# ارائه یک الگوریتم ژنی برای تعیین جوابهای کارا در مساله توالی عملیات تک‌ماشینه با دومعیار ارزیابی و پارامترهای فازی

محمدرضا امین ناصری
استادیار گروه صنایع دانشگاه تربیت مدرس
علیرضا علیزاده
فارغ التحصیل کارشناسی ارشد مهندسی صنایع دانشگاه تربیت مدرس

## چکیده

*در بسیاری از مسائل زمانبندی، معیارهای چندگانه برای ارزیابی توالی‌ها مد نظر تصمیم‌گیران و برنامه‌ریزان قرار می‌گیرند. از دیگر معمولا پارامترهای عمده مساله نظیر زمانهای پردازش و زمانهای تحویل، در مسائل واقعی قطعی نیستند. در این مقاله مساله توالی عملیات تک‌ماشینه با معیارهای متوسط زمان در جریان ساخت در سیستم و متوسط دیرکردها برای حالتی که پارامترهای عمده مساله نظیر زمانهای پردازش و زمانهای تحویل اعداد فازی هستند، بررسی می‌شود. ابتدا مدل برنامه‌ریزی ریاضی بر اساس رویکرد برنامه‌ریزی صفر و یک برای مساله ارائه می‌گردد و نشان داده می‌شود که مدل قابلیت تعمیم به حالتهای دیگر را دارا بوده، محدودیتهایی نظیر محدودیت پیش‌نیازی بر مدل قابل اعمال است. نشان داده می‌شود که مساله از نوع $NP$ دشوار است و الگوریتمی برمبنای الگوریتم ژنتیک چندمعیاره برای مساله ارائه می‌شود(G). کارایی الگوریتم ارائه شده با جوابهای بهینه، که به وسیله تولید جایگشتی تمام توالی‌ها حاصل می‌شود، مقایسه شده، نشان داده می‌شود که الگوریتم جواب نسبتا خوبی را در زمان معقول برای مساله ارائه می‌کند.*

**واژگان کلیدی:** *توالی عملیات تک‌ماشینه، دیرکرد، زمان در جریان ساخت، تصمیم‌گیری چندمعیاره، تئوری مجموعه‌های فازی، الگوریتم ژنتیک چندمعیاره*

### ۱–مقدمه

مساله برنامه‌ریزی توالی عملیات در طول زمان برای اجرای مجموعه‌ای از وظایف، از مهمترین دغدغه‌های تصمیم‌گیرندگان در عرصه برنامه‌ریزی تولید است. می‌توان اذعان کرد که استفاده از مدلهای نمادین و بهره‌گیری از رویکردهای برنامه‌ریزی ریاضی در حل این‌گونه مسائل نقطه عطفی در سیر تحول روشهای برنامه‌ریزی است. در این مقاله سعی خواهد شد که از تصمیم‌گیری دومعیاره برای فاکتورهای میانگین زمان در جریان ساخت در سیستم[1] ($\overline{F}$) و میانگین زمانهای دیرکرد[2] ($\overline{T}$)، در حالتی که پارامترهای مساله نظیر مدت زمان انجام کار، زمان پایان مدت تحویل کار و... فازی در نظر گرفته شوند، استفاده شود.

پس از ارائه تئوری مجموعه‌های فازی توسط لطفی عسگرزاده[3] [11]، این تئوری در زمینه‌های مختلف برای مدل نمودن مسائل کاربردی به کار گرفته‌شد. در ادامه به بعضی از کاربردهای این نظریه در مسائل توالی عملیات تک‌ماشینه اشاره می‌شود؛ ای‌شی و تادا[4][5] الگوریتمی کارا برای تعیین توالیها و برنامه‌های کاری کارا در مساله توالی عملیات تک‌ماشینه ارائه نمودند. این دو نفر روابط پیش‌نیازی بین کارها را فازی فرض نمودند، توابع هدف دوگانه مساله عبارت بود از کمینه کردن تعداد

1 Flow time
2 Tardiness
3 L.A.Zadeh
4 Tada

کارهای دارای تاخیر و مینیمم سطح ارضای پیش‌نیازی‌های فازی، که عامل اول می‌بایست کمینه و عامل دوم بیشینه می‌شد. در تحقیق انجام گرفته پیچیدگی الگوریتم نیز مورد مطالعه قرار گرفت و زمینه‌های تحقیقات بعدی برای مساله توالی عملیات تک‌ماشینه با پیش‌نیازی‌های فازی ارائه گردید.

چانس[5] و کاسپرسکی[6][1] مساله توالی عملیات تک‌ماشینه را در حالتی که زمانهای پردازش و موعدهای تحویل، اعداد فازی باشند، بررسی نمودند. آنها معیار بیشینه تاخیر را برای ارزیابی توالی‌های مطرح شده به کار گرفتند. این دو نفر نشان دادند که الگوریتم لاولر[7] برای مساله در چنین حالتی قابل استفاده است و چهار حالت خاص مساله را، با استفاده از این الگوریتم حل نمودند.

سونگ[8] و والچ[9] [10] مساله توالی عملیات تک‌ماشینه را در حالت عدم قطعیت بررسی نمودند. این دو نفر از فاکتور ارزیابی تعداد کارهای دارای دیرکرد برای بررسی توالی‌ها استفاده نمودند. آنها مدلی کلی با استفاده از روش جبری برای مساله ارائه کرده، نشان دادند در این مدل کلی متغیرهای لم جکسون[10] معتبر هستند و با استفاده از الگوریتم هاجسون[11] و مور[12] با اندکی تغییرات می‌توان مساله طرح شده را حل نمود.

چانس و کاسپرسکی [2] توالی عملیات تک‌ماشینه را با فرض فازی بودن زمانهای تحویل و زمانهای پردازش بررسی نمودند. آنها این دو پارامتر را اعداد فازی از نوع L-R در نظر گرفتند. این دونفر از دو تابع هدف کمینه کردن بیشترین مقدار انتظاری دیرکرد فازی و کمینه‌کردن مقدار انتظاری بیشترین دیرکرد فازی استفاده کردند و نشان دادند که این دو مساله مساله‌هایی جداگانه هستند که مساله اول دارای پیچیدگی عملیاتی خطی و مساله دوم دارای پیچیدگی $O(n!)$ است.

چانس و کاسپرسکی [3] به بررسی بهینگی در مسائل توالی عملیات تک‌ماشینه با پارامترهای فازی پرداختند و روشی کلی برای محاسبه بهینگی هر توالی در هر حالت مساله توالی تک‌ماشینه ارائه دادند.

در زمینه تصمیم‌گیری چندمعیاره نیز چندین دهه است که محققین به تحقیق و پژوهش مشغولند در ادامه به آن‌دسته از تحقیقاتی که در حیطه تک‌ماشینه انجام شده‌است اشاره می‌شود:

اسمیت[13][4] در مساله توالی عملیات تک‌ماشینه، با فرض صفر بودن مقدار متوسط دیرکردها، میانگین زمان در جریان ساخت کارها در سیستم را کمینه نمود. الگوریتم ارائه شده توسط او هرچند فقط برای حالت خاصی، صادق بود، ولی توسط دیگران برای مسائل بسیاری به کار گرفته‌شد. خود او با استفاده از این الگوریتم روشی به‌منظور پیدا کردن راه‌حل‌های کارا برای مساله تک‌ماشینه با معیارهای میانگین زمان در جریان ساخت و بیشینه دیرکرد، ارائه نمود.

کلامروث[14] و ویجک[15] [5] مساله توالی عملیات تک‌ماشینه وابسته به زمان را در حالت چندمعیاره به صورت مساله کوله پشتی مدل نموده، از برنامه‌ریزی پویا، برای حل مساله، استفاده نمودند.

[5] Chanas
[6] Kasperski
[7] Lawler
[8] Sung
[9] Valch
[10] Jackson Lemma
[11] Hadgson
[12] Moore
[13] Smith
[14] Klamroth
[15] Viecek

کوک‌سالان[16] و کها[17] [6] برای مساله توالی عملیات تک‌ماشینه در حالتی که معیارهای ارزیابی توالی‌ها زمان در جریان ساخت و تعداد کارهای دارای دیرکرد باشد، الگوریتمی ابتکاری ارائه نمودند. این دو نفر سپس مساله فوق را با دومعیار زمان در جریان ساخت و بیشینه زودکرد بررسی نمودند و برای این مساله نیز الگوریتمی بر پایه الگوریتم ژنتیک ارائه دادند.

موشیف[18] [8] برای مساله توالی عملیات تک‌ماشینه با معیارهای زمان ساخت نهایی و میزان انحراف زمانهای آماده‌شدن کارها از زمانهای تحویل، مدلی ارائه داد. او نشان داد که اگر وزن معیار اول به میزان قابل توجهی بیشتر از معیار دوم باشد، مساله دارای پیچیدگی چندجمله‌ای است و در غیر این‌صورت، NP دشوار است، لذا برای مساله دوم الگوریتمی بر اساس برنامه‌ریزی پویا، پایه‌ریزی نمود.

در ادامه در بخش ۲ مدل مساله با استفاده از رویکرد برنامه‌ریزی صفر و یک، ارائه شده و توسعه مدل با اضافه کردن چند محدودیت مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۳ ابتدا نشان داده می‌شود مساله از نوع NP دشوار است، لذا الگوریتم ژنتیک چندمعیاره برای مساله توسعه می‌یابد(G). در این فصل همچنین پارامترهای الگوریتم تعیین شده، مقایسه جوابهای حاصل از G با جواب بهینه ارائه می‌شود. همانگونه که نشان داده خواهد شد G جواب خوبی برای مساله در زمان معقول ارائه می‌دهد.

## ۲- ارائه فرمولاسیون برنامه‌ریزی عدد صحیح برای مساله

در این بخش ابتدا مدل ریاضی مساله بدون توجه به فازی بودن پارامترها ارائه می‌شود. در ادامه با فرض فازی شدن پارامترها این مدل توسعه می‌یابد.

### ۲-۱-معرفی پارامترها و متغیرهای تصمیم

$p_i$ : زمان پردازش کار i ام

$d_i$: زمان تحویل کار i ام

$X_{ij}$: متغیر تصمیم مساله که نشانگر قرار گرفتن کار i ام در موقعیت j توالی است. $X_{ij}$ متغیر صفر و یک است.

$$X_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر کار i در موقیت jام توالی قرار گیرد} \\ 0 & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

$F_{\pi j}$: زمان در جریان ساخت کار j ام در توالی π

$T_{\pi j}$: دیرکرد کار jام در توالی π

$L_{\pi j}$: تاخیر کار jام در توالی π

### ۲-۲- فرمول‌بندی برنامه‌ریزی عدد صحیح ارائه شده

در ابتدا مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح را با دو معیار $\overline{T}$ و $\overline{F}$، ارائه می‌کنیم. مدل ارائه شده همانگونه که انتظار می‌رود، مدلی با دو تابع هدف است.

$$Min\ Z_1 = \sum_{j=1}^{n} F_{\pi j} \tag{۱}$$

$$Min\ Z_2 = \sum_{j=1}^{n} T_{\pi j} \tag{۲}$$

**S.T.**

[16] Koksalan
[17] Keha
[18] Mosheiov

$$F_{\pi j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}p_i X_{ik} \qquad \textit{for } j=1\ldots n \qquad (۳)$$

$$T_{\pi j}\geq L_{\pi j} \qquad \textit{for } j=1\ldots n \qquad (۴)$$

$$L_{\pi j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j}(p_i X_{ik})-d_i X_{ij}\right) \qquad \textit{for } j=1\ldots n \qquad (۵)$$

$$\sum_{i=1}^{n}X_{ij}=1 \qquad \textit{for } j=1\ldots n \qquad (۶)$$

$$\sum_{j=1}^{n}X_{ij}=1 \qquad \textit{for } i=1\ldots n \qquad (۷)$$

$$X_{ij}\in\{0,1\} \qquad \textit{for } i=1\ldots n,\ j=1\ldots n \qquad (۸)$$

$$F_{\pi j},T_{\pi j}\geq 0 \qquad \textit{for } j=1\ldots n \qquad (۹)$$

$$L_{\pi j}:\quad \textit{free variable} \qquad \textit{for } j=1\ldots n \qquad (۱۰)$$

تابع اول در رابطه (۱) مربوط به کمینه‌کردن مجموع زمان‌های در جریان ساخت کارها در سیستم است.

تابع دوم در رابطه (۲) مجموع زمان‌های دیرکرد را کمینه می‌کند.

محدودیت شماره (۳) رابطه زمان در جریان ساخت کار j ام را در توالی مفروض محاسبه می‌کند.

محدودیت (۴) و (۵) در مجموع زمان دیرکرد کار j ام را در توالی مفروض محاسبه می‌کند.

محدودیت شماره (۶) بیانگر این حقیقت است که بیش از یک کار نمی‌تواند در موقعیت j ام قرار گیرد.

محدودیت شماره (۷) نیز به این نکته اشاره دارد که هر کار فقط یک‌بار در توالی وارد شود.

محدودیت شماره (۸) محدودیت دودویی بودن متغیر $X_{ij}$ است.

محدودیت‌های (۹) و (۱۰) نیز محدودیت علامت هستند.

حال در صورتی که پارامترهای مساله فازی باشند می‌توان به صورت زیر مدل شماره ۱ را باتغییر روابط (۱) و (۲) به ترتیب به صورت بازنویسی نمود :

$$F_{\pi j}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{j}\widetilde{p}_i X_{ik} \qquad \textit{for } j=1\ldots n \qquad (۱۱)$$

$$L_{\pi j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{j}(\widetilde{p}_i X_{ik})-\widetilde{d}_i X_{ij}\right) \qquad \textit{for } j=1\ldots n \qquad (۱۲)$$

برای حل مساله بالا باید مدل را به مدل قطعی تبدیل نمود. به این منظور مدل بالا را در حالت فازی‌زدایی‌شده بازنویسی می‌شود.

### ۲-۳- ارائه حالت فازی‌زدایی شده

در حالت فازی‌زدایی همانگونه که در بخش ۲ اشاره شد. هر تابع هدف به سه تابع هدف مجزا تبدیل می‌شود. لذا مساله به صورت یک مساله چند تابع هدفه با ۶ تابع هدف تبدیل می‌شود. در ادامه حالت فازی‌زدایی شده، مدل مورد اشاره در زیر بخش ۳-۲ ارائه می‌شود.

$$Max\ Z_1^m - Z_1^l \qquad (۱۳)$$

$$Min\ Z_1^m \qquad (۱۴)$$

$$Min\ Z_1^r - Z_1^m \qquad (۱۴)$$

$Max\ Z_2^m - Z_2^l$ (۱۶)

$Min\ Z_2^m$ (۱۷)

$Min\ Z_2^r - Z_2^m$ (۱۸)

**S.T.**

$Z_1^l = \sum_{j=1}^{n} F_{\pi j}^l$ (۱۹)

$Z_1^m = \sum_{j=1}^{n} F_{\pi j}^m$ (۲۰)

$Z_1^r = \sum_{j=1}^{n} F_{\pi j}^r$ (۲۱)

$Z_2^l = \sum_{j=1}^{n} T_{\pi j}^l$ (۲۲)

$Z_2^m = \sum_{j=1}^{n} T_{\pi j}^m$ (۲۳)

$Z_2^r = \sum_{j=1}^{n} T_{\pi j}^r$ (۲۴)

$F_{\pi j}^l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} p_i^l X_{ik}$ *for j=1…n* (۲۵)

$F_{\pi j}^m = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} p_i^m X_{ik}$ *for j=1…n* (۲۶)

$F_{\pi j}^r = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{j} p_i^r X_{ik}$ *for j=1…n* (۲۷)

$T_{\pi j}^l \geq L_{\pi j}^l$ *for j=1…n* (۲۸)

$T_{\pi j}^m \geq L_{\pi j}^m$ *for j=1…n* (۲۹)

$T_{\pi j}^r \geq L_{\pi j}^r$ *for j=1…n* (۳۰)

$L_{\pi j}^l = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{j} \left( p_i^l X_{ik} \right) - d_i^r X_{ij} \right)$ *for j=1…n* (۳۱)

$L_{\pi j}^m = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{j} \left( p_i^m X_{ik} \right) - d_i^m X_{ij} \right)$ *for j=1…n* (۳۲)

$L_{\pi j}^r = \sum_{i=1}^{n} \left( \sum_{k=1}^{j} \left( p_i^r X_{ik} \right) - d_i^l X_{ij} \right)$ *for j=1…n* (۳۳)

$\sum_{i=1}^{n} X_{ij} = 1$ *for j=1…n* (۳۴)

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = 1$ *for i=1…n* (۳۵)

$X_{ij} \in \{0,1\}$ *for i=1…n , j=1…n* (۳۶)

$F_{\pi j}^l, F_{\pi j}^m, F_{\pi j}^r, L_{\pi j}^l, L_{\pi j}^m, L_{\pi j}^r \geq 0$ *for j=1…n* (۳۷)

$Z_1^l, Z_1^m, Z_1^r, Z_2^l, Z_2^m, Z_2^r \geq 0$ (۳۸)

$L_{\pi j}^l, L_{\pi j}^m, L_{\pi j}^r :$ *free variable* *for j=1…n* (۳۹)

### ۲-۴- اعمال چند محدودیت دیگر به مدل

در این قسمت چند محدودیت جدید به مدل اضافه می‌شود:

محدودیت پیشنیازی به صورت «کار a باید بعد از کار b انجام گیرد.»

$$\sum_{k=1}^{n}(kX_{ak} - kX_{bk}) > 0 \qquad (۴۰)$$

محدودیتی به شکل «کار a باید حداقل q نوبت قبل از کار b زمانبندی شود.»

$$\sum_{k=1}^{n}(kX_{ak} - kX_{bk}) > q \qquad (۴۱)$$

محدودیت نظیر «کارهای a و b و c نمی توانند به صورت همزمان در r نوبت اول باشند.»

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} kX_{ak} > ry_a \\
&\sum_{k=1}^{n} kX_{bk} > ry_b \\
&\sum_{k=1}^{n} kX_{ck} > ry_c \\
&y_a + y_b + y_c \geq 1 \\
&y_a, y_b, y_c \in \{0,1\}
\end{aligned} \qquad (۴۲)$$

## ۳- ارائه الگوریتم ژنتیک چندمعیاره برای مساله

در ابتدای این بخش ابتدا ثابت می‌شود مساله مطرح شده، مساله NP دشوار است. به این منظور ابتدا یک لم اثبات می‌گردد.

- **لم**

*مساله تک‌ماشینه، با معیار عملکرد $\overline{T}$، با پارامترهای فازی، مساله دشواری است، که ارائه الگوریتمی بهینه با پیچیدگی عملیاتی چندجمله‌ای میسر نیست.*

**اثبات:** مساله توالی عملیات تک‌ماشینه کلاسیک، با معیار عملکرد $\overline{T}$ را در نظر بگیرید و آن را $P_1$ بنامید. مساله را با پارامترهای فازی نیز $P_2$ نامگذاری کنید. مساله $P_1$ یک مساله NP است[4]. در اینجا فقط کافیست مساله $P_1$ را به مساله $P_2$ تبدیل کنیم و این امر به سادگی با قرار دادن مقادیر $d_j^l = d_j^m = d_j^r = d_j$ و $p_j^l = p_j^m = p_j^r = p_j$ حاصل می‌شود ▲

- **قضیه**

*یافتن جواب‌های کارا برای مساله توالی عملیات با دو معیار ارزیابی میانگین زمان‌های در جریان ساخت و میانگین دیرکردها با زمان‌های پردازش و تحویل فازی مساله NP دشوار است.*

**اثبات:** اثبات به صورت برهان خلف صورت می‌گیرد. فرض کنید پیچیدگی مساله از نوع چندجمله‌ای باشد. در این صورت یکی از جوابهای کارای ارائه‌شده برای مساله، جواب مساله تک معباره با معیار ارزیابی $\overline{T}$ خواهد بود. لذا مساله تک‌معیاره با معیار عملکرد $\overline{T}$ نیز مساله‌ای با پیچیدگی عملیاتی چندجمله‌ای خواهد بود که این متضاد با لم اثبات شده است. لذا فرض خلف باطل و حکم برقرار است.

با توجه به قضیه مورد اشاره ارائه الگوریتم بهینه برای مساله با زمان پردازش معقول برای مساله به راحتی میسر نمی‌باشد؛ لذا در این قسمت الگوریتم ابتکاری بر اساس الگوریتم ژنتیک چندمعیاره برای مساله ارائه می‌گردد.

الگوریتم ژنتیک، الگوریتمی فراابتکاری است که توسط جان هلند[۱۹] ارائه گردیده است. در این الگوریتم چند ژن که در مساله توالی عملیات با شماره کارها نشان داده می‌شوند، تشکیل یک کروموزوم می‌دهند. تعدادی از این کروموزوم‌ها جمعیت نامیده

[19] Holland

می‌شوند. اندازه جمعیت با M نشان داده می‌شود. در الگوریتم ژنتیک ارائه شده از چرخه رولت[20] به منظور انتخاب کروموزوم‌ها برای تکثیر استفاده می‌شود. چرخه رولت در واقع تلاشی برای شبیه‌سازی این واقعیت است که «در جامعه افراد قویتر و دارای تطابق بیشتر با محیط، امکان ادامه حیات و تولید مثل بیشتری دارند.» میزان تطبیق کروموزوم با محیط با استفاده از رابطه ۴۳ ارائه می‌شود.

$$C_j = \max_{i=1\ldots M}\{f_i\} - f_j \tag{۴۳}$$

استفاده از $C_j$ به جای $f_j$ برای میزان تطبیق باعث می‌شود که اولا ماهیت کمینه شدن توابع لحاظ شود و ثانیا به نوعی نرمال‌سازی بر روی داده‌ها صورت پذیرد. به منظور کپی‌کردن رشته‌ها از درصد تطبیق استفاده می‌شود. این درصد با استفاده از رابطه ۴۴ محاسبه می‌گردد:

$$P_j = \frac{C_j}{\sum_{i=1}^{M} C_i} \tag{۴۴}$$

عملیات تقاطعی[21] مورد استفاده نیز یک تقاطعی یک‌نقطه‌ای است. که در آن تکه اول رشته اول را انتخاب شده، بقیه کارها را به ترتیب رشته دوم چیده می‌شود و اولین فرزند تولید می‌شود. فرزند دوم نیز حاصل انتخاب تکه اول رشته دوم و ترتیب باقی کارها به ترتیب رشته اول است. به عنوان مثال شکل زیر نحوه عملکرد این رویه را بر روی دو ژن نشان می‌دهد

نقطه تقاطع
1-3-4-5-6-2-7 → 1-3-4-2-5-7-6
2-4-3-1-5-7-6 → 2-4-3-1-5-6-7
نقطه تقاطع

تنها درصدی از جامعه که با احتمال تقاطع[22]($P_C$) مشخص می‌شود، در عملیات تقاطعی شرکت می‌کنند و بقیه ([23]$P_R$) تنها در عمل تکثیر شرکت می‌کنند. در الگوریتم ژنتیک علاوه بر دو عمل تکثیر و تقاطع، عمل دیگری به اسم جهش مطرح است. نسبت استفاده از عمل جهش به وسیله پارامتری به نام احتمال جهش[24] ($P_M$) کنترل می‌شود. این عملگر تنها بر روی یک رشته عمل می‌کند. دو ژن به صورت تصادفی از یک رشته انتخاب می‌شوند **و** محل این دو ژن با هم تعویض می‌گردد.

**۳-۱- الگوریتم ژنتیک چند معیاره**

مساله بهینه‌سازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &Max\ f_1(x)\\ &Max\ f_2(x)\\ &S.T.\\ &x \in X \end{aligned} \tag{۵۰}$$

به منظور ارائه توضیحاتی در مورد الگوریتم ژنتیک چندمعیاره، ابتدا به قضیه‌ای اشاره می‌شود.

- **قضیه**

*اگر $f_w$ به صورت زیر تعریف شود:*

$$f_w(x) = wf_1(x) + (1-w)f_2(x) \tag{۵۱}$$

*به ازای هر* $0 \le w \le 1$، $f_w$ تمام جوابهای کارا را برای مساله ۵۰ ارائه می‌دهد.[13]

[20] Roulette Wheel
[21] Crossover Operation
[22] Crossover Probability
[23] Reproduction Probability
[24] Mutation Probability

با استفاده از قضیه فوق، الگوریتم ژنتیک چند معیاره برای مسائل بهینه‌سازی چند معیاره در سال ۱۹۹۶ توسط موراتا[۲۵] و دیگران[9] برای مسائل توالی عملیات تک‌ماشینه به کارگرفته‌شد. . در الگوریتم ژنتیک چندمعیاره به جای یک جمعیت، با چندین جمعیت روبرو هستیم که در جزایر مختلفی ساکنند و توابع هدف در هر جزیره به صورت $f^i = w_i f_1 + (1-w_i) f_2$ است که $w_i$ مقداری بین صفر و یک است. در داخل هر جزیره عملیات الگوریتم ژنتیک به صورت جداگانه صورت می‌گیرد، سپس عملیاتی موسوم به کوچ[۲۶] بین جزایر صورت گرفته، $w_i$ ها به‌هنگام شده و عملیات ژنتیک مجددا در داخل جزایر به صورت جداگانه انجام می‌شود. مراحل فوق تا ارضای شرایط پایان انجام می‌گیرد.

قبل از ارائه الگوریتم ژنتیک چندمعیاره برای مساله، لازم است عملگر کوچ تعریف شود؛ عمل کوچ، بین جزایر انجام می‌گیرد و ابتدا چند رشته از هر جزیره را به‌صورت تصادفی انتخاب نموده و آنها را به جزیره دیگری منتقل می‌کند. در ادامه پارامترهای الگوریتم معرفی می‌شوند.

$t$: تعداد دفعات تکرار الگوریتم

$T$: تعداد مورد نیاز تکرار الگوریتم برای ارضای شرط پایان

$T^i$: تعداد دفعات تکرار الگوریتم ژنتیک در داخل هر جزیره

$PA^t$: مجموعه جوابهای کارا در زمان t.

$\alpha_F, \beta_F, \gamma_F$ : این مقادیر به منظور فازی‌زدایی $\tilde{\tilde{F}}$ مورد استفاده قرار می‌گیرند و مقدار فازی‌زدایی شده $\tilde{\tilde{F}}$ را به صورت زیر ارائه می‌کنند:

$$\bar{F}_d = \frac{\alpha_F \bar{F}^l + \beta_F \bar{F}^m + \gamma_F \bar{F}^r}{\alpha_F + \beta_F + \gamma_F} \quad (۴۷)$$

$\alpha_T, \beta_T, \gamma_T$ : این مقادیر به منظور فازی‌زدایی $\tilde{\tilde{T}}$ مورد استفاده قرار می‌گیرند و مقدار فازی‌زدایی شده $\tilde{\tilde{T}}$ را به صورت زیر ارائه می‌کنند:

$$\bar{T}_d = \frac{\alpha_T \bar{T}^l + \beta_T \bar{T}^m + \gamma_T \bar{T}^r}{\alpha_T + \beta_T + \gamma_T} \quad (۴۸)$$

$M$: تعداد جزایر

$w_i^t$: وزن امتزاج دو معیار در جزیره i ام در تکرار t ام.

$x_i^t$ بهترین جواب جزیره i در زمان t است

$P_c^i$: احتمال تقاطع در جزیره i.

$P_{mo}^i$ : احتمال جهش در جزیره i

$p_j^i$ : درصد تطابق رشته j ام با جمعیت جزیره i.

$C_j^i$ تابع تطابق رشته j ام با جمعیت جزیره i. این مقدار برای هر جزیره با استفاده از رابطه ۵-۵۹ به‌دست می‌آید که در آن مقدار $f_j^i$ (تابع مطلوبیت جزیره i برای رشته j ام) برابر است با:

$$f_j^i = wi\left\langle \alpha_{\bar{F}} \bar{F}^l + \beta_{\bar{F}} \bar{F}^m + \gamma_{\bar{F}} \bar{F}^r \right\rangle + (1-w_i)\left\langle \alpha_{\bar{T}} \bar{T}^l + \beta_{\bar{T}} \bar{T}^m + \gamma_{\bar{T}} \bar{T}^r \right\rangle \quad (۴۹)$$

$P_{mi}$: احتمال کوچ

حال به تشریح الگوریتم پرداخته می‌شود:

[25] Murata
[26] Migration

**گام صفر شروع:** مشخصه‌های مساله را برای شروع تعیین کنید.

۰-۰ $t=0$ و مجموعه جوابهای کارا $PA^o$ را تهی فرض نمایید.

۰-۱ وزنهای فازی زدایی را برای هر معیار ارائه کنید. (مقادیر $\alpha_T,\beta_T,\gamma_T,\alpha_F,\beta_F,\gamma_F$ را ارائه کنید.)

۰-۲ T و $T^i$ را تعیین نمایید

۰-۳ تعداد جزایر را تعیین کنید (M)

۰-۴ وزنهای توابع را در هر جزیره برای شروع مشخص نمایید.( $w_i^0$ ها را برای جزایر به ترتیب برابر 0، $1/_{M-1}$، $2/_{M-1}$ و ...و ۱ در نظر بگیرید)

۰-۵ متغیرهای الگوریتم ژنتیک را برای هر جزیره (جامعه اولیه، احتمال جهش و...) تعیین نمایید.

۰-۶ مقادیر $\overline{F}$ و $\overline{T}$ و مقدار تابع *مطلوبیت را* برای جامعه اولیه هر جزیره، تعیین نمایید.

**گام اول : ایجاد نسل جدید.** گامهای ۱-۱ تا ۱-۳ تا ارضای شرایط پایان الگوریتم ژنتیک (داخل جزیره‌ها) جداگانه و مستقل از سایر جزایر ادامه می‌یابد.

۱-۰ $t=t+1$

۱-۱ قوانین تکثیر، *تقاطع و جهش* را اجرا کنید.

۱-۲ مقادیر $\overline{F}$ و $\overline{T}$ را برای هر عضو جامعه جدید تعیین نمایید و مقدار تطابق و درصد تطابق هر عضو جدید را بیابید

۱-۳ مقدار $x_i^t$ را تعیین نمایید.

**گام دوم به‌هنگام کردن مجموعه جوابهای کارا:** جوابهای کارا را از مجموعه $x_i^t$ و $PA^{t-1}$ انتخاب کرده، در $PA^t$ ذخیره نمایید

**گام سوم بررسی شرایط پایان:** اگر $t=T$، $PA^t$ را به عنوان مجموعه جوابهای کارا ارائه نمایید و الگوریتم را به پایان ببرید. در غیر این صورت به گام ۱ برگردید.

**گام چهارم کوچ** : تعدادی از کارهای جزیره i را انتخاب نموده، به جزیره دیگری منتقل نمایید

**گام پنجم به تعیین $w_i^{t+1}$ ها :** مقادیر $w_i$ را به هنگام کنید. به این منظور از رابطه $w_i^{t+1}=\frac{w_{i+1}^t d_{(i+1,i)}+w_{i-1}^t d_{(i,i-1)}}{d_{(i,i-1)}+d_{(i,i+1)}}$ استفاده نمایید.در این رابطه $d_{(i,j)}$ تفاوت ارزش تابع تطابق دو جزیره i و j است. i+1 و i-1 نیز به ترتیب جزایر بعد و قبل از جزیره i هستند. در صورتی که به ازای یک i، $d_{(i,i-1)}$ $d_{(i+1,i)}=0$ باشد، مقادیر $w_i^t$ با تعویض تصادفی به هنگام می‌شوند.

در ادامه پارامترهای G تعیین شده، مقایسه الگوریتم G با الگوریتم بهینه ارائه می‌شود. به منظور تعیین پارامترهای G و مقایسه الگوریتم با جواب بهینه از اعداد تصادفی برای زمانهای پردازش استفاده شده‌است که قبل از پرداختن به مقایسه الگوریتم‌ها، توضیحاتی در مورد تولید این اعداد مورد اشاره قرار می‌گیرد.

### ۳-۲- *نحوه تولید پارامترهای مساله*

با توجه به اینکه زمانهای پردازش و تحویل در این مقایسه اعداد تصادفی فرض شده‌اند، قبل از شروع مقایسه توضیح مختصری در مورد تولید این اعداد تصادفی ضروری به نظر می‌آید. در ابتدا آزمایشی برای تعیین بازه تصادفی این دو سری اعداد تصادفی (اعداد مربوط به زمان پردازش و زمان تحویل) صورت می‌گیرد. به این ترتیب که زمانهای پردازش به صورت اعداد تصادفی در بازه [0,10] انتخاب شده و زمانهای تحویل به صورت اعداد تصادفی در بازه [0,10k] تولید می‌شوند و

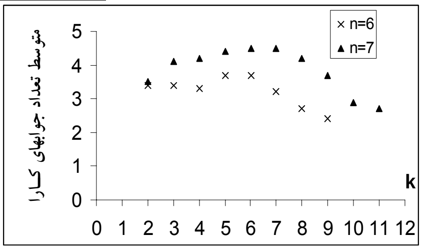
عدد k به صورت تجربی تعیین می‌شود. تعداد جوابهای کارای تولید شده، معیار مقایسه قرار گرفت. برای n=۶ و n=۷ جداول ۲و ۳ و نیز شکل ۳ به عنوان نتیجه این بررسی ارائه می‌گردد. (نتایج حاصل ۱۰ با آزمایش است)

*جدول ۱- متوسط تعداد جوابهای کارا برای ۶ کار*

| k | تعداد جوابهای کارا |
|---|---|
| 2 | 3.4 |
| 3 | 3.4 |
| 4 | 3.3 |
| 5 | 3.7 |
| 6 | 3.7 |
| 7 | 3.2 |
| 8 | 2.7 |
| 9 | 2.4 |

*جدول۲- متوسط تعداد جوابهای کارا برای ۷ کار*

| k | تعداد جوابهای کارا |
|---|---|
| 2 | 3.5 |
| 3 | 4.1 |
| 4 | 4.2 |
| 5 | 4.4 |
| 6 | 4.5 |
| 7 | 4.5 |
| 8 | 4.2 |
| 9 | 3.7 |
| 10 | 2.9 |
| 11 | 2.7 |




*شکل۱- تعداد متوسط جوابهای کارار برای مقادیر مختلف k و دو مقدار n=6,7*

با توجه به داده‌های مورد اشاره در جداول ۲و ۳ و نیز شکل ۱به نظر می‌رسد مناسب‌ترین مقدار برای k همان مقدار n یا تعداد کارها باشد. در تولید اعداد تصادفی در ادامه از این قاعده استفاده خواهد شد.

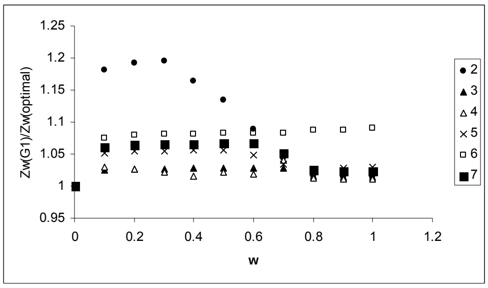
### ۳-۳- تعیین پارامترهای G

از آنجاییکه غالبا با چندین جواب کارا برای مساله مواجهیم. به منظور مقایسه الگوریتم‌ها و تعیین کارایی آنها $Z_w$ را تعریف می‌شود:

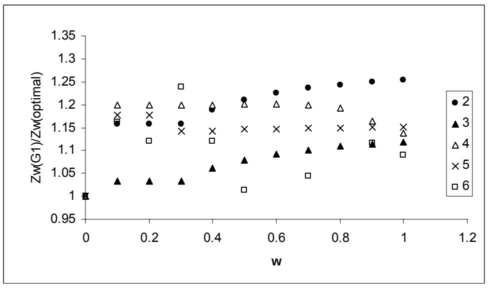
$$Z_w(Algorithm) = \underset{\substack{i \in Eficient\ Frontier \\ that\ identified\ with \\ Algrithm}}{Min} \left\langle w\bar{F}_i + (1-w)\bar{T}_i \right\rangle \qquad (۵۰)$$

تعریف $Z_w$ به صورت رابطه ۵۰ در واقع با عنایت به این نکته صورت گرفته‌است که معمولا D.M سعی در کمینه کردن توابعی به صورت $w\bar{F}_i + (1-w)\bar{T}_i$ دارد.

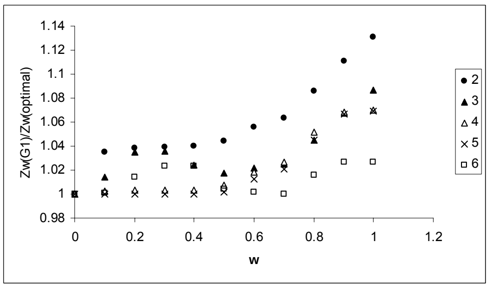
حال به تعیین پارامترهای G پرداخته می‌شود. پارامترهای مورد بحث عبارتند از احتمال جهش، احتمال عملیات تقاطعی، احتمال کوچ و تعداد جزایر. به این منظور مقدار $\dfrac{\bar{Z}_w(G)}{\bar{Z}_w(Optimum)}$ برای مقادیر مختلف w محاسبه می‌شود. در این رابطه $\bar{Z}_w(Algorithm)$ مقدار فازی‌زدایی شده $Z_w(Algorithm)$ است. نتایج مربوطه در شکلهای ۲ تا ۷ ارائه شده‌است.



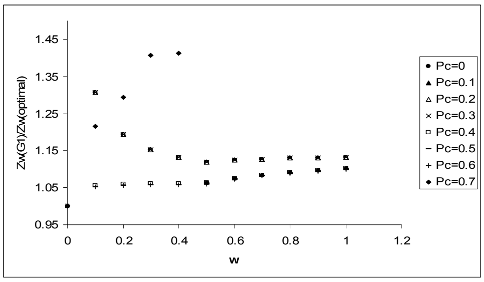

شکل ۲- (الگوریتم بهینه) $Z_w(G) / Z_w$ و بر اساس تعداد جزایز برای ۷ کار



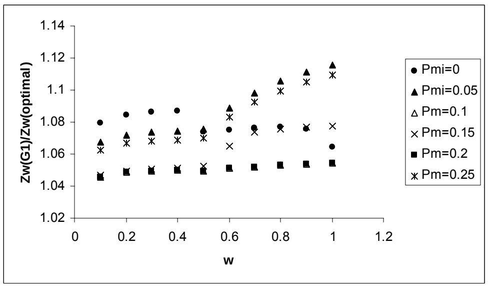

شکل ۳- (الگوریتم بهینه) $Z_w(G) / Z_w$ و بر اساس تعداد جزایز برای ۸ کار



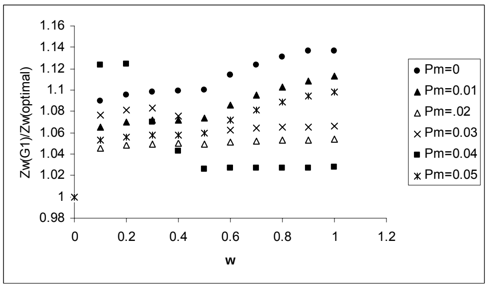

شکل ۴- (الگوریتم بهینه) $Z_w(G) / Z_w$ و بر اساس تعداد جزایز برای ۹ کار




شکل۵- (الگوریتم بهینه) $Z_w(G) / Z_w$ و بر اساس احتمال عملیات تقاطعی برای ۹ کار




شکل۶- (الگوریتم بهینه) $Z_w(G) / Z_w$ و بر اساس احتمال کوچ برای ۹ کار




شکل۷- (الگوریتم بهینه) $Z_w(G) / Z_w$ و بر اساس احتمال جهش برای ۹ کار

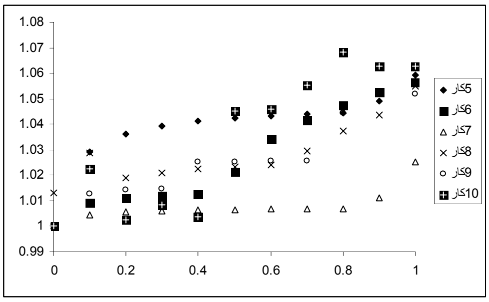
از شکل‌های ۴ تا ۹ مقادیر زیر برای پارامترها حاصل می‌شود:

- تعداد جزایر: نصف تعداد کارها
- احتمال عملیات تقاطعی: ۰/۶
- احتمال جهش: ۰/۰۲
- احتمال کوچ: ۰/۲

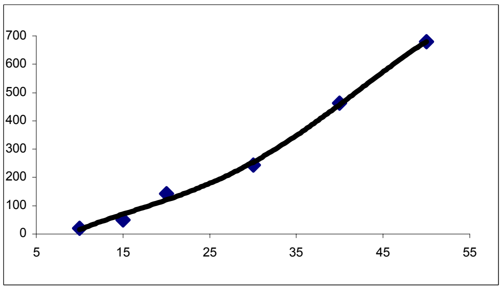
البته لازم به ذکر است که در این قسمت پارامترهای مختلف الگوریتم مستقل از هم فرض شده‌اند. در بخش بعد نتیجه مقایسه الگوریتم G و الگوریتم بهینه ارائه می‌شود.

### ۳-۴- مقایسه G و الگوریتم بهینه

در شکل ۸ مقایسه صورت گرفته بین جوابهای حاصل از الگوریتم G و الگوریتم بهینه ارائه شده است. جدول ۳ نیز زمانهای پردازش دو الگوریتم را شامل می‌شود؛ همانگونه که مشاهده می‌شود الگوریتم G در زمان معقول جواب نسبتا خوبی برای مساله ارائه می‌نماید. شکل ۹ نیز زمان پردازش الگوریتم G را برای اندازه‌های بزرگتر مساله ارائه می‌نماید.




شکل ۸- مقایسه $Zw(G)$ و (الگوریتم بهینه) $Zw$ برای اندازه‌های مختلف مساله




شکل ۹- زمان پردازش الگوریتم G برای اندازه‌های بزرگتر (۱۵ تا ۵۰ کار)

جدول ۳- مقایسه زمانی دو الگوریتم جایگشتی و G

| تعدادکارها | زمان پردازش الگوریتمG | زمان پردازش الگوریتم جایگشتی معمولی |
|---|---|---|
| ۵ | ۰ | ۰ |
| ۶ | ۰ | ۰ |
| ۷ | ۲/۲ ثانیه | ۱۶,۱ ثانیه |
| ۸ | ۳/۵ ثانیه | ۹ دقیقه و ۳۸ ثانیه |
| ۹ | ۸/۶ ثانیه | ۴ ساعت و ۱۲ دقیقه |
| ۱۰ | ۲۰/۴ ثانیه | حدود ۳۰ ساعت |
| ۱۵ | ۵۵ | غیرقابل استفاده |
| ۲۰ | ۱۵۸ | غیرقابل استفاده |
| ۳۰ | ۳۴۵ | غیرقابل استفاده |
| ۴۰ | ۷۲۸ | غیرقابل استفاده |
| ۵۰ | ۱۱۰۰ | غیرقابل استفاده |

## ۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله به بررسی مساله توالی عملیات تک‌ماشینه با معیارهای میانگین زمانهای در جریان ساخت و میانگین دیرکردها در حالتی که زمانهای پردازش و تحویل اعداد فازی مثلثی بودند، پرداخته‌شد. مساله به صورت برنامه‌ریزی صفر و یک مدل گردید و نشان داده شد که مدل ارائه شده قابلیت تعمیم برای حالت دیگر مساله را داراست. سپس نشان داده شد که مساله از دسته مسائل NP دشوار است لذا برای حل آن الگوریتمی ابتکاری بر پایه الگوریتم ژنتیک چند معیاره (G) توسعه یافت. الگوریتم ارائه شده با جواب بهینه حاصل از الگوریتم جایگشتی مقایسه شده، نشان داده شد که G جوابهای نزدیک به جواب بهینه ارائه می‌کند و زمان ژردازش بسیار کمتری نسبت به الگوریتم جایگشتی دارد.

## ۵- مراجع

[1] Chanas S., Kasperski A., "Minimizing maximum lateness in a single machine scheduling problem with fuzzy processing times and fuzzy due dates", Engineering Applications of Artificial Intelligence, Vol. 14, 377–386, 2001

[2] Chanas S., Kasperski A.," On two single machine scheduling problems with fuzzy processing times and fuzzy due dates", European Journal of Operational Research, Vol. 147, 281–296, 2003

[3] Chanas S., Kasperski A.," Possible and necessary optimality of solutions in the single machine scheduling problem with fuzzy parameters", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 142, 359–371, 2004

[4] French S., Phil M.A., "Sequencing and scheduling: An Introduction to the Mathematics of the Job-shop", John Wiley & Sons, 1986

[5] Ishii H., Tada, M. and Masuda, T. "Two scheduling problems with fuzzy due-dates", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 6(3), 339-347, 1992

[6] Klamroth K., Viecek M., "A time dependent multiple criteria Single machine scheduling", European Journal of Operations Research. Vol. 135, 17-26, 2002

[7] Koksalan M., Keha A. B., "Using genetic algorithms for single-machine bicriteria scheduling problems", European Journal of Operational Research, Vol. 145 , 543–556, 2003

[8] Mosheiov G., "Simultaneous minimization of total completion time and total deviation of job completion times", European Journal of Operational Research, Vol. 157, 296–306, 2004

[9] Murata T., Ishibuchi H., Moga, "Multi-objective genetic algorithms", Proceedings of the 2nd IEEE International Conference on Evolutionary Computing, 289–294, 1995

[10] Sung S. C., Vlach M., "Single machine scheduling to minimize the number of late jobs under uncertainty", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 139, 421–430, 2003

[11] Zadeh L.A., "Fuzzy sets as a basis for theory of possibility", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 1, 3–29, 1965

[12] Zeleny L., "Linear Multi Objective Programming", Springer-Verlag, New York, 1988

[13] Zimmermann, H.J, "Fuzzy Sets theory and its application", Kluwer Academic Publishers, 1996