geq x_{kl} \quad ((k, l) \in E, k \neq 0), \quad (10)$$

$$\sum_{i < l, i \neq k} x_{ik} + \sum_{j > l} x_{lj} \geq x_{kl} \quad ((k, l) \in E, k \neq 0), \quad (11)$$

$$\sum_{i \in V, i \neq 0} x_{0i} = 2 \quad (12)$$

محدودیت (۹) بیان می‌کند که حداکثر تعداد ضلع مجاور از هر گره که می‌تواند در مسیر باشد، ۲ ضلع است. این تعداد شامل یال مجازی بین هر گره و گره مجازی نیز می‌باشد. چنانچه گره در مسیر نباشد، این تعداد برابر صفر است. محدودیت (۱۰) نشان می‌دهد چنانچه ضلعی در مسیر باشد، آنگاه باید یکی دیگر از اضلاع همسایه گره ابتدایی این ضلع نیز در مسیر باشد. محدودیت (۱۱) مانند محدودیت (۱۰) است با این تفاوت که در مورد گره انتهایی ضلع است. محدودیت (۱۲) بیان می‌کند که حداقل دو ضلع مجاور گره مجازی باید در مسیر باشد. از آنجایی که گره مجازی همواره باید در مسیر باشد، اندیس صفر را در محدودیت‌های (۹)، (۱۰) و (۱۱) حذف می‌کنیم که این باعث کاهش تعداد محدودیتها می‌شود. محدودیت (۲) باید با محدودیت‌های (۹)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) جایگزین شود.

۶. الگوریتم

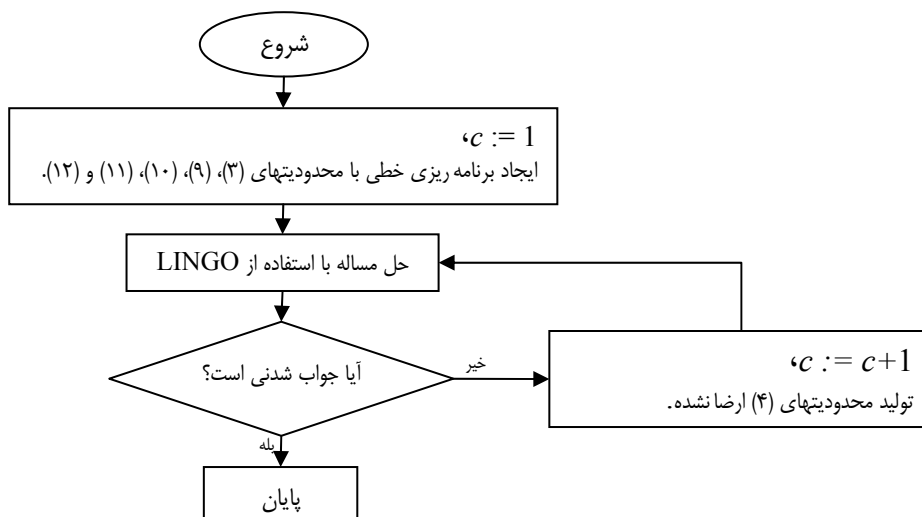
بزرگترین مشکل در حل این مدل، محدودیت (۴) است که با افزایش n بطور نمایی افزایش می‌یابد. راه استاندارد برای حل چنین مسائلی، استفاده از رویکرد شاخه و برش^{۲۶} است. با استفاده از الگوریتم شاخه و برش، تعداد بسیار زیادی از این محدودیتها، آزاد می‌شوند. محدودیت‌های ارضاننده نیز شناسایی شده و اضافه می‌گردند. ما از یک الگوریتم ساده شاخه و برش برای حل مدل استفاده می‌کنیم. الگوریتم استفاده شده مانند الگوریتمی است که فراهانی و همکاران [۱۰] بکار برده‌اند. این الگوریتم می‌تواند بر روی LINGO 8.00 (روی [۲۰]) اجرا شود.

گام ۱. قرار بده $c := 1$. (c شماره تکرار) برنامه ریزی خطی آغازین را با محدودیت‌های (۳)، (۹)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) ایجاد کن.
گام ۲. مدل را با استفاده از LINGO 8.00 حل کن. اگر جواب شدنی است، توقف کن.
گام ۳. برای محدودیت‌های (۴) ارضا نشده، اعضای مجموعه S_A را پیدا کن. برای این اعضا محدودیت (۴) را تولید کن. قرار بده $c := c + 1$ و به گام ۲ برو.

شکل ۸ نمودار گردش این الگوریتم را نشان می‌دهد.

²⁶ Branch-and-cut

²⁷ Relax



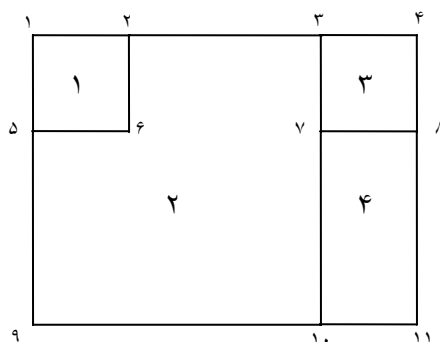
شکل ۸: الگوریتم حل مدل

برای واضحتر شدن الگوریتم، یک مثال ۴ سلولی که در شکل ۹ نشان داده شده است، در نظر گرفته ایم. در این مثال داریم:

$$c_{1,2} = c_{3,4} = c_{1,5} = c_{2,6} = c_{3,7} = c_{4,8} = c_{5,6} = c_{7,8} = c_{10,11} = 5$$

$$c_{2,3} = c_{5,9} = c_{7,10} = c_{8,11} = 10$$

$$c_{9,10} = 15$$



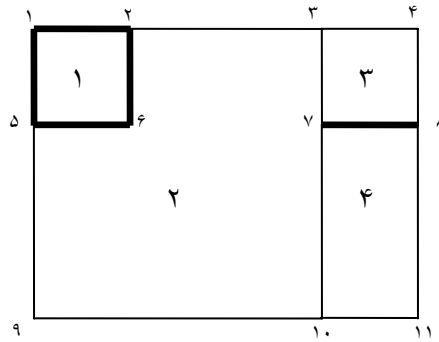
شکل ۹: یک بلاک چیدمان ۴ سلولی با طول ۲۰ و عرض ۱۵

در گام ۱، محدودیتهای (۳)، (۹)، (۱۰)، (۱۱) و (۱۲) را برای حل، تولید می‌کنیم.

در گام ۲، با استفاده از LINGO 8.00 مساله برنامه ریزی خطی حل شده و جواب زیر حاصل می‌شود:

$$x_{0,7} = x_{0,8} = x_{1,2} = x_{1,5} = x_{2,6} = x_{5,6} = x_{7,8} = 1$$

و بقیه برابر صفر هستند. این جواب، یک جواب نشدنی است. در شکل ۱۰، این جواب نشدنی قابل مشاهده است.



شکل ۱۰: جواب نشدنی در اجرای اول مدل

مطابق جواب فوق، به گام ۳ خواهیم رفت. در این گام باید محدودیت جلوگیری از حلقه اضافه شود. داریم:

$$S_{A_1} = \{1\} \Rightarrow B(S_{A_1}) = \{(1,2), (1,5), (2,6), (5,6)\}$$

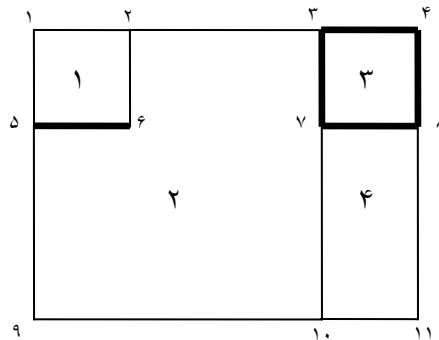
بنابراین در گام ۳، محدودیت زیر به مدل، اضافه می‌شود:

$$x_{1,2} + x_{1,5} + x_{2,6} + x_{5,6} \leq 3$$

مجدداً در گام ۲ با حل مدلی که محدودیت جدید به آن اضافه شده، جواب زیر حاصل خواهد شد:

$$x_{0,5} = x_{0,6} = x_{3,4} = x_{3,7} = x_{4,8} = x_{5,6} = x_{7,8} = 1$$

و بقیه برابر صفر. این جواب نیز، یک جواب نشدنی است. در شکل ۱۱، این جواب نشدنی نشان داده شده است.



شکل ۱۱: جواب نشدنی در اجرای دوم مدل

پس به گام ۳ می‌رویم. در گام ۳ داریم:

$$S_{A_2} = \{3\} \Rightarrow B(S_{A_2}) = \{(3,4), (3,7), (4,8), (7,8)\}$$

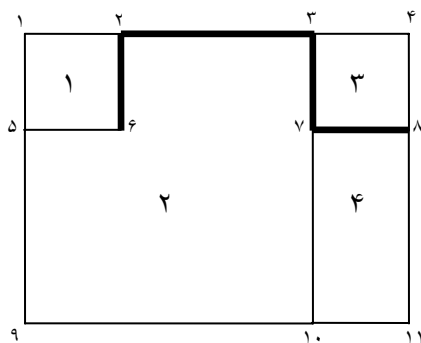
محدودیت زیر را به مدل اضافه می‌کنیم:

$$x_{3,4} + x_{3,7} + x_{4,8} + x_{7,8} \leq 3$$

سپس مجدداً در گام ۲، مدل را با استفاده از LINGO 8.00 حل کرده و به جواب زیر می‌رسیم:

$$x_{0,6} = x_{0,8} = x_{2,3} = x_{2,6} = x_{3,7} = x_{7,8} = 1$$

و بقیه برابر صفر. این جواب، مطابق شکل ۱۲، یک جواب شدنی است.



شکل ۱۲: جواب بهینه بلاک چیدمان شکل ۱۰

۷. نتایج آزمایشی

الگوریتم ارایه شده در بخش ۳، بر روی یک کامپیوتر شخصی (Pentium 3, 1 GHz) و 256 MB RAM اجرا شد که نتایج این آزمایش در جدول ۱ نشان داده شده است. برای نرم افزار حل کننده برنامه ریزی عدد صحیح، LINGO 8.00 انتخاب شد و مثالها با آن حل شد. اندازه مثالها برابر ۲۰، ۲۵، ۳۰، ۳۵، ۴۰ و ۴۵ در نظر گرفته شد. برای هر یک، ۵ مثال بطور تصادفی تولید و حل شد. در حل مثالها، ما گره‌های درجه ۲ را نیز در نظر گرفتیم. علیرغم در نظر گرفتن گره‌های درجه ۲، که باعث افزایش تعداد متغیر و محدودیت می‌شود، نسبت به نتایجی که آصف وزیری و همکارانش [۳] بدست آوردند، نتایج به مراتب بهتر است. در جدول ۱، ستون اول مربوط به اندازه مثال است. ستون دوم تعداد مثالی است که به جواب بهینه رسیده است. در ستون سوم تعداد متوسط تکرارها آورده شده است. منظور از تعداد تکرارها، تعداد دفعاتی است که برای یک مثال از برش استفاده شده است. در ستون چهارم هم، متوسط زمان صرف شده، نشان داده شده است.

جدول ۱: خلاصه نتایج آزمایشی

n	تعداد نمونه های به جواب بهینه رسیده	تعداد متوسط تکرار	متوسط زمان صرف شده (ثانیه)
۱۰	۳	۰	۳
۱۵	۳	۱	۱۴
۲۰	۳	۲	۴۵
۲۵	۳	۲	۱۳۰
۳۰	۳	۳	۵۲۲
۳۵	۳	۳	۲۴۳۴
۴۰	۲	۳	۲۱۸۹
۴۵	۲	۳	۶۶۲۵

۸. جمع بندی و نتیجه گیری

مساله طراحی کوتاهترین مسیری را که حداقل با یک یال از هر سلول در بلاک چیدمان همسایه باشد، مورد بررسی قرار دادیم. یک مدل برنامه ریزی عدد صحیح برای این مساله نشان داده شد. بلاک چیدمان را به عنوان ورودی مدل، ثابت در نظر گرفتیم. تعریف متغیرها، تابع

هدف و محدودیت درجه و پوشش، مانند چیزی است که آصف وزیری و همکاران [۳] بکار برده‌اند، اما محدودیت حذف حلقه را متفاوت از مدل آنها تعریف کردیم. تمامی گره‌های درجه ۲، ۳ و ۴ قابل در نظر گرفتن هستند. برای حل این مدل، الگوریتمی ارائه شد که از یک الگوریتم شاخه و حد بسیار ساده استفاده می‌کند و به سادگی قابل پیاده کردن است. نمونه‌هایی با اندازه $n \leq 45$ با استفاده از برنامه LINGO قابل حل است. جهت حرکتی برای تحقیقات آتی، می‌تواند بهبود این مدل باشد تا اندازه‌های بیشتری قابل حل باشد. همانطور که بیان شد، فرض بر این بود که مسیر با حداقل یک ضلع از هر سلول همسایه باشد. در برخی مسایل همسایه بودن مسیر حداقل در یک گره نیز جواب شدنی محسوب می‌شود که می‌توان مدلی برای این مساله طراحی کرد. همچنین تعیین ایستگاه‌های بارگیری و تخلیه همزمان با طراحی مسیر نیز از مواردی است که قابل بررسی است.

منابع و مراجع

- [1] Afentakis, P., A Loop Layout Design Problem for Flexible Manufacturing Systems, International Journal of Flexible Manufacturing Systems, 1 (1989) 175-196.
- [2] Apple J.M., Plant Layout and Material Handling, Wiley, New York (1997).
- [3] Asef-Vaziri, A., Laporte, G., Sriskandarajah, C., The Block Layout Shortest Loop Design Problem, IIE Transactions, 32 (2000) 724-734.
- [4] Asef-Vaziri, A., Dessouky, M., Sriskandarajah, C., A loop material flow design for Automated Guided Vehicles, IIE Transactions, 13 (2001) 33-48.
- [5] Bozer, Y.A., Srinivasan, M.M., Tandem Configuration for Automated Guided Vehicle Systems and the Analysis of Single Vehicle Loops, IIE Transactions, 23(1) (1991) 72-82.
- [6] Bozer, Srinivasan, Y.A., M.M., Tandem Configuration for Automated Guided Vehicle Systems Offers Simplicity and Flexibility, Industrial Engineering, 21 (1989) 23-27.
- [7] Bozer, Y.A., Srinivasan, M.M., Tandem AGV systems: a partitioning algorithm and performance, European Journal of Operational Research, 63 (1995) 173-191.
- [8] Chhajed, D., Montreuil, B., Lowe, T., Flow network design for manufacturing system layout, European Journal of Operational Research, 57 (1992) 145-161.
- [9] De Guzman, M.C., Prabhu, N., Tanchoco, J.M.A., Complexity of the AGV shortest path and single-loop guide path layout problem, International Journal of Production Research, 35 (1997) 2083-2092.
- [10] Farahani, R.Z., Laporte, G., Sharifyazdi, M., An Exact Algorithm for the Shortest Loop Design Problem in a Block Layout, Submitted paper, 43(90) (2005) 1879-1887.
- [11] Fischetti, M., Salazar, J.J., Toth, P., A branch-and-cut algorithm for the symmetric generalized traveling salesman problem, 45 (1997) 378-394.
- [12] Gaskin, R.J., Tanchoco, J.M.A., Flow Path Design for Automated Guided Vehicle System, International Journal of Production Research, 25(5) (1987) 667-676.
- [13] Hodgson, T., King, R., Monteith, S., Developing Control Rules for an AGVS Using Markov Decision Processes, Material Flow, 4(1) (1987) 85-96.

- [14] Kaspi, M., Tanchoco, J.M.A., Flow path design for automated guided vehicle systems, *International Journal of Production Research*, 28 (1990) 1023-1030.
- [15] Kim, C.W., Tanchoco, J.M.A., Conflict-free shortest-time bidirectional AGV routing, *International Journal of Production Research*, 29 (1991) 2377-2391.
- [16] Laporte, G., Asef-Vaziri, A., Sriskandarajah, C., Some Application of the Generalized Traveling Salesman Problem, *International Journal of Operational Research Society*, 47 (1996) 1461-1467.
- [17] Laporte, G., Nobert, Y., Generalized traveling salesman problem through n sets nodes: an integer programming approach, *INFOR*, 21 (1983) 61-75.
- [18] Maxwell, W.L., Muckstadt, J.A., Design of automated guided vehicle systems, *IIE Transactions*, 14(2) (1982), 114-124.
- [19] Rajagopalan, S., Heragu, S.S., Taylor, G.D., A lagrangian relaxation approach to solving the integrated pick-up/drop-off point and AGV flowpath design problem, *Applied Mathematical Modelling*, 28 (2004), 735-750.
- [20] Roe, A., *User's Guide for LINDO and LINGO, Windows Version*, Duxbury Press (1997)
- [21] Seo, Y., Egbelu, P.J., Flexible guidepath design for automated guided vehicle systems, *International Journal of Production Research*. 33 (1995) 1135-1156.
- [22] D. Sinriech, J. M. A. Tanchoco, The Centriod Projection Method for Locating Pick-up and Delivery Stations in a Single Loop AGV System, *Journal of Manufacturing Systems*, 11(1992) 297-307.
- [23] Sinriech, D., Tanchoco, J.M.A., Solution Methods for the Mathematical Models and Single-Loop AGV Systems, *International Journal of Production Research*, 31(3) (1993) 705-725.
- [24] Tanchoco, J.M.A., Sinriech, D., OSL-Optimal Single-Loop Guide Paths for AGVs, *International Journal of Production Research*, 30(3) (1992) 665-681.
- [25] J. A. Tompkins, J. A. White, Y.A. Bozer, J.M.A. Tanchoco, "Facilities Planning", John Wiley & Sons Inc., New York, (2002) 3rd edition.

An Optimal Algorithm for Finding Bidirectional Shortest Path Design Problem in a Block Layout

Abstract

In this paper, Shortest Path Design Problem (SPDP) in which the path is adjacent to all departments is considered. An Integer Linear Programming (ILP) is developed for the problem. The objective function is to have shortest path. The path must be connected and adjacent to all cells at least in one edge. A model which previously had been used for Shortest Loop Design Problem (SLDP) is used to model the problem. Then, a simple branch and cut problem uses the ILP model to solve the problem. Computational results show that the model easily can solve the problem with less the 45 cells using a commercial ILP solver.

Keywords: AGV, Block Layout, Bidirectional path, Integer Linear Programming