ارائه‌ی روشی جهت تعیین چیدمان تسهیلات با استفاده از نظریه گراف

علی شاهنده
استادیار دانشکده صنایع و سیستمها، دانشگاه صنعتی اصفهان
ali-nook@cc.iut.ac.ir

حسن خاکباز
دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی صنایع، دانشکده صنایع و سیستمها، دانشگاه صنعتی اصفهان
khakbaz@in.iut.ac.ir

واژه های کلیدی: چیدمان بلوکی، نظریه گراف، گراف مسطح ماکزیمال

چکیده

نظریه گراف به عنوان یک رویکرد مهم در چیدمان تسهیلات مطرح می‌باشد و توسط محققان بسیاری مورد مطالعه قرار گرفته است. با این وجود در روشهای مبتنی بر نظریه گراف، هنگام ساخت گراف همسایگی به چیدمانی که نهایتاً از آن حاصل می‌گردد توجه نمی‌شود. لذا در بسیاری موارد، یک تسهیل در گراف همسایگی با تسهیلات بسیاری ارتباط داشته و منجر به ایجاد « اثر چتری » می‌گردد. این مسئله باعث بوجود آمدن شکل‌های نامنظم تسهیلات می‌شود که در اکثر موارد عملی نخواهد بود. در این مقاله یک روش ابتکاری با هدف حداکثر کردن روابط همسایگی ارائه می‌گردد؛ به این صورت که ابتدا با توجه به تعداد تسهیلات، گراف همسایگی مسطح ماکزیمال بدست می‌آید؛ سپس با توجه به مساحت تسهیلات، چیدمان بلوکی مربوطه ترسیم می‌گردد. در این روش با محدود کردن تعداد ارتباطات همسایگی هر تسهیل، گراف همسایگی ساخته می‌شود و لذا در چیدمان بدست آمده شکل تسهیلات منظم بوده، ضمن آنکه حداکثر تعداد روابط همسایگی نیز ارضا می‌گردد.

۱) مقدمه

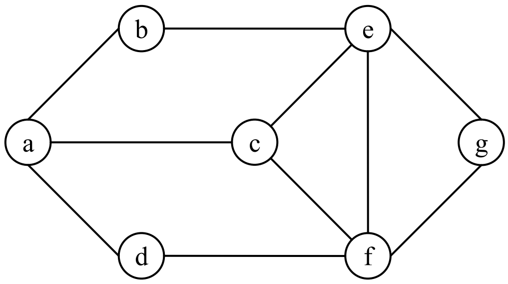
امروزه موضوع نظریه گراف به عنوان یک ابزار توانمند ریاضی در شاخه های مختلف مهندسی صنایع همچون کنترل پروژه، تحقیق در عملیات، طرح ریزی واحدهای صنعتی، تئوری صف و ... بکار می‌رود و عملاً درک بسیاری از مسائل در این موضوعات را آسان می‌سازد. یکی از کاربردهای مهم نظریه گراف در شاخه‌ی طرح ریزی واحدهای صنعتی، کمک به ساخت چیدمان می‌باشد که توسط محققان بسیاری مورد مطالعه واقع شده است. اما پیش از آنکه به روشهای مبتنی بر نظریه گراف در برنامه‌ریزی چیدمان اشاره شود، نخست به تعریف مفاهیم مقدماتی نظریه گراف پرداخته می‌شود.

یک گراف، ساختاری است که از دو قسمت تشکیل شده است:

۱- مجموعه‌ی متناهی از رأس‌هایی[1] که معمولاً با دایره های کوچکی نشان داده می‌شود و اسم رأس در داخل دایره نوشته می‌شود.

۲- مجموعه‌ی متناهی از یال‌ها[2] که هر یال مربوط به جفت رأس‌هایی مانند a و b از مجموعه رأس‌ها است که آن را به صورت (a,b) نشان می‌دهند. در صورتی که به هر یال گراف یک مقدار حقیقی نسبت داده شود، گراف حاصل را گراف وزن‌دار می‌گویند.

شکل ۱ یک گراف با ۷ رأس و ۱۰ یال را نشان می‌دهد.

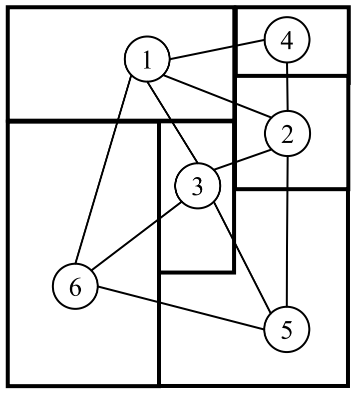


شکل ۱ : یک گراف با ۷ رأس و ۱۰ یال

اگر یک گراف را بتوان در صفحه چنان رسم نمود که یال‌هایش فقط در رأس‌های گراف یکدیگر را قطع کنند، آنرا گراف مسطح[3] می‌گویند و گراف مسطحی که اضافه کردن یک یال به آن موجب غیرمسطح شدن آن شود، یک گراف مسطح ماکزیمال[4] می‌باشد (گراف نشان داده شده در شکل ۱ یک گراف مسطح می‌باشد؛ اما از آنجا که اضافه کردن یال (c,d) موجب غیرمسطح شدن آن نمی‌شود، یک گراف مسطح ماکزیمال نمی‌باشد.). نکته قابل ذکر اینست که هر گراف مسطح ماکزیمال با n رأس دارای 3n-6 یال می‌باشد. هر گراف مسطح، صفحه را به چند ناحیه تقسیم می‌کند که هر ناحیه را یک وجه[5] گراف گویند (گراف نشان داده شده در شکل ۱ دارای ۵ وجه شامل وجه نامتناهی می‌باشد.).

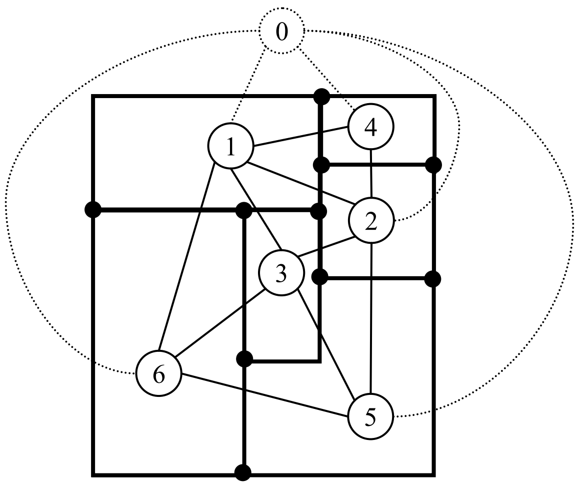
با توجه به مطالب فوق، هر چیدمان بلوکی را می‌توان در قالب یک گراف مسطح نشان داد؛ برای این منظور هر تسهیل[6] (منظور از تسهیل بخشهای مختلف یک سازمان، ماشین‌آلات تولیدی یک واحد صنعتی، میزهای یک اداره و مواردی از این دست می‌باشد.) بوسیله یک رأس گراف و هر دو تسهیل همسایه که بیشتر از یک نقطه مرز مشترک دارند، بوسیله یک یال گراف نشان داده می‌شود. گرافی را که به این صورت بدست می‌آید را گراف همسایگی[7] می‌نامند. شکل ۲ یک چیدمان بلوکی و گراف همسایگی مربوط به آن را نشان می‌دهد. واضح است که گراف همسایگی حاصل از هر چیدمان بلوکی یک گراف مسطح می‌باشد.

[1] vertices
[2] edges
[3] planar graph
[4] maximal planar graph
[5] face
[6] facility
[7] adjacency graph



شکل ۲ : یک چیدمان بلوکی و گراف همسایگی مربوط به آن

هر گراف مسطح، یک گراف متناظر موسوم به گراف دوگان[1] دارد. در بحث برنامه‌ریزی چیدمان، دوگان گراف همسایگی، نشان‌دهنده‌ی ترتیب قرار گرفتن تسهیلات در چیدمان می‌باشد. برای ترسیم گراف دوگان، ابتدا یک رأس مجازی (رأس0) به هر یک از رئوس وجه نامتناهی متصل شده و در داخل هر وجه گراف همسایگی یک رأس قرار داده می‌شود، سپس رئوس مربوط به وجوه گراف همسایگی که با یکدیگر همسایه هستند، توسط یال‌های مربوطه به یکدیگر متصل می‌گردند. در این صورت گراف دوگان تهیه شده و وجوه آن نشان‌دهنده‌ی تسهیلات می‌باشند. شکل ۳ گراف دوگان مربوط به گراف همسایگی شکل ۲ را نشان می‌دهد.



شکل ۳ : گراف همسایگی و دوگان مربوط به آن

بر این اساس، ایجاد یک چیدمان بلوکی با استفاده از نظریه گراف شامل سه مرحله می‌باشد:

۱- ایجاد یک گراف مسطح که نشان‌دهنده‌ی ارتباط همسایگی بین تسهیلات بوده و حداکثر وزن را داشته باشد.
۲- تهیه گراف دوگان با استفاده از گراف همسایگی که نشان دهنده‌ی همسایگی و ترتیب قرار گرفتن تسهیلات می باشد.
۳- ایجاد چیدمان بلوکی با استفاده از گراف دوگان که احتیاجات فضا و مکان را در نظر بگیرد.

---
[1] dual graph

در این مقاله روشی جهت ساخت گراف همسایگی و چیدمان بلوکی مربوط به آن ارائه می‌گردد. مزیت روش ارائه شده اینست که گراف همسایگی حاصل، فاقد « اثر چتری»[1] (که طی آن یک تسهیل با تعداد زیادی از تسهیلات همسایه می‌باشد.) بوده و در نتیجه چیدمان‌های بدست آمده از آن دارای شکل‌های منظم می‌باشد.

۲) پیشینه‌ی تحقیق

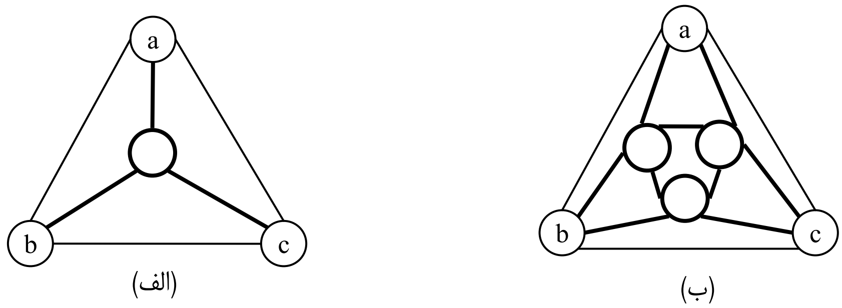
تعداد روابط همسایگی موجود بین n تسهیل برابر $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد، که از این تعداد حداکثر 3n-6 رابطه همسایگی را در یک چیدمان بلوکی می‌توان رعایت نمود. به عنوان مثال در مسأله‌ای با ۲۰ تسهیل، تعداد کل روابط همسایگی برابر ۱۹۰ بوده که از این تعداد، تنها ۵۴ رابطه می‌تواند رعایت گردد. بنابراین تعیین 3n-6 رابطه و یا به عبارت دیگر مشخص کردن گراف همسایگی مسطح ماکزیمال با استفاده از جدول روابط به صورتی که بیشترین وزن را داشته باشد یکی از مسائل مهمی است که مورد توجه محققان قرار گرفته است. در ادامه به مرور مطالعات صورت گرفته در راستای استفاده از نظریه گراف در تعیین چیدمان تسهیلات پرداخته می‌شود.

اولین مرجع در زمینه استفاده از نظریه گراف در مسائل برنامه ریزی چیدمان تسهیلات در سال ۱۹۶۴ ظاهر گردید که طی آن لوین[2] از نظریه گراف در بدست آوردن چیدمان فضایی ساختمانها استفاده نمود [۶].کمی بعد از آن کرجکیریک[3] در سال ۱۹۶۹ یک روش ابتکاری بر پایه نظریه گراف ارائه کرد و از آن برای ایجاد چیدمان بلوکی استفاده نمود [۷]. فولدز و رابینسون[4] (۱۹۷۶) و نوذری و انسکور[5] (۱۹۸۱) روش‌های شاخه و حدی[6] را ارائه کردند که طی آن در هر مرحله یک یال در گراف همسایگی قرار می‌گرفت [۸ و۹]. مشکل روش‌های شاخه‌وحد تلاش محاسباتی زیاد و در نتیجه عدم کاربرد در مسائل با تعداد تسهیلات زیاد می‌باشد. علت اصلی این مشکل، نیاز به بررسی مسطح بودن گراف همسایگی پس از اضافه کردن هر یال می‌باشد.

اما بسیاری از مطالعات صورت گرفته جهت ساخت گراف همسایگی، روش‌هایی می‌باشند که در هر مرحله یک رأس به گراف اضافه شده و در نتیجه نیاز به بررسی مسطح بودن گراف همسایگی در هر مرحله از میان می‌رود. فولدز و رابینسون (۱۹۷۸) نخستین محققانی بودند که با ارائه الگوریتمی جهت ساخت گراف همسایگی مسطح ماکزیمال، بر مشکل بررسی مسطح بودن گراف در هر مرحله غلبه کردند[۱۰]. در این الگوریتم ابتدا با استفاده از جدول روابط مجموع وزن هر تسهیل با سایر تسهیلات محاسبه می گردد و آنگاه تسهیلات به ترتیب کاهشی مرتب می‌گردند؛ سپس چهار تسهیل ابتدایی، گراف اولیه را شکل می‌دهند. در مرحله بعد با توجه به ترتیب تسهیلات، مشخص می‌گردد که هر تسهیل در داخل چه وجهی از گراف قرار گیرد تا بیشترین وزن را داشته باشد. این مرحله برای همه تسهیلات باقیمانده برحسب ترتیب مربوطه تکرار می‌گردد تا آنکه یک گراف همسایگی مسطح ماکزیمال بدست آید. گرین و الحکیم[7] (۱۹۸۵) روشی ارائه نمودند که اصلاح شده‌ای از روش ارائه شده بوسیله فولدز و رابینسون (۱۹۷۸) بود [۱۱]. در این روش با استفاده از جدول روابط ابتدا مجموع وزن هر تسهیل با تسهیلات دیگر محاسبه می گردد و سپس چهار تسهیلی که دارای بیشترین وزن می‌باشند به عنوان گراف اولیه در نظر گرفته می‌شود. آنگاه در هرمرحله همه تسهیلات وارد نشده در گراف همسایگی مورد بررسی قرار گرفته و آن تسهیلی که بیشترین وزن را حاصل کند در وجه مربوطه قرار می‌گیرد. این عمل تا آنجا تکرار می‌گردد که همه تسهیلات در گراف قرار بگیرند که در آن هنگام گراف همسایگی مسطح ماکزیمال حاصل می‌گردد. لیونگ[8] (۱۹۹۲) یک روش حریصانه[9] را ارائه نمود که در آن در هر مرحله یک رأس (شکل ۴ الف) و یا یک وجه مثلثی (شکل ۴ ب) در داخل یکی از وجوه گراف اولیه قرار می گیرد [۱۲].

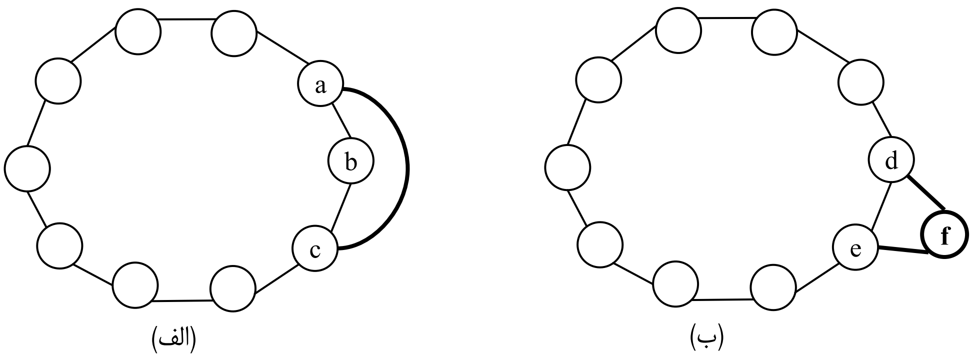
---

[1] umbrella effect
[2] Levin
[3] Krejcirik
[4] Foulds & Robinson
[5] Nozari & Enscore
[6] branch & bound
[7] Green & Al-Hakim
[8] Leung
[9] greedy



شکل ۴ : قرار دادن یک رأس یا یک وجه مثلثی در داخل وجه (a,b,c)

بوسول[1] (۱۹۹۲) روشی موسوم به TESSA ارائه نمود که به جای اضافه کردن یک رأس در هر تکرار، بر روی اضافه کردن یک وجه تمرکز می نمود [۱۳]. در این روش ابتدا تمام وجوه سه رأسی مشخص شده و به ترتیب کاهشی مرتب می‌گردند؛ سپس در هر مرحله براساس ترتیب مربوطه هر وجه به یکی از دو صورت شکل ۵ به گراف همسایگی اضافه می‌گردد تا آنکه گراف همسایگی مسطح ماکزیمال حاصل می‌گردد.



شکل ۵ : اضافه کردن یک وجه به گراف مطابق الگوریتم TESSA

جان و هاموند[2] (۱۹۹۹و۲۰۰۰) در مقالات خود به نکته ای اشاره کردند که تا این زمان در هیچ یک از مقالات پیشین مورد توجه قرار نگرفته بود[۱۴و۱۵]. آنها با توجه به روش‌هایی که در آن در هر مرحله یک تسهیل در یک وجه قرار می‌گیرد، بیان کردند که وقتی یک تسهیل در داخل وجهی قرار می‌گیرد، لزومی ندارد که با هر سه رأس آن مرتبط گردد؛ زیرا ممکن است با یک یا دو رأس از آن وجه ارتباط همسایگی نداشته باشد. درصورتی که اگر این ارتباطات برقرار گردد، باعث می‌شود که در مراحل بعدی، بعضی از روابط همسایگی که لازم می‌باشد، ارضا نگردد. آنها بر این اساس الگوریتمی ارائه کردند که به ساخت گراف همسایگی (که لزوماً نباید مسطح ماکزیمال باشد) می‌پرداخت. عثمان و همکاران[3] (۲۰۰۳) از یک روش فراابتکاری موسوم به GRASP[4] جهت ساخت گراف همسایگی مسطح ماکزیمال استفاده کردند[۱۶]. روش GRASP شامل دو مرحله می‌باشد : در مرحله اول با استفاده از روش گرین و الحکیم (۱۹۸۵) گراف همسایگی مسطح ماکزیمال ساخته می‌شود و در مرحله دوم به بهبود گراف همسایگی با استفاده از جستجوی محلی پرداخته می‌شود.

اما در همه‌ی روش‌های ذکر شده گراف همسایگی بدون توجه به چیدمانی که از آن حاصل می‌گردد ساخته می‌شود. بنابراین در بسیاری موارد بویژه در زمانی که تعداد تسهیلات زیاد می‌گردد، چیدمان‌های بدست آمده از گراف همسایگی دارای شکل‌های نامنظم بوده و عملی

---

[1] Boswell
[2] John & Hammond
[3] Osman et al.
[4] Greedy Random Adaptive Search Procedure (GRASP)

نخواهد بود. مهمترین دلیل در بوجود آمدن شکل‌های نامنظم، وجود « اثر چتری» در گراف همسایگی می‌باشد، اما در این مقاله با محدود کردن تعداد ارتباط همسایگی هر تسهیل، این مشکل برطرف شده به صورتی که یک تسهیل حداکثر با ۶ تسهیل دیگر همسایه می‌گردد. در این حالت تبدیل گراف همسایگی به یک چیدمان بلوکی ساده‌تر شده و شکل‌های بدست آمده برای تسهیلات منظم می‌باشد.

۳) تشریح روش ارائه شده

مسائل برنامه ریزی چیدمان بوسیله نظریه گراف که توسط ساخت گراف همسایگی مسطح ماکزیمال نشان داده می شود، می تواند به صورت زیر فرموله گردد :

$$MaxZ = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} w_{ij} x_{ij}$$

St: (1) گراف همسایگی مسطح باشد.

$$(2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} x_{ij} = 3n - 6$$

$$(3) x_{ij} = \{0,1\} \forall i, j$$

که در آن داریم :

n : تعداد تسهیلات

w_{ij} : وزن مربوط به ارتباط بین تسهیلات i و j

$$x_{ij}: \begin{cases} ۱ & \text{اگر تسهیل } i \text{ و } j \text{ همسایه باشند.} \\ ۰ & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

واضح است که تابع هدف در مدل فوق، حداکثر کردن ارتباطات همسایگی درنظر گرفته شده است. بنابراین در ساخت گراف همسایگی از جدول روابط که سود حاصل از قرارگیری دو تسهیل در همسایگی یکدیگر را نشان می‌دهد، استفاده می‌گردد.

در روش ارائه شده با توجه به تعداد تسهیلات، سه حالت مختلف درنظر گرفته می‌شود:

حالت اول: باقیمانده تقسیم تعداد تسهیلات بر ۳ برابر صفر باشد.

حالت دوم: باقیمانده تقسیم تعداد تسهیلات بر ۳ برابر یک باشد.

حالت سوم: باقیمانده تقسیم تعداد تسهیلات بر ۳ برابردو باشد.

در ادامه الگوریتم مربوط به ساخت گراف همسایگی و تعیین چیدمان مربوطه در هر یک از حالات توضیح داده می‌شود.

۳-۱) حالت اول: باقیمانده تقسیم تعداد تسهیلات بر ۳ برابر صفراست.

در این حالت مدل عمومی گراف همسایگی و چیدمان بلوکی مربوطه به صورت شکل ۶ بوده و گامهای الگوریتم به صورت زیر می‌باشد:

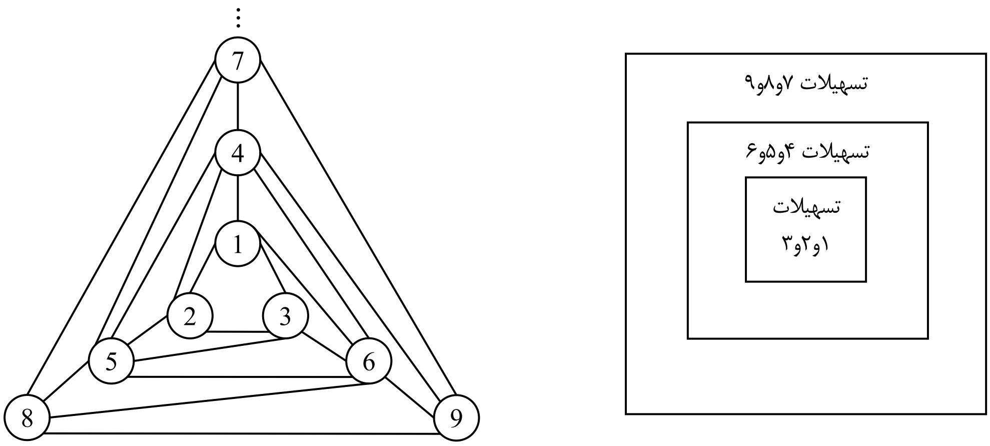
گام ۱: با توجه به جدول روابط، جفت تسهیلی که بیشترین وزن را دارند در رئوس ۱و۲ گراف همسایگی شکل ۶ قرار می‌گیرند.

گام ۲: از بین سایر تسهیلات، آن تسهیلی که مجموع وزن بیشتری با دو تسهیل گام ۱ دارد در رأس ۳ گراف همسایگی شکل ۶ قرار می‌گیرد.

گام ۳: جایگذاری تسهیلاتی که تاکنون در گراف همسایگی قرار نگرفته‌اند، در یکی از رئوس ۴، ۵ و۶ گراف همسایگی شکل ۶ بررسی شده و آن تسهیلی که بیشترین وزن را حاصل کند در رأس مربوطه قرار می‌گیرد. این مرحله تا زمانی که سه تسهیل در رئوس ۴، ۵ و۶ گراف همسایگی قرار گیرند ادامه می‌یابد. در صورتی که همه تسهیلات در گراف همسایگی قرار گرفته‌اند به گام ۵ و در غیر اینصورت به گام ۴ می‌رویم.

گام ۴: مشابه روند گام ۳ برای رئوس (۹و۸ و۷)، (۱۲و۱۱و۱۰) و ... تکرار می‌گردد تا آنکه همه تسهیلات در گراف همسایگی قرار گیرند که در این حالت گراف همسایگی مسطح ماکزیمال حاصل می‌گردد.

گام ۵: با توجه به مساحت تسهیلات و مدل عمومی چیدمان بلوکی شکل ۶ ، چیدمان مربوطه بدست می‌آید.



شکل ۶ : مدل عمومی گراف همسایگی و چیدمان بلوکی مربوط به حالت اول

۳-۲) حالت دوم: باقیمانده تقسیم تعداد تسهیلات بر ۳ برابر یک است.

در این حالت مدل عمومی گراف همسایگی و چیدمان بلوکی مربوطه به صورت شکل ۷ بوده و گامهای الگوریتم به صورت زیر می‌باشد:

گام ۱: با توجه به جدول روابط، جفت تسهیلی که بیشترین وزن را دارند در رئوس ۱و۲ گراف همسایگی شکل ۷ قرار می‌گیرند.

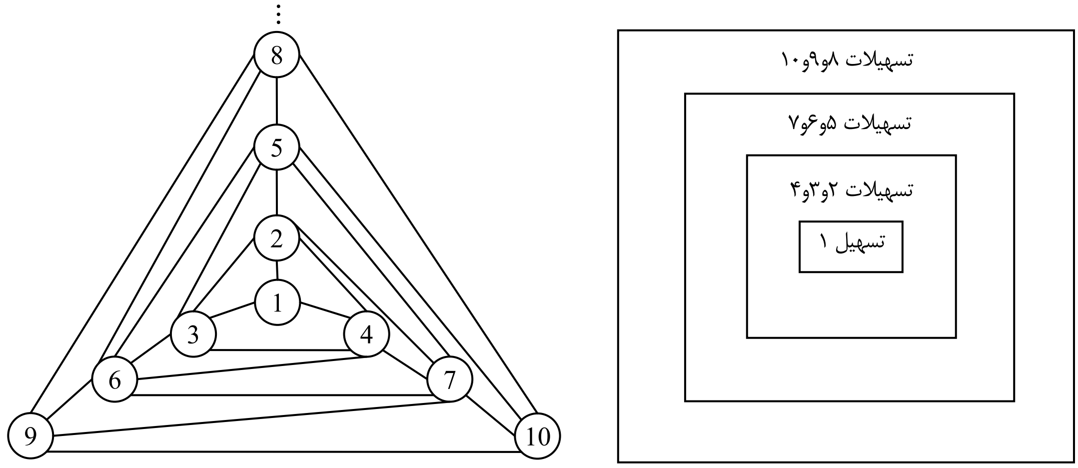
گام ۲: از بین سایر تسهیلات، آن تسهیلی که مجموع وزن بیشتری با دو تسهیل گام ۱ دارد در رأس ۳ گراف همسایگی شکل ۷ قرار می‌گیرد.

گام ۳: از بین تسهیلاتی که تاکنون در گراف همسایگی قرار نگرفته‌اند، آن تسهیلی که مجموع وزن بیشتری با ۳ تسهیل گام ۱ و ۲ دارد در رأس ۴ گراف همسایگی شکل ۷ قرار می‌گیرد.

گام ۴: جایگذاری تسهیلاتی که تاکنون در گراف همسایگی قرار نگرفته‌اند، در یکی از رئوس ۵، ۶ و۷ گراف همسایگی شکل ۷ بررسی شده و آن تسهیلی که بیشترین وزن را حاصل کند در رأس مربوطه قرار می‌گیرد. این مرحله تا زمانی که سه تسهیل در رئوس ۵، ۶ و۷ گراف همسایگی قرار گیرند ادامه می‌یابد. در صورتی که همه تسهیلات در گراف همسایگی قرار گرفته‌اند به گام ۶ و در غیر اینصورت به گام ۵ می‌رویم.

گام ۵: مشابه روند گام ۳ برای رئوس (۱۰و۹ و۸)، (۱۳و۱۲و۱۱) و ... تکرار می‌گردد تا آنکه همه تسهیلات در گراف همسایگی قرار گیرند که در این حالت گراف همسایگی مسطح ماکزیمال حاصل می‌گردد.

گام ۶: با توجه به مساحت تسهیلات و مدل عمومی چیدمان بلوکی شکل ۷ ، چیدمان مربوطه بدست می‌آید.



شکل ۷ : مدل عمومی گراف همسایگی و چیدمان بلوکی مربوط به حالت دوم

۳-۳) حالت سوم: باقیمانده تقسیم تعداد تسهیلات بر ۳ برابر دو است.

در این حالت مدل عمومی گراف همسایگی و چیدمان بلوکی مربوطه به صورت شکل ۸ بوده و گامهای الگوریتم به صورت زیر می‌باشد:

گام ۱: با توجه به جدول روابط، جفت تسهیلی که بیشترین وزن را دارند در رئوس ۱و۲ گراف همسایگی شکل ۸ قرار می‌گیرند.

گام ۲: از بین سایر تسهیلات، آن تسهیلی که مجموع وزن بیشتری با دو تسهیل گام ۱ دارد در رأس ۳ گراف همسایگی شکل ۸ قرار می‌گیرد.

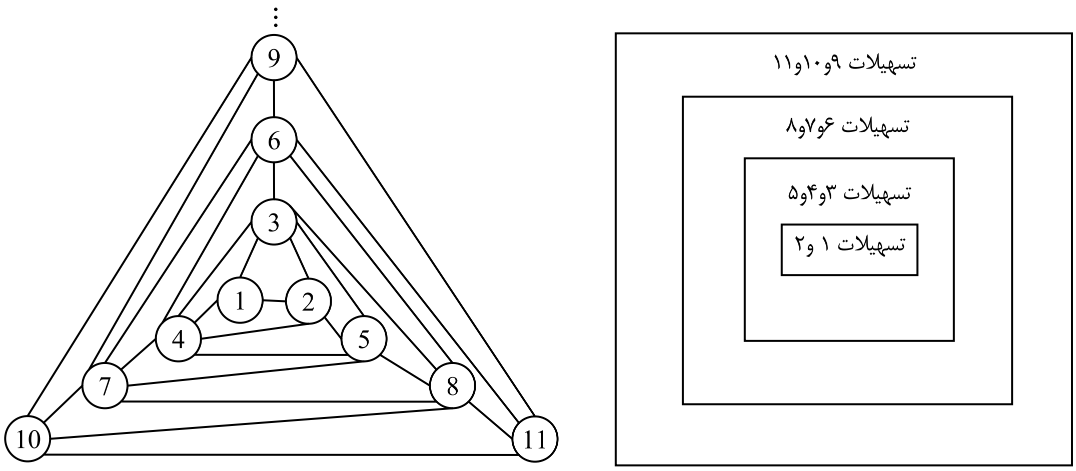
گام ۳: از بین تسهیلاتی که تاکنون در گراف همسایگی قرار نگرفته‌اند، آن تسهیلی که مجموع وزن بیشتری با ۳ تسهیل گام ۱ و ۲ دارد در رأس ۴ گراف همسایگی شکل ۸ قرار می‌گیرد.

گام ۴: از بین تسهیلاتی که تاکنون در گراف همسایگی قرار نگرفته‌اند، آن تسهیلی که مجموع وزن بیشتری با تسهیلات رئوس ۲و۳و۴ گراف همسایگی دارد در رأس ۵ گراف همسایگی شکل ۸ قرار می‌گیرد. در صورتی که همه تسهیلات در گراف همسایگی قرار گرفته‌اند به گام ۷ و در غیر اینصورت به گام ۵ می‌رویم.

گام ۵: جایگذاری تسهیلاتی که تاکنون در گراف همسایگی قرار نگرفته‌اند، در یکی از رئوس ۶، ۷ و۸ گراف همسایگی شکل ۸ بررسی شده و آن تسهیلی که بیشترین وزن را حاصل کند در رأس مربوطه قرار می‌گیرد. این مرحله تا زمانی که سه تسهیل در رئوس ۶، ۷ و۸ گراف همسایگی قرار گیرند ادامه می‌یابد. در صورتی که همه تسهیلات در گراف همسایگی قرار گرفته‌اند به گام ۷ و در غیر اینصورت به گام ۶ می‌رویم.

گام ۶: مشابه روند گام ۳ برای رئوس (۱۱و۱۰ و۹)، (۱۴و۱۳و۱۲) و ... تکرار می‌گردد تا آنکه همه تسهیلات در گراف همسایگی قرار گیرند که در این حالت گراف همسایگی مسطح ماکزیمال حاصل می‌گردد.

گام ۷: با توجه به مساحت تسهیلات و مدل عمومی چیدمان بلوکی شکل ۸ ، چیدمان مربوطه بدست می‌آید.



شکل ۸: مدل عمومی گراف همسایگی و چیدمان بلوکی مربوط به حالت سوم

۴) مثال عددی

در این قسمت جهت روشن شدن روش ارائه شده به ذکر مثالی پرداخته می‌شود. برای این منظور جدول روابط ۱ درنظر گرفته شده و سه حالت ۶ تسهیل، ۷ تسهیل و ۸ تسهیل مدنظر قرار می‌گیرد. بنابراین در حالت اول چیدمان حاصل از تسهیلات a، b، c، d، e، f، در حالت دوم چیدمان حاصل از تسهیلات a، b، c، d، e، f، g و در حالت سوم چیدمان حاصل از تسهیلات a، b، c، d، e، f، g وh بدست می‌آید.

	a	b	c	d	e	f	g	h
a								
b	۰							
c	۳	۴۴						
d	۵۳	۳۴	۶۰					
e	۳۳	۵۴	۳۵	۹				
f	۴	۴۵	۴۶	۴۷	۲۵			
g	۴۳	۳۶	۳۹	۵۹	۴۸	۶۲		
h	۵۵	۳۲	۸	۱۰	۵۱	۵۷	۲۸	
مساحت (متر مربع)	۱۶	۸	۶	۸	۱۲	۴	۸	۱۲

جدول ۱ : جدول روابط مربوط به ۸ تسهیل

۴-۱) حالت اول: تسهیلات f ،e ،d ،c ،b ،a

از آنجا که تعداد تسهیلات برابر ۶ می‌باشد، بنابراین حالت اول مدنظر قرار می‌گیرد. گامهای الگوریتم مربوطه جهت بدست آوردن چیدمان به صورت زیر می‌باشد:

گام ۱: با توجه به جدول روابط جفت تسهیل c و d دارای بیشترین وزن (۶۰) بوده و رئوس ۱و۲ گراف همسایگی را تشکیل می‌دهند (شکل۹ الف).

گام ۲: با توجه به جدول ۲ تسهیل f مجموع وزن بیشتری (۹۳) با دو تسهیل c و d داشته و در رأس ۳ گراف همسایگی قرار می‌گیرد (شکل ۹ ب).

تسهیل	c	d	مجموع
a	۳	۵۳	۵۶
b	۴۴	۳۴	۷۸
e	۳۵	۹	۴۴
f	۴۶	۴۷	۹۳ *

جدول ۲: محاسبات مربوط به گام ۲

گام ۳: در مرحله‌ی اول، با توجه به جدول ۳ جایگذاری تسهیل b در رأس ۶ گراف همسایگی بیشترین وزن (۸۹) را خواهد داشت (شکل ۹ ج).

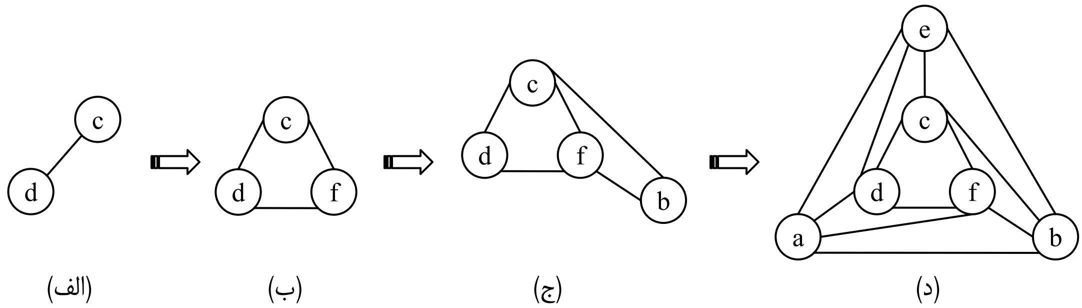
تسهیل	رأس ۴		مجموع	رأس ۵		مجموع	رأس ۶		مجموع
	c	d		d	f		c	f	
a	۳	۵۳	۵۶	۵۳	۴	۵۷	۳	۴	۷
b	۴۴	۳۴	۷۸	۳۴	۴۵	۷۹	۴۴	۴۵	۸۹*
e	۳۵	۹	۴۴	۹	۲۵	۳۴	۳۵	۲۵	۷۰

جدول ۳ : محاسبات مربوط به گام ۳ در مرحله اول

در مرحله‌ی دوم، با توجه به جدول ۴، جایگذاری تسهیل b در رأس ۴ گراف همسایگی بیشترین وزن (۹۸) را خواهد داشت و تنها تسهیل باقیمانده (a) نیز در رأس ۵ گراف همسایگی قرار می‌گیرد و گراف همسایگی مسطح ماکزیمال حاصل می‌گردد (شکل ۹ د). وزن گراف همسایگی در این حالت برابر ۴۳۰ می‌باشد.

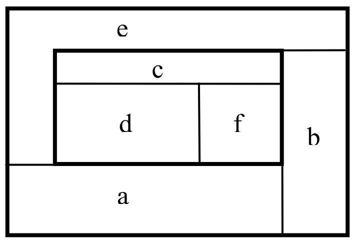
تسهیل	رأس ۴			مجموع	رأس ۵			مجموع
	b	c	d		b	d	f	
a	۰	۳	۵۳	۵۶	۰	۵۳	۴	۵۷
e	۵۴	۳۵	۹	۹۸*	۵۴	۹	۲۵	۸۸

جدول ۴ : محاسبات مربوط به گام ۳ در مرحله دوم



شکل ۹ : روند شکل‌گیری گراف همسایگی مسطح ماکزیمال (حالت اول)

گام ۴: با توجه به مساحت تسهیلات در جدول ۱ چیدمان نهایی به صورت شکل ۱۰ می‌باشد.



شکل ۱۰ : چیدمان نهایی مربوط به حالت اول

۲-۴) حالت دوم: تسهیلات a، b، c، d، e، f، g

از آنجا که تعداد تسهیلات برابر ۷ می‌باشد، بنابراین حالت دوم مدنظر قرار می‌گیرد. گامهای الگوریتم مربوطه جهت بدست آوردن چیدمان به صورت زیر می‌باشد:

گام ۱: با توجه به جدول روابط جفت تسهیل f و g دارای بیشترین وزن (۶۲) بوده و رئوس ۱و۲ گراف همسایگی را تشکیل می‌دهند (شکل۱۱ الف).

گام ۲: با توجه به جدول ۵ تسهیل d مجموع وزن بیشتری (۱۰۶) با دو تسهیل f و g داشته و در رأس ۳ گراف همسایگی قرار می‌گیرد (شکل ۱۱ ب).

تسهیل	f	g	مجموع
a	۴	۴۳	۴۷
b	۴۵	۳۶	۸۱
c	۴۶	۳۹	۸۵
d	۴۷	۵۹	*۱۰۶
e	۲۵	۴۸	۷۳

جدول ۵ : محاسبات مربوط به گام ۲

گام ۳: با توجه به جدول ۶ تسهیل c مجموع وزن بیشتری (۱۴۵) با سه تسهیل d ، f و g داشته و در رأس ۴ گراف همسایگی قرار می‌گیرد (شکل ۱۱ ج).

تسهیل	d	f	g	مجموع
a	۵۳	۴	۴۳	۱۰۰
b	۳۴	۴۵	۳۶	۱۱۵
c	۶۰	۴۶	۳۹	۱۴۵*
e	۹	۲۵	۴۸	۸۲

جدول ۶ : محاسبات مربوط به گام ۳

گام ۴ : در مرحله‌ی اول، با توجه به جدول ۷ جایگذاری تسهیل a در رأس ۵ گراف همسایگی بیشترین وزن (۹۶) را خواهد داشت (شکل ۱۱ د).

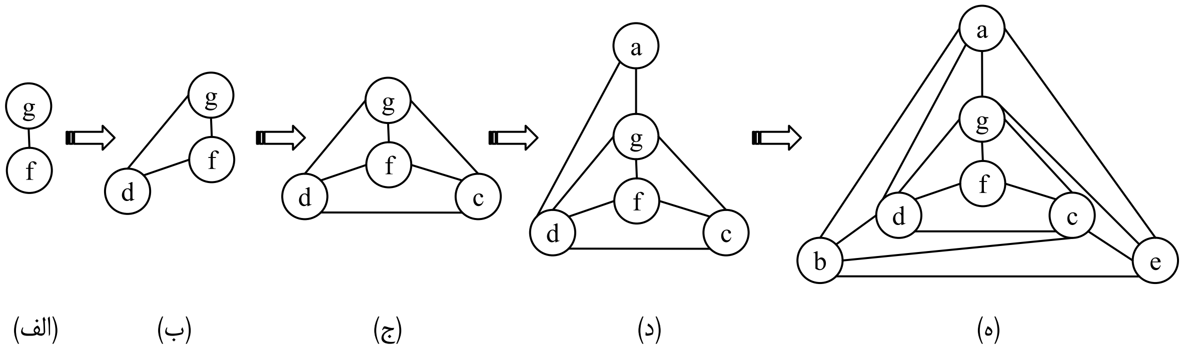
تسهیل	رأس ۵		مجموع	رأس ۶		مجموع	رأس ۷		مجموع
	d	g		c	d		c	g	
a	۵۳	۴۳	۹۶*	۳	۵۳	۵۶	۳	۴۳	۴۶
b	۳۴	۳۶	۷۰	۴۴	۳۴	۷۸	۴۴	۳۶	۸۰
e	۹	۴۸	۵۷	۳۵	۹	۴۴	۳۵	۴۸	۸۳

جدول ۷ : محاسبات مربوط به گام ۴ در مرحله اول

در مرحله‌ی دوم، با توجه به جدول ۸، جایگذاری تسهیل e در رأس ۷ گراف همسایگی بیشترین وزن (۱۱۶) را خواهد داشت و تنها تسهیل باقیمانده (b) نیز در رأس ۶ گراف همسایگی قرار می‌گیرد و گراف همسایگی مسطح ماکزیمال حاصل می‌گردد (شکل ۱۱ ه). وزن گراف همسایگی در این حالت برابر ۶۵۷ می‌باشد.

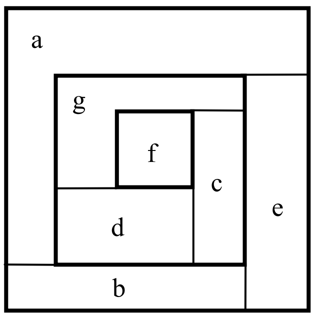
تسهیل	رأس ۶			مجموع	رأس ۷			مجموع
	a	c	d		a	c	g	
b	۰	۴۴	۳۴	۷۸	۰	۴۴	۳۶	۸۰
e	۳۳	۳۵	۹	۷۷	۳۳	۳۵	۴۸	۱۱۶*

جدول ۸ : محاسبات مربوط به گام ۴ در مرحله دوم



شکل ۱۱ : روند شکل‌گیری گراف همسایگی مسطح ماکزیمال (حالت دوم)

گام ۵: با توجه به مساحت تسهیلات در جدول ۱ چیدمان نهایی به صورت شکل ۱۲ می‌باشد.



شکل ۱۲ : چیدمان نهایی مربوط به حالت دوم

۴-۳) حالت سوم : تسهیلات a، b، c، d، e، f، g، h

از آنجا که تعداد تسهیلات برابر ۸ می‌باشد، بنابراین حالت سوم مدنظر قرار می‌گیرد. گامهای الگوریتم مربوطه جهت بدست آوردن چیدمان به صورت زیر می‌باشد:

گام ۱: با توجه به جدول روابط جفت تسهیل f و g دارای بیشترین وزن (۶۲) بوده و رئوس ۱و۲ گراف همسایگی را تشکیل می‌دهند (شکل۱۳ الف).

گام ۲: با توجه به جدول ۵ تسهیل d مجموع وزن بیشتری (۱۰۶) با دو تسهیل f و g داشته و در رأس ۳ گراف همسایگی قرار می‌گیرد (شکل ۱۳ ب).

گام ۳: با توجه به جدول ۶ تسهیل c مجموع وزن بیشتری (۱۴۵) با سه تسهیل d ، f و g داشته و در رأس ۴ گراف همسایگی قرار می‌گیرد (شکل ۱۳ ج).

گام ۴: با توجه به جدول ۹ تسهیل b مجموع وزن بیشتری (۱۱۴) با سه تسهیل c ، d و g داشته و در رأس ۵ گراف همسایگی قرار می‌گیرد (شکل ۱۳ د).

تسهیل	c	d	g	مجموع
a	۳	۵۳	۴۳	۹۹
b	۴۴	۳۴	۳۶	۱۱۴*
e	۳۵	۹	۴۸	۹۲
h	۸	۱۰	۲۸	۴۶

جدول ۹ : محاسبات مربوط به گام ۴

گام ۵ : در مرحله‌ی اول، با توجه به جدول ۱۰ جایگذاری تسهیل e در رأس ۷ گراف همسایگی بیشترین وزن (۸۹) را خواهد داشت (شکل ۱۳ ه).

تسهیل	رأس ۶		مجموع	رأس ۷		مجموع	رأس ۸		مجموع
	c	d		b	c		b	d	
a	۳	۵۳	۵۶	۰	۳	۳	۰	۵۳	۵۳
e	۳۵	۹	۴۴	۵۴	۳۵	۸۹*	۵۴	۹	۶۳
h	۸	۱۰	۱۸	۳۲	۸	۴۰	۳۲	۱۰	۴۲

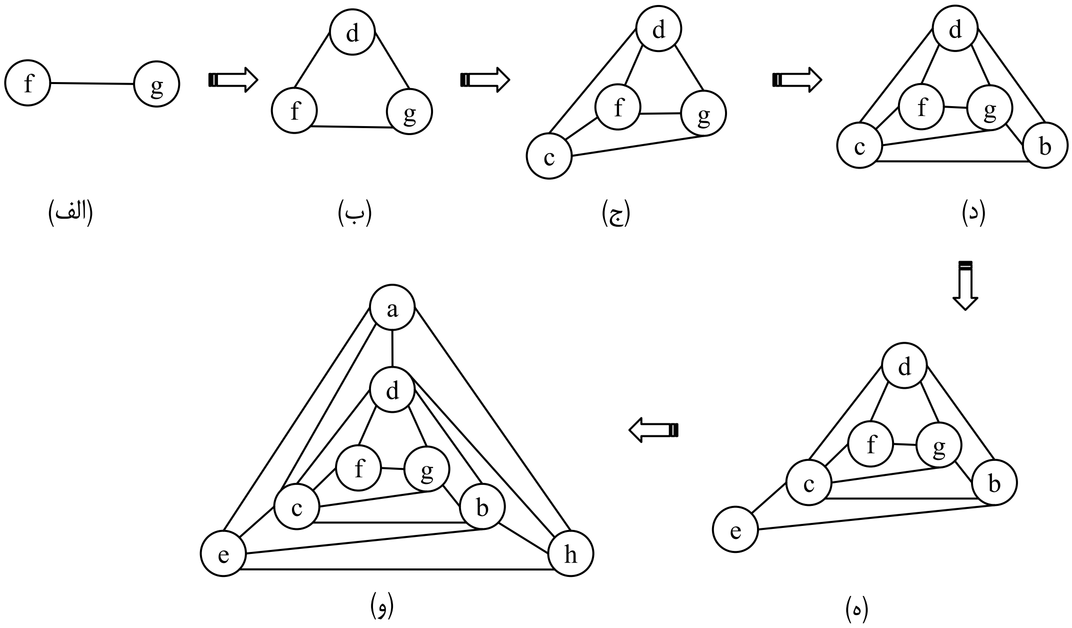
جدول ۱۰ : محاسبات مربوط به گام ۵ در مرحله اول

در مرحله‌ی دوم، با توجه به جدول ۱۱، جایگذاری تسهیل h در رأس ۸ گراف همسایگی بیشترین وزن (۹۳) را خواهد داشت و تنها تسهیل باقیمانده (a) نیز در رأس ۶ گراف همسایگی قرار می‌گیرد و گراف همسایگی مسطح ماکزیمال حاصل می‌گردد (شکل ۱۳ و). وزن گراف همسایگی در این حالت برابر ۷۵۳ می‌باشد.

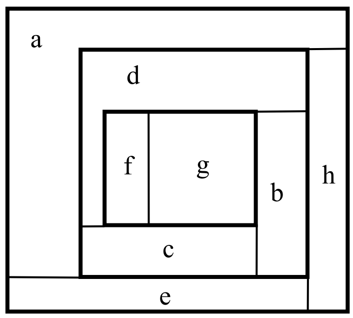
تسهیل	رأس ۶			مجموع	رأس ۸			مجموع
	c	d	e		b	d	e	
a	۳	۵۳	۳۳	۸۹	۰	۵۳	۳۳	۸۶
h	۸	۱۰	۵۱	۶۹	۳۲	۱۰	۵۱	۹۳*

جدول ۱۱ : محاسبات مربوط به گام ۵ در مرحله دوم

گام ۶: با توجه به مساحت تسهیلات در جدول ۱ چیدمان نهایی به صورت شکل ۱۴ می‌باشد.



شکل ۱۳ : روند شکل‌گیری گراف همسایگی مسطح ماکزیمال (حالت سوم)



شکل ۱۴ : چیدمان نهایی مربوط به حالت سوم

۵) نتیجه‌گیری و پیشنهادات

مسائل برنامه‌ریزی چیدمان تسهیلات در جستجوی بهترین ترتیب و شکل تسهیلات می‌باشند. در صورتی که از جدول روابط جهت ساخت چیدمان استفاده گردد، تابع هدف به صورت حداکثر کردن ارتباطات همسایگی تعریف می‌گردد. در این حالت استفاده از نظریه گراف یک روش قدرتمند برای ساخت چیدمان به شمار می‌آید. علت این امر آنست که با استفاده از نظریه گراف بیشترین تعداد روابط همسایگی موجود بین n تسهیل (که برابر 3n-6 است) می‌تواند رعایت گردد. مزیت دیگری که برای روش‌های مبتنی بر نظریه گراف وجود دارد، اینست که می‌توان یک حد بالا جهت ارزیابی کیفیت جوابهای بدست آمده تعیین نمود. برای این منظور مجموع 3n-6 قویترین رابطه از بین $\frac{n(n-1)}{2}$ رابطه‌ی موجود بین n تسهیل به عنوان یک حد بالا تعریف می‌گردد. اهمیت این حد بالا زمانی آشکارتر می‌گردد که بدانیم اکثر قریب به اتفاق روشهای ارائه شده جهت ساخت گراف همسایگی، روشهای ابتکاری برای این منظور پیشنهاد داده‌اند. اما مهمترین

مشکل روشهای نظریه گراف، شکل چیدمان‌های حاصل از گراف همسایگی می‌باشد که در بسیاری موارد شکل تسهیلات نامنظم بوده و نیاز به تغییرات در آن احساس می‌گردد. از طرف دیگر اصلاح شکل تسهیلات منجر به از دست رفتن بعضی از روابط همسایگی می‌شود. دلیل اصلی شکل‌های نامنظم تسهیلات، وجود « اثر چتری » در گراف همسایگی بوده که طی آن برخی از تسهیلات ملزم به همسایگی با تسهیلات بسیاری می‌گردند. در این مقاله با ارائه‌ی روشی، ضمن آنکه حداکثر تعداد روابط همسایگی (3n-6) ارضا می‌گردد، چنین مشکلی نیز بوجود نخواهد آمد و می توان چیدمان‌هایی با شکل منظم تسهیلات بدست آورد. همچنین تبدیل گراف همسایگی به چیدمان بلوکی که در بسیاری از مقالات کاری سخت و دشوار بیان شده است، به صورتی ساده‌تر انجام می‌پذیرد. اما از آنجا که روش ارائه شده جهت ساخت گراف همسایگی مسطح ماکزیمال یک روش ابتکاری بوده و لزوماً جواب بهینه را بدست نمی‌دهد، می‌توان پیش از تبدیل گراف همسایگی به چیدمان بلوکی بهبودهایی را در آن حاصل نمود که این مورد جهت مطالعه و تحقیق بیشتر، پیشنهاد می‌گردد.

تشکر و قدردانی

در اینجا از دکتر الوین جان بخاطر راهنمایی‌های ارزنده ایشان و همچنین از پرفسور فولدز و دکتر محسن محمد حسن بخاطر تأمین برخی منابع مطالعاتی تشکر و قدردانی بعمل می‌آید.

منابع و مراجع

[۱] اپل، ج ، طرح ریزی واحدهای صنعتی، اردوان آصف وزیری، انتشارات تندر، ۱۳۷۲

[۲] باندی، ج، مورتی، س ، نظریه گراف و کاربردهای آن، دارا معظمی، انتشارات مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۷۸

[۳] تام کینز، وایت، بوزر، فریزل، تان چوکو، تروینو ، طرح ریزی واحدهای صنعتی (اصول طراحی کارخانه)، رضا زنجیرانی فراهانی، انتشارات ترمه، ۱۳۷۹

[۴] رشیدیان، پ، نظریه گراف، انتشارات دانشگاه کردستان، ۱۳۸۲

[۵] ویلسون، ر ، درآمدی بر نظریه گراف، جعفر بی آزار، انتشارات دانشگاه گیلان، ۱۳۷۷

[6] Levin, P.H., Use of Graphs to Decide Optimum Layout of Buildings, The Architects Journal, Vol.7, p. 908, 1964

[7] Krejcirik, M., Computer Aided Plant Layout, Computer Aided Design, Vol.2, pp. 7-19, 1969

[8] Foulds, L.R., Robinson, D.F., a strategy for solving the plant layout problem, Operational Research Quarterly, Vol. 27, pp. 845-855, 1976

[9] Nozari, A., Enscore, E.E., Computerized facility layout with graph theory, Computers & Industrial Engineering, Vol. 5, p.183, 1981

[10] Foulds, L.R., Robinson, D.F., Graph theoretic heuristics for the plant layout problem, International journal of Production Research, Vol. 16, No.1, pp.27-37, 1978

[11] Green, R.H., Al-Hakim, L., A heuristic for facilities layout planning, Omega, Vol. 13, p.469, 1985

[12] Leung, J., A New Graph-Theoretic Heuristic for Facility Layout, Management Science, Vol.38, No. 4, pp. 594-605, 1992

[13] Boswell, S.G., A new greedy heuristic for facilities layout planning, International journal of Production Research, Vol. 30, No. 8, pp. 1957-1968, 1992

[14] John, E.G., Hammond, J., A maximally weighted planar graph method for facilities design, Proc. Instn. Mech. Engrs., Vol.213, Part B, pp. 421-425, 1999

[15] John, E.G., Hammond, J., A maximally weighted graph theoretic facilities design planning, International journal of Production Research, Vol. 38, No. 16, pp. 3845-3859, 2000

[16] Osman, I., Al-Ayoubi, B., Barake, M., A greedy random adaptive search procedure for the weighted maximal planar graph problem, Computers & Industrial Engineering, Vol. 45, pp. 635-651, 2003
[17] Heragu, S., Facilities Design, PWS Publishing Company, 1997
[18] Hassan, M.M.D., Hogg, G.L., A review of graph theory application to the facilities layout problem, Omega, Vol. 15, p.291, 1987
[19] Al-Hakim, L., A note on 'On TESSA', International journal of Production Research, Vol.32, No.1, pp. 223-225, 1994
[20] Boswell, S.G., A reply to 'A note on On TESSA', International journal of Production Research, Vol. 32, No.1, pp. 227-230, 1994
[21] Tompkins, J.A., White, J.A., Bozer, Y.A., Frazelle, E.H., Tanchoko, J.M.A., Trerina, J., Facilities Planning, John Wiley & Sons, 1996