



## هدایت و کنترل یک ربات زیرسطحی برای پرهیز از برخورد با موانع متحرک

حسن صیادی، استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

عبدالرضا باباخانی، دانشجوی کارشناسی ارشد مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی شریف

### چکیده

در این مقاله ابتدا یک نوع ربات زیرسطحی با نام NEROV ساخته شده در دانشگاه Trondheim نروژ انتخاب و معادلات دینامیکی آن نوشته شده و با استفاده از روش بهینه‌سازی برنامه‌ریزی دینامیک، برای آن یک مسیر بهینه‌ی انرژی طراحی می‌شود. در محیطی که ربات حرکت می‌کند، موانع متحرک وجود دارند. مشاهده می‌شود که مسیر طراحی شده یک مسیر هموار بوده و انرژی مصرفی آن کمینه می‌شود. پس از طراحی مسیر، برای ربات با استفاده از روش اسلاتین و لی، سیستم کنترل خودکار جهت اجرای طی مسیر توسط ربات طراحی می‌شود. در این مقاله، از اثر غیر مستقیم حرکت مانع بر دینامیک ربات صرف‌نظر شده و فرض شده است که معادلات دینامیک حرکت ربات در محیط تغییری نمی‌کنند.

**کلمات کلیدی:** طراحی مسیر، کنترل، موانع متحرک، رباتهای زیرسطحی، برنامه‌ریزی دینامیک، تابع همیلتونی

### ۱-مقدمه

طراحی مسیر رباتها در محیطهای دینامیک، یک کار مشکل می‌باشد. حرکت مانع در محیط باعث پیچیدگی مسئله خواهد شد. امروزه، محیطهایی که در آن موانع حرکت می‌کنند، تئوری‌های مربوطه حتی در زمانهایی که



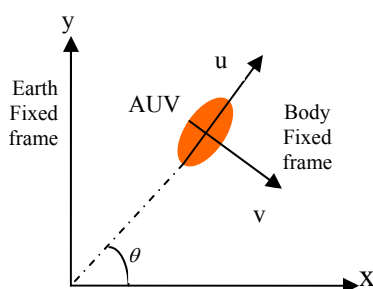
موانع در محیط با سرعت ثابت حرکت می کنند نیز، پیچیده می باشد. جدای از روشهای عمومی طراحی مسیر همچون خطوط جریان [1]، میدان پتانسیل، تجزیه ی سلولی و... [2] از جمله کارهایی که در این زمینه انجام گرفته است، می توان به تئوری ریف و شریر [3] اشاره داشت که در محیط، موانع با سرعت ثابت حرکت می کنند. همچنین روش فوجیمورا که در این روش سعی شده است ربات مسیره های مینیمم زمانی را در چنین محیطهایی طی کند [4] و یا روشهای دیگر. در این پژوهش، یک نوع از رباتهایی که معادلات حرکت آن پیچیده می باشد (رباتهای زیرسطحی) انتخاب و یک مدل نمونه معرفی می گردد. در این مقاله هدف این است که ربات در محیطی که موانع حرکت می کنند، طراحی مسیر شده و در چارچوب مسائل بهینه سازی، تابع هدف را کمینه کند. رباتهای زیرسطحی با محدودیت منبع انرژی مواجه اند و غالباً از باتریهای قابل شارژ استفاده می کنند و یکی از گلوگاههای طراحی و کاربرد اینگونه از رباتها، کاهش میزان مصرف انرژی است. در نتیجه در اینجا تابع هدف، انرژی مصرفی ربات در مدت زمان انجام مأموریت است. روش بهینه سازی انتخابی، برنامه ریزی دینامیک بوده و روش حل عددی معادلات بدست آمده، نیوتون-رافسون است. در نهایت، مسیر طراحی شده مسیری است که انرژی مصرفی آن کمینه بوده و با مانع متحرک برخوردی ندارد. پس از طراحی مسیر، یک سیستم کنترل خودکار نیز برای تعقیب مسیر ربات انتخاب و طراحی می شود. برای این نوع ربات نمونه، سیستم کنترلی انتخابی به روش اسلاتین و لی طراحی شده است. در این مسأله، از اثر غیر مستقیم حرکت مانع بر دینامیک ربات صرف نظر شده و معادلات دینامیک ربات نمونه نیز در طول طراحی و طی مسیر ثابت خواهد بود. در حقیقت هر دو مسئله طراحی مسیر (Path Planning) و تعقیب مسیر (Trajectory Tracking) در این مقاله مدنظر قرار گرفته است.

## ۲- معادلات دینامیکی سیستم

برای رباتهای زیرسطحی می توان دو نوع مختصات حرکتی تعریف کرد که یکی مختصات محلی یا مختصات متصل به جسم ۱ و دیگری مختصات کلی یا مختصات متصل به زمین ۲ می باشد. در شکل (۱) این مختصات نشان داده شده است. مختصات نشان داده شده در شکل محدود به صفحه می باشد.

<sup>1</sup>.Body fixed frame

<sup>2</sup>.Earth fixed frame



شکل (۱) - نمای مختصات محلی و کلی در صفحه

معادلات حرکتی رباتهای زیرسطحی در مختصات محلی در حالت ماتریسی و در صفحه بصورت زیر است [5]:

$$M\dot{\bar{v}} + C(\bar{v})\bar{v} + D(\bar{v})\bar{v} = \bar{\tau} \quad (1)$$

که در آن:  $\bar{\tau} = [X, Y, Z]$  بردار نیروهای خارجی که بترتیب نیروی جلوروی، نیرو در جهت عرضی و گشتاور زاویه‌ای می‌باشد و  $\bar{v} = [u, v, r]$  بردار سرعت در درجات آزادی مربوطه می‌باشند.  $u$  و  $v$  در شکل (۱) نشان داده شده‌اند و نیز  $r = \dot{\theta}$  است.  $M$  ماتریس قطری جرم ربات بوده که برای رباتهای زیرسطحی متشکل از جرم و ممان اینرسی خالص و نیز جرم و ممان اینرسی افزوده است. مسلماً برای این نوع از رباتها، مولفه‌های جرم ماتریس  $M$  در جهات مختلف متفاوت است، چون جرمهای افزوده متفاوتند [5]. این تفاوت ناشی از فرم بدنه‌ی ربات زیرسطحی در زیر آب است که  $C(\bar{v})$  ماتریس تاثیر درجات آزادی بر روی هم بوده و  $D(\bar{v})$  نیز ماتریس تأثیر هر درجه آزادی بر روی خود است. می‌توان معادلات دینامیک سیستم را در صفحه از مختصات محلی به مختصات کلی انتقال داد. ماتریس انتقال آن بفرم زیر است که به آن ژاکوبین می‌گویند [6]:

$$J(\bar{\eta}) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2)$$

در اینصورت معادلات دینامیک سیستم در مختصات متصل به زمین بصورت رابطه (۳) خواهد بود:

$$M_{\eta}(\bar{\eta})\ddot{\bar{\eta}} + C_{\eta}(\bar{v}, \bar{\eta})\dot{\bar{\eta}} + D_{\eta}(\bar{v}, \bar{\eta})\dot{\bar{\eta}} = J^{-T}(\bar{\eta})\bar{\tau} \quad (3)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} M_{\eta}(\bar{\eta}) &= J^{-T}(\bar{\eta})MJ^{-1}(\bar{\eta}) \\ C_{\eta}(\bar{v}, \bar{\eta}) &= J^{-T}(\bar{\eta})[C(\bar{v}) - MJ^{-1}(\bar{\eta})J(\bar{\eta})]J^{-1}(\bar{\eta}) \\ D_{\eta}(\bar{v}, \bar{\eta}) &= J^{-T}(\bar{\eta})D(\bar{v})J^{-1}(\bar{\eta}) \end{aligned}$$

(۴)

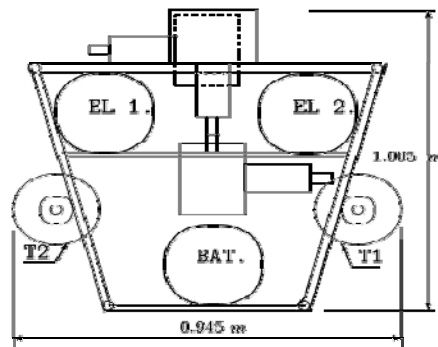
ارتباط بین درجات آزادی در دو مختصات تعریف شده مطابق شکل (۱) به صورت زیر است:

$$\dot{\bar{\eta}} = J(\bar{\eta})\bar{v}$$

که در آن:

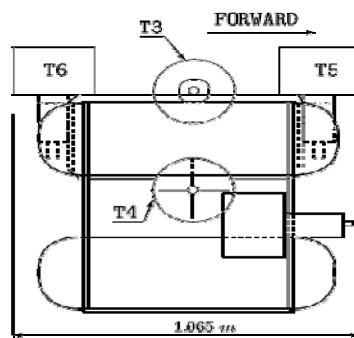
$$\bar{\eta} = [x \ y \ \theta]$$

لازم به ذکر است که معادلات دینامیک سیستم در مختصات متصل به زمین به مراتب پیچیده تر از معادلات آن در مختصات متصل به جسم است. در این تحقیق، یک ربات زیرسطحی با عنوان NEROV از دانشگاه نروژ انتخاب می شود [7]. این ربات از نظر آزادی دینامیکی، یک ربات هولونومیک می باشد. متحرکهای هولونومیک به متحرکهایی گفته می شود که می توانند هر مسیری را در مختصات متصل به زمین طی کنند. نمای ظاهری این ربات از جلو و کنار بترتیب در شکل‌های (۲) و (۳) نشان داده شده است.



شکل (۲) - نمای ربات NEROV از جلو

این ربات دارای ۶ عدد رانش دهنده است که در شکل با علامت T نشان داده شده است. همچنین این ربات دارای یک باتری قابل شارژ است که در شکل (۲) با BAT نشان داده شده است. همانگونه که گفته شد، این ربات یک ربات هولونومیک بوده و در فضا هر حرکتی را می تواند انجام دهد. در این مسئله، فرض شده است که ربات فقط در صفحه حرکت می کند.



شکل (۳) - نمای ربات NEROV از کنار



برای این ربات ماتریسهای  $M$ ،  $C(\bar{v})$  و  $D(\bar{v})$  که در رابطه‌ی (۱) مشخص شده‌اند، بترتیب برابرند با:

$$M = \begin{bmatrix} 205 & 0 & 0 \\ 0 & 265 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix} \quad (۵)$$

$$C(\bar{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -185r & -80v \\ 185r & 0 & 30u \\ 80v & -30u & 0 \end{bmatrix} \quad (۶)$$

$$D(\bar{v}) = \text{diag} \{70 + 100|u|, 100 + 200|v|, 50 + 100|r|\} \quad (۷)$$

با استفاده از این مقادیر و رابطه‌ی (۱) و نیز تعریف بردار  $\bar{v}$ ، معادلات دینامیکی ربات نمونه در صفحه و در

مختصات محلی بفرم روابط (۸) تبدیل می‌شود که از حالت ماتریسی خارج شده است:

$$\begin{aligned} 205\dot{u} - 265vr + (70 + 100|u|)u &= X \\ 265\dot{v} + 210ur + (100 + 200|v|)v &= Y \\ 80\dot{r} + 50uv + (50 + 100|r|)r &= Z \end{aligned} \quad (۸)$$

این معادلات در مختصات متصل به جسم نوشته شده‌اند. جهت طراحی مسیر، چون مختصات کلی مبداء می‌باشد،

این معادلات با استفاده از ماتریس انتقال (۲) به مختصات کلی منتقل می‌شوند. یعنی آنچه که بدست می‌آید، همانند

رابطه‌ی (۳) است. رابطه‌ی (۹)، معادلات حاصل از این انتقال در مختصات کلی را نشان می‌دهد.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \psi - v \sin \psi \\ \dot{u} &= \frac{1}{205} (265(rv) - (70 + 100|u|)u + X) \\ \dot{y} &= u \sin \psi + v \cos \psi \\ \dot{v} &= \frac{1}{265} (215ru + (100 + 200|v|)v + Y) \\ \dot{\theta} &= r \\ \dot{r} &= \frac{1}{80} (50uv + (50 + 100|r|)r + M) \end{aligned} \quad (۹)$$

توجه شود که این معادلات علاوه بر انتقال به مختصات کلی، به فرم استاندارد شبیه به رابطه‌ی (۱۴) که در پی

می‌آید تبدیل شده‌اند، یعنی ۳ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه دوم تبدیل به ۶ معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول شده است

و نیز سمت چپ معادلات، همگی مشتقات مرتبه اول هستند.

علاوه بر معادلات دینامیکی سیستم، قید وجود موانع نیز در نظر گرفته شده است. چنانچه در محیط حرکت ربات

مانعی با مشخصات هندسی  $(x_{obs}, y_{obs})$  موجود باشد، قید ناشی از وجود آن را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:



$$(x - x_{obs})^2 + (y - y_{obs})^2 \geq a^2 \quad (10)$$

که در آن  $(x, y)$  موقعیت ربات در زمانهای مختلف و  $a$  کمترین فاصله‌ی در نظر گرفته شده بین ربات و مانع است. حال اگر موانع متحرک باشند، این قید بفرم زیر تبدیل می‌شود:

$$(x - x(t)_{obs})^2 + (y - y(t)_{obs})^2 \geq a^2 \quad (11)$$

بهینه‌سازی با قیدهای نابرابری، یک کار نسبتاً سخت و زمان‌بر است. در نتیجه قید نابرابری (۱۱) تبدیل به قید برابری بصورت زیر می‌شود:

$$\xi^2 = (x - x(t)_{obs})^2 + (y - y(t)_{obs})^2 - a^2 \quad (12)$$

در این حالت مشاهده می‌شود که یک متغیر  $(\xi)$  به متغیرهای سیستم اضافه شده است.

### ۳- الگوریتم بهینه‌سازی:

طراحی مسیر برای ربات زیرسطحی در یک مانور حرکت صفحه‌ای به گونه‌ای که ربات از نقطه‌ی آغاز حرکت کرده و سپس با پرهیز از برخورد با موانع متحرک در محیط به سمت نقطه هدف میل کند، صورت می‌گیرد. تابع هدف بر اساس انرژی مصرفی توسط ربات معرفی می‌گردد و در ادامه تحقیق، حالاتی که چندین مانع متحرک در محیط باشد نیز مورد تحلیل واقع شده است. چون هدف، بهینه‌سازی در طراحی مسیر است، لازم است از یک روش بهینه‌سازی جهت حل طراحی مسیر بهینه استفاده شود. روش بهینه‌سازی انتخاب شده، برنامه‌ریزی دینامیک می‌باشد. این الگوریتم بدین شکل است که یک تابع توصیفی از سیستم و قیدهای آن با نام تابع همیلتونی<sup>۳</sup> تشکیل می‌شود. فرم این تابع بصورت زیر است:

$$H = \bar{\lambda}^T \bar{F}(\bar{x}, \bar{U}) + OF \quad (13)$$

که در آن  $\bar{F}(\bar{x}, \bar{U})$  تابعی است که سمت راست معادلات مشخصه‌ی سیستم است:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{F}(\bar{x}, \bar{U}) \quad (14)$$

<sup>3</sup> Hamiltonian Function



معادلات مشخصه‌ی سیستم در این مقاله، معادلات دینامیکی سیستم (۹) و نیز معادلات حاصل از قیدهای مسئله همچون قید وجود موانع و نیز محدودیت اکچواتورها که در پی می‌آید، می‌باشد [8]. البته لازم است که معادلات مشخصه، تبدیل به فرم استاندارد همانند رابطه‌ی (۱۴) شوند.  $OF$  نیز تابعی است که باید در بهینه‌سازی، مینیمم یا ماکزیمم شود. در این مسئله چون هدف، کمینه کردن انرژی است، داریم:

$$OF = \int_0^T (X^2 + Y^2 + Z^2) dt \quad (15)$$

$T$  مدت زمان انجام مأموریت توسط ربات است. رابطه‌ی (۱۵) اگرچه که میزان انرژی مصرفی را نشان نمی‌دهد، ولی معیاری از انرژی مصرفی ربات است. در الگوریتم بهینه‌سازی برنامه‌ریزی دینامیک، هدف کلی، بهینه کردن  $OF$  بوده و برای رسیدن به این هدف، لازم است که تابع همیلتونی (۱۳) بهینه شود [8]. جهت بهینه کردن تابع همیلتونی، باید مقادیر  $\bar{\lambda}$  و  $\bar{x}$  و نیز  $\bar{U}$  به شکلی مناسب انتخاب شود. مقادیر  $\bar{\lambda}$  و  $\bar{x}$  را می‌توان با استفاده از روابط (۱۶) بدست آورد:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \\ \dot{x}_i &= \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (16)$$

$n$  تعداد متغیرهای سیستم است.

همچنین همانگونه که در پی خواهد آمد، بردار ورودیهای بهینه  $\bar{U}$  را نیز می‌توان با توجه به نوع مسئله بدست آورد.

#### ۴- حل مسئله‌ی طراحی مسیر برای ربات زیرسطحی

با استفاده از روش بهینه‌سازی ذکر شده، برای ربات نمونه، مسئله‌ی طراحی مسیر حل می‌شود. جدای از معادلات دینامیک سیستم، لازم است قید نابرابری مانع نیز لحاظ شود. حل مسئله‌ی بهینه‌سازی با استفاده از قیدهای نابرابری، همانگونه که ذکر شد، کاری بسیار مشکل و وقت‌گیر است. بنابراین قید تبدیل شده در رابطه‌ی (۱۲) به‌عنوان معیار قید وجود مانع در نظر گرفته می‌شود. حال باید از این قید یک معادله‌ی دیفرانسیل استخراج کرد تا به فرم استاندارد درآید. با مشتق‌گیری از طرفین رابطه‌ی (۱۲)، رابطه‌ی (۱۷) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \ddot{\xi} &= (x - x(t)_{obs})(\dot{x} - \dot{x}(t)_{obs}) + \\ &(y - y(t)_{obs})(\dot{y} - \dot{y}(t)_{obs}) \end{aligned} \quad (17)$$



مشتق‌گیری به این دلیل صورت می‌گیرد که قیدهای استاندارد در برنامه‌ریزی دینامیک، بصورت معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی اول می‌باشند. ولی استفاده از این قید بدون حضور ورودیها در آن، به بهینه‌سازی ناشی از این قید در الگوریتم بهینه‌سازی مربوطه، ترتیب اثر نخواهد داد [8]. با یک‌بار دیگر مشتق‌گیری از رابطه‌ی بالا و جایگزینی مشتقات اول و دوم متغیرهای سیستم از رابطه‌ی (۹)، این قید اصلاح می‌شود. در نهایت، معادله‌ی دیفرانسیل مربوطه به معادلات سیستم اضافه می‌شود. این باعث خواهد شد که یک متغیر جدید دیگر نیز با عنوان  $\xi$  به صورت زیر به سیستم معادلات بهینه‌سازی افزوده می‌شود:

$$\dot{\xi} = \xi \quad (18)$$

رابطه‌ی (۱۸)، جهت تبدیل معادله‌ی دیفرانسیل به فرم استاندارد بدست آمده است. یک قید دیگر بصورت رابطه‌ی (۱۹) تعریف می‌شود:

$$\sigma^2 = (\theta + a)^2 \quad (19)$$

این قید بدین علت انتخاب شده است که ورودی‌های بهینه حاصل از روابط (۲۶) که در پی می‌آید، همگی هم تابعی از متغیرهای سیستم  $(\bar{x})$  و هم تابعی از متغیرهای بهینه‌سازی  $(\bar{\lambda})$  شوند. در اینجا، این موضوع در مورد ورودی  $Z$  صادق است که اگر رابطه‌ی (۱۹) استفاده نشود، این ورودی، ورودی بهینه‌ی لازم نخواهد بود. در این رابطه  $\sigma$  یک متغیر جدید و  $a$  یک عدد ثابت دلخواه است. با دو بار مشتق‌گیری، مانند رابطه‌ی (۱۷)، این قید اصلاح شده و تبدیل به معادله‌ی دیفرانسیل می‌شود (همانند آنچه که برای رابطه‌ی (۱۲) بدست آمد). حال چون محیط دینامیک است و باید همه‌ی قیدها به فرم استاندارد درآیند، لازم است که با تعریف متغیر زیر، این متغیر جایگزین زمان در معادلات سیستم شود:

$$\dot{\mu} = 1, \mu(0) = 0 \quad (20)$$

که در آن  $\mu$  معادل زمان در سیستم معادلات می‌باشد. در کل، پنج حالت طراحی مسیر و یک حالت تعقیب مسیر برای ربات نمونه صورت گرفته است که حالت تعقیب مسیر در بخش طراحی سیستم کنترل توضیح داده شده و نیز دو حالت طراحی مسیر (حالت‌های چهارم و پنجم) در بخش طراحی مسیر در محیط‌های پیچیده‌تر توضیح داده می‌شود. در حالت اول طراحی مسیر، یک مانع در محیط موجود است. مختصات مانع در این حالت مسئله که تابعی از زمان است، بصورت رابطه‌ی (۲۱) تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} x(\mu)_{obs} &= 1.1\mu \\ y(\mu)_{obs} &= 11 - 1.1\mu \end{aligned} \quad (21)$$





که در آن، همانگونه که ذکر شد،  $\mu$  معادل زمان می‌باشد. با جایگذاری این عبارات در معادله‌ی (۱۷)، قید استاندارد ناشی از وجود مانع حاصل می‌شود. با در نظر گرفتن محدودیت اکچواتورها، تعداد متغیرهای سیستم افزایش می‌یابد. در این حالت:

$$|X| < b_1, |Y| < b_2, |Z| < b_3 \quad (22)$$

که در آن  $\pm b_1, \pm b_2$  و نیز  $\pm b_3$  بترتیب محدوده‌ی بالایی و پایینی نیروها ( $X$  و  $Y$ ) و گشتاور ( $Z$ ) را مشخص می‌کند. در اینجا جهت سادگی فقط ورودی  $X$  در مسئله محدود شده است:

$$|X| < b_1 \quad (23)$$

در این مسئله  $b_1 = 700N$  در نظر گرفته شده است. همانند رابطه‌ی (۱۲)، این نامساوی نیز تبدیل به تساوی معادل می‌شود:

$$b_1 - |X| = \alpha^2 \quad (24)$$

با مشتق‌گیری و تبدیل رابطه‌ی (۲۴) به معادله‌ی دیفرانسیل، روابط (۲۵) حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= X_2 \\ -\frac{XX_2}{|X|} &= 2\alpha\dot{\alpha} \end{aligned} \quad (25)$$

این روابط نیز به سیستم معادلات دیفرانسیل اضافه می‌شود. بدین شکل، دو متغیر دیگر به سیستم معادلات اضافه می‌شوند ( $X_2$  و  $\alpha$ ). به ازای این دو متغیر، دو متغیر بهینه‌سازی متناظر نیز به سیستم اضافه خواهد شد. در حقیقت به ازای هر متغیر سیستم، یک متغیر بهینه‌سازی شکل خواهد گرفت.

مسئله‌ی طراحی مسیر بدین شکل حل می‌شود که با استفاده از تابع همیلتونی اصلاح شده و نیز با بدست آوردن ضرایب  $\lambda_i$  و  $x_i$  با استفاده از روابط (۱۶) که به تعداد متغیرهای سیستم است، در مجموع سیستم معادلات ۲۶ تایی حاصل می‌شود که ۱۳ تای آن مربوط به سیستم (معادلات حرکت) (۹)، معادلات دیفرانسیل حاصل از روابط (۱۲)، (۱۸)، (۱۹)، (۲۰) و (۲۵) و ۱۳ تای آن نیز مربوط به متغیرهای بهینه‌سازی است. در نتیجه طبق رابطه‌ی (۱۶)، یک سیستم معادلات دیفرانسیل ۲۶ تایی غیرخطی باید حل شود. این معادلات، معادلات دیفرانسیل با شرایط مرزی بوده که شرایط اولیه و نهایی متغیرهای سیستم (و نه متغیرهای بهینه‌سازی) مشخص است. برخی از مقادیر اولیه و نهایی متغیرهای سیستم را می‌توان با استفاده از معادلات برابری و نیز با داشتن مقدار اولیه و نهایی موقعیت ربات، بدست آورد. مثلاً مقدار اولیه و نهایی  $\sigma$  را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی (۱۹) و با داشتن مقدار دلخواه  $a$  و نیز



مقادیر اولیه و نهایی  $\theta$  بدست آورد. با استفاده از حل عددی نیوتون-رافسون، این معادلات که یک مسئله‌ی مقدار مرزی است حل شده و خروجیهای متغیرهای سیستم ( $\vec{\eta}$ ) در زمانهای مختلف و جدای از مقدار اولیه و نهایی آنها بدست می‌آیند.

برای اینکه معادلات دیفرانسیل مربوطه حل شوند، لازم است که بجای ورودیها، مقادیر بهینه‌ی آنها که بر حسب متغیرهای سیستم و متغیرهای بهینه‌سازی (و نه فقط بر حسب یکی از آنها) است، بدست آیند. در نتیجه با استفاده از معادلاتی که توسط روابط (۲۶) بدست می‌آیند، می‌توان ورودیهای بهینه را بدست آورد [9]:

$$\frac{\partial H}{\partial X} = 0, \frac{\partial H}{\partial Y} = 0, \frac{\partial H}{\partial Z} = 0 \quad (26)$$

در نتیجه، معادلات بدست آمده از روابط (۱۶)، فقط تابعی از متغیرهای سیستم و متغیرهای بهینه‌سازی خواهند شد. همچنین همانگونه که ذکر شد، علت انتخاب رابطه‌ی (۱۹)، بدین جهت بود که ورودی  $Z$  تابعی از متغیرهای سیستم نیز باشد.

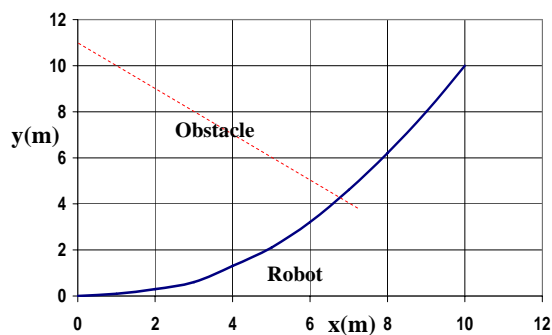
## ۵- نتایج عددی

نتایج عددی بدست آمده با این فرض صورت گرفته است که شرایط ابتدایی و شرایط انتهایی بترتیب برابر است با:

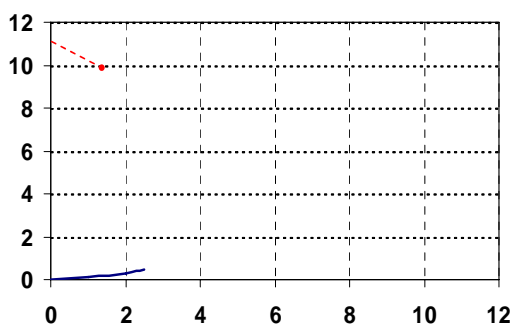
$$\begin{aligned} \vec{\eta}(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T \\ \dot{\vec{\eta}}(0) &= [0 \ 0 \ 0]^T \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \vec{\eta}(10) &= [10 \ 10 \ 0]^T \\ \dot{\vec{\eta}}(10) &= [0 \ 0 \ 0]^T \end{aligned} \quad (28)$$

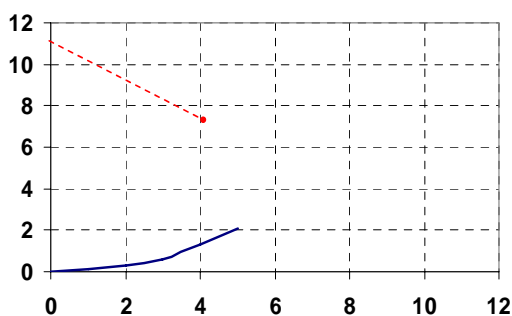
در اینجا، مدت زمان انجام طراحی مسیر برای این مسئله،  $T = 10$  ثانیه است. مختصات مانع نیز که تابعی از زمان است، همان معادلات (۲۱) هستند که برای حالت اول طراحی مسیر در نظر گرفته شده‌اند. در این حالت سرعت مطلق مانع برابر با  $V_{obs} = 1.56 \text{ m/s}$  است. توجه شود که جهت بدست آوردن این سرعت، ابتدا از معادلات (۲۱) نسبت به متغیر معرف زمان ( $\mu$ ) مشتق‌گیری شده و مولفه‌های سرعت در جهات  $x$  و  $y$  حاصل شده و در نهایت، با جمع برداری این دو مولفه‌ی سرعت، مقدار سرعت مطلق مانع حساب شده است. نتیجه پس از اجرای برنامه، به صورت شکل (۴) نشان داده شده است. در این شکل، فقط راستای مسیرها مشخص‌اند. موقعیت ربات و موقعیت مانع در لحظات مختلف در شکل‌های (۵) تا (۸) نشان داده شده است.



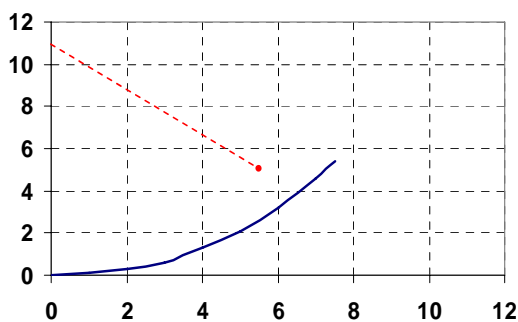
شکل (۴) - راستای مسیرهای بدست آمده برای ربات و مانع در حالت اول طراحی مسیر



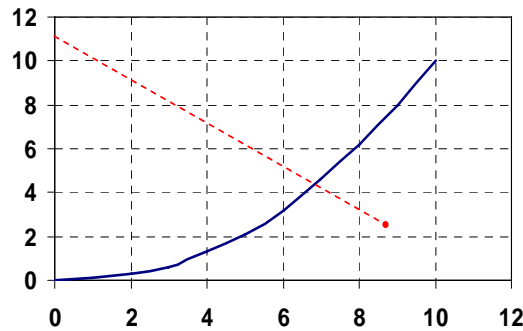
شکل (۵) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 2.5s$  برای حالت اول طراحی مسیر



شکل (۶) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 5s$  برای حالت اول طراحی مسیر



شکل (۷) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 7.5s$  برای حالت اول طراحی مسیر



شکل (۸) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 10s$  برای حالت اول طراحی مسیر

برای حالت دوم طراحی مسیر، مولفه‌های سرعت مانع به میزان  $1m/s$  افزایش داده شده‌اند طوری که مختصات مانع

بر حسب زمان بصورت زیر است:

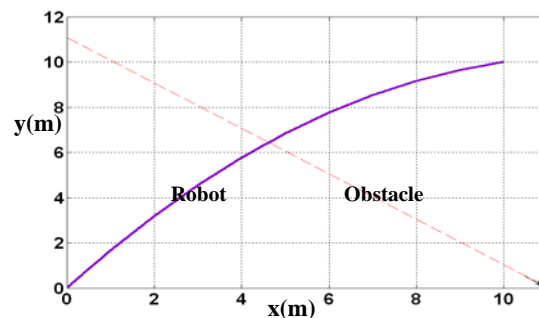
$$\begin{aligned} x(\mu)_{obs} &= (1.1+1)\mu = 2.1\mu \\ y(\mu)_{obs} &= 11 - (1.1+1)\mu = 11 - 2.1\mu \end{aligned} \quad (29)$$

در این حالت (حالت دوم) سرعت مطلق مانع برابر با  $V_{obs} = 2.97 m/s$  است. نتیجه بصورت کلی در شکل (۹) نشان داده شده است. در اینجا نیز فقط راستای مسیره‌ها مشخص است. موقعیت ربات و مانع نیز در لحظات مختلف در شکل‌های (۱۰) تا (۱۳) نشان داده شده است.

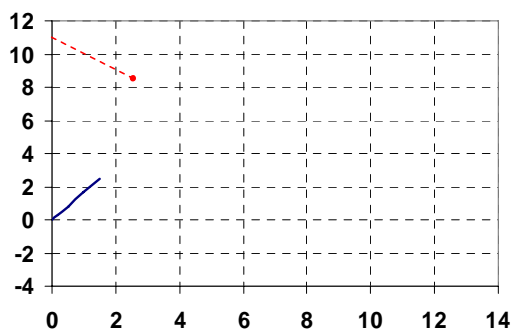
برای حالت سوم طراحی مسیر، مولفه‌های سرعت مانع مجدداً به میزان  $0.8m/s$  افزایش داده شده‌اند طوری که

مختصات مانع بر حسب زمان بصورت رابطه‌ی (۳۰) است:

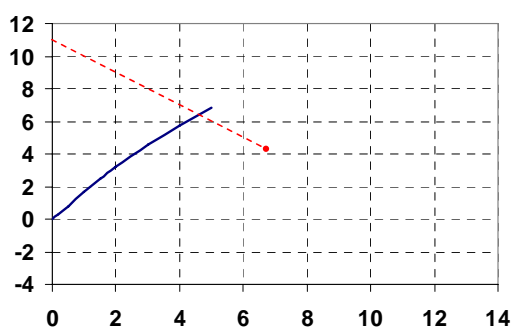
$$\begin{aligned} x(\mu)_{obs} &= (2.1+0.8)\mu = 2.9\mu \\ y(\mu)_{obs} &= 11 - (2.1+0.8)\mu = 11 - 2.9\mu \end{aligned} \quad (30)$$



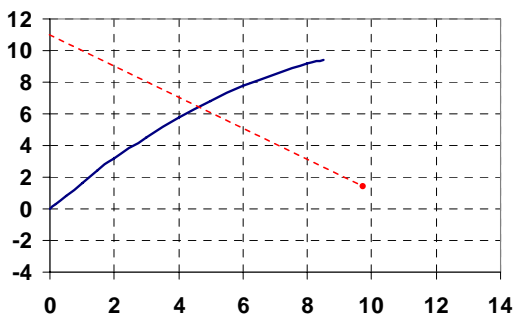
شکل (۹) - راستای مسیره‌های بدست آمده برای ربات و مانع در حالت دوم طراحی مسیر



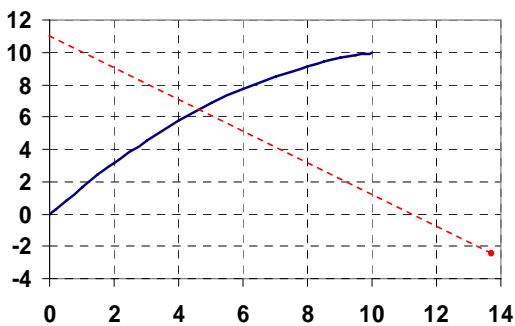
شکل (۱۰) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 2.5s$  برای حالت دوم طراحی مسیر



شکل (۱۱) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 5s$  برای حالت دوم طراحی مسیر



شکل (۱۲) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 7.5s$  برای حالت دوم طراحی مسیر

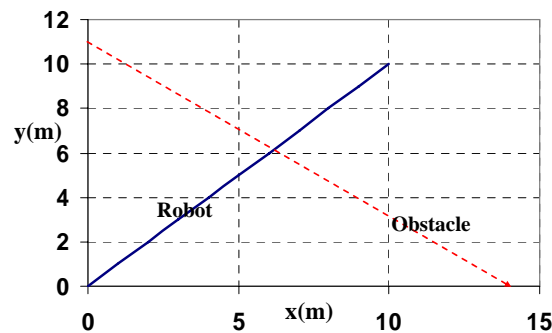




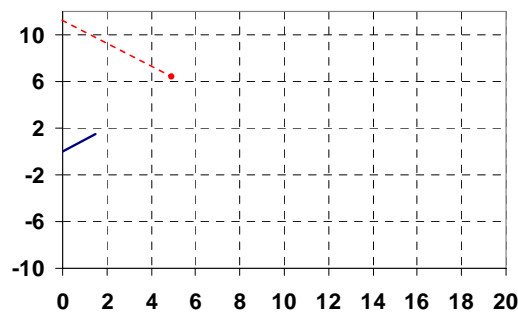
### شکل (۱۳) - موقعیت ربات و مانع در زمان $t = 10s$ برای حالت دوم طراحی مسیر

در این حالت (حالت سوم) سرعت مطلق مانع برابر با  $V_{obs} = 4.1 m/s$  است. توجه شود که سرعت مانع در حالت‌های اول، دوم و سوم با جمع برداری مولفه‌های سرعت آن در هر حالت حاصل شده است. مشخص است که مولفه‌های سرعت مانع، همان ضرایب  $\mu$  هستند. نتیجه در حالت کلی بصورت شکل (۱۴) نشان داده شده است که راستای حرکت مانع و ربات است.

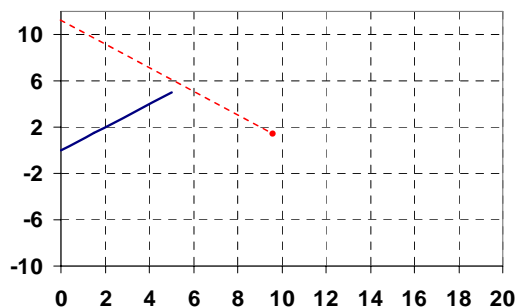
همانند حالت‌های قبل نیز، موقعیت مانع و ربات در شکل‌های (۱۵) تا (۱۸) نشان داده شده است. در همه‌ی این شکل‌ها، دایره‌ی توپر، نشانگر موقعیت مانع، خط نقطه‌چین، مسیر مانع و خط پررنگ نیز مسیر ربات است.



### شکل (۱۴) - راستای مسیرهای بدست آمده برای ربات و مانع در حالت سوم طراحی مسیر

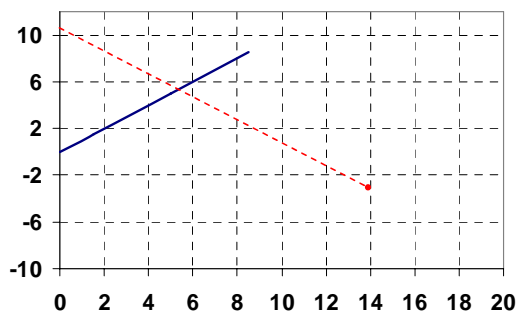


### شکل (۱۵) - موقعیت ربات و مانع در زمان $t = 2.5s$ برای حالت سوم طراحی مسیر

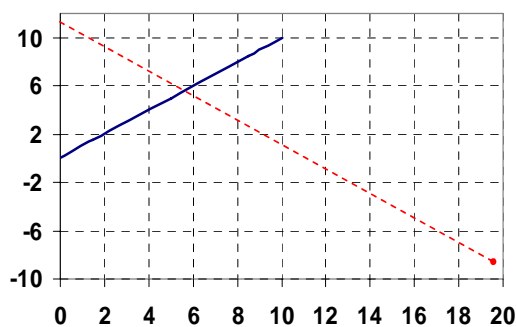




شکل (۱۶) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 5s$  برای حالت سوم طراحی مسیر



شکل (۱۷) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 7.5s$  برای حالت سوم طراحی مسیر



شکل (۱۸) - موقعیت ربات و مانع در زمان  $t = 10s$  برای حالت سوم طراحی مسیر

برای حالت‌های اول، دوم و نیز سوم طراحی مسیر می‌توان میزان مصرف انرژی را با استفاده از رابطه‌ی زیر محاسبه کرد:

$$E = \int_{x(t=0)}^{x(t=10)} Xdx + \int_{y(t=0)}^{y(t=10)} Ydy + \int_{\theta(t=0)}^{\theta(t=10)} Zd\theta \quad (31)$$

برای این ربات، میزان انرژی مصرف شده با استفاده از رابطه‌ی (۳۱) برای حالت‌های اول، دوم و نیز سوم طراحی مسیر در جدول (۱) نشان داده شده است.

جدول (۱) - میزان انرژی مصرف شده توسط ربات در سه حالت مختلف طراحی مسیر

حالت سوم	حالت دوم	حالت اول	
۸۸۹۱	۹۵۳۸	۱۱۰۰۲	انرژی مصرف شده (J)



همانگونه که ملاحظه می‌شود، انرژی مصرفی در حالت سوم که مسیر مستقیم است (شکل (۱۴)) از دو حالت دیگر کمتر است.

مقادیر ورودیهای سیستم که در معادله‌ی (۳۱) جایگذاری شده‌اند، همان ورودیهای بهینه‌ای هستند که از روابط (۲۶) حاصل شده‌اند.

## ۶- طراحی سیستم کنترل

مسیرهای طراحی شده در بخش ۶، مسیرهایی هستند که توسط سیستم هدایت ربات تصمیم‌گیری می‌شوند. حال جهت اجرای عمل تعقیب مسیر توسط ربات، باید یک سیستم کنترل خودکار برای ربات طراحی شود. این سیستم کنترل خودکار، برگرفته از روش اسلاتین و لی می‌باشد [5]. الگوریتم کلی این روش به صورتی است که در آن بردار متغیر  $\bar{\eta}_d = [x_d, y_d, \theta_d]$  بعنوان ورودی مطلوب در نظر گرفته شده است. با تعریف  $\tilde{\eta} = \bar{\eta} - \bar{\eta}_d$  بعنوان خطای ردیابی، عملگر کنترلی باید بگونه‌ای طراحی شود که متغیر ردیابی زیر بسمت صفر همگرا شود:

$$\dot{\bar{s}} = \dot{\tilde{\eta}} + \lambda \tilde{\eta} \quad (32)$$

که در آن  $\lambda$  یک ثابت مثبت بوده و بعنوان پهنای باند کنترل شناخته می‌شود. در این مسئله،  $\lambda = 8.5$  در نظر گرفته شده است. در نتیجه همگرایی  $\bar{s}$  به سمت صفر دلالت بر این دارد که خطای ردیابی  $\tilde{\eta}$  بسمت صفر میل می‌کند. معادله‌ی بالا جهت سادگی بصورت زیر نوشته می‌شود که بر حسب  $\bar{\eta}_r$  بر طبق عبارت زیر تعریف می‌شود:

$$\dot{\bar{s}} = \dot{\tilde{\eta}} - \dot{\bar{\eta}}_r \Rightarrow \dot{\tilde{\eta}}_r = \dot{\tilde{\eta}} - \lambda \tilde{\eta} \quad (33)$$

با استفاده از رابطه‌ی زیر می‌توان  $\bar{\eta}_r$  را به مختصات متصل به جسم انتقال داد:

$$\dot{\tilde{\eta}}_r = J(\bar{\eta}) \dot{\bar{v}}_r \quad (33)$$

در نتیجه بردارهای  $\dot{\bar{v}}_r$  و  $\dot{\tilde{\eta}}_r$  متصل به جسم را می‌توان بصورت رابطه‌ی (۳۴) نوشت:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{v}}_r &= J^{-1}(\bar{\eta}) \dot{\tilde{\eta}}_r \\ \dot{\tilde{\eta}}_r &= J^{-1}(\bar{\eta}) \left[ \ddot{\tilde{\eta}}_r - \dot{J}(\bar{\eta}) J^{-1}(\bar{\eta}) \dot{\tilde{\eta}}_r \right] \end{aligned} \quad (34)$$

و در نهایت سیستم کنترل را بشکل زیر طراحی نمود:





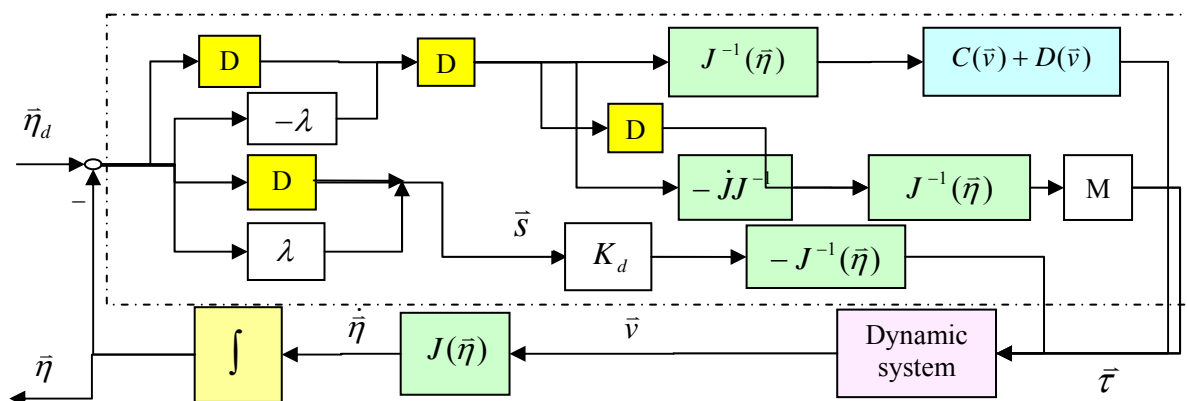
$$\bar{\tau} = M\dot{\bar{v}}_r + C(\bar{v})\bar{v}_r + D(\bar{v})\bar{v}_r + g(\bar{\eta}) - J^T(\bar{\eta})K_d\bar{s} \quad (35)$$

که  $\bar{v}_r$  و  $\dot{\bar{v}}_r$  همان بردارهای تعریف شده در معادلات (۳۴)

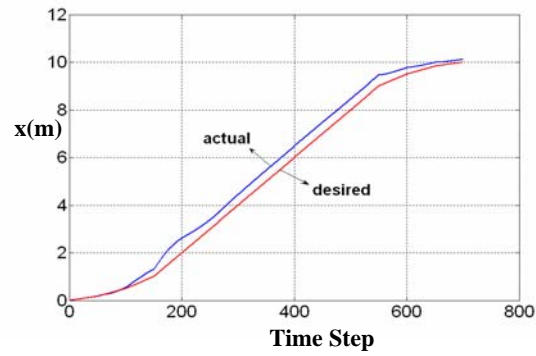
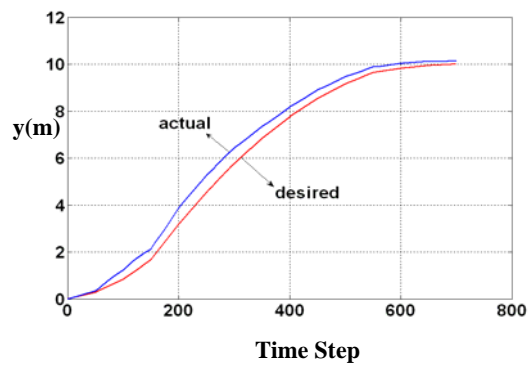
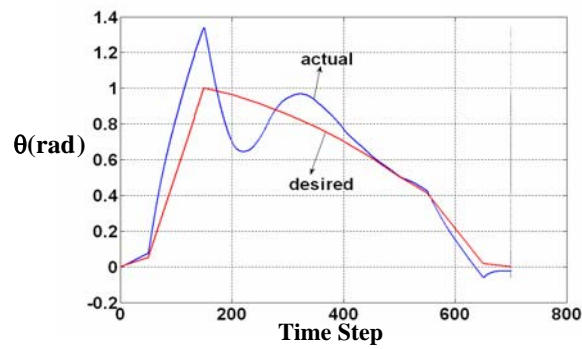
هستند.  $K_d$  نیز یک ماتریس مثبت بوده و بعنوان ماتریس پارامترهای طراحی شناخته می‌شود.  $\bar{s}$  نیز متغیر تعریف شده در معادله (۳۱) است. با بدست آمدن ورودی  $\bar{\tau}$  از معادله (۳۵)، این مقدار وارد معادلات حرکت سیستم شده و پاسخ در هر لحظه بدست می‌آید. سیستم مدار بسته متشکل از کنترل کننده و سیستم دینامیکی با الگوریتم ذکر شده، در شکل (۱۹) نشان داده شده است. در اینجا  $\lambda = 8.5$  و ماتریس پارامترهای طراحی بصورت رابطه (۳۶) انتخاب می‌شود:

$$K_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (36)$$

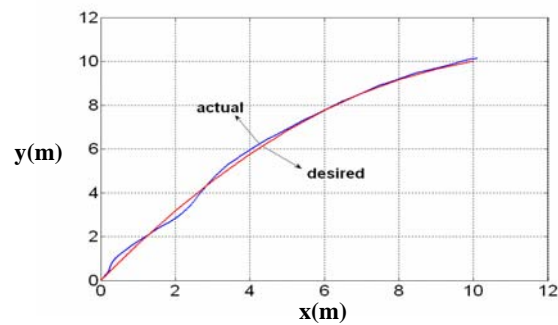
پاسخ سیستم کنترلی بشکل نمودار در شکل‌های (۲۰) تا (۲۳) نشان داده شده است. این نمودارها، تعقیب مسیر ربات را در هر یک از راستاها و درجات آزادی سیستم و نیز در صفحه نشان می‌دهند. بازه‌ی زمانی در این نمودارها برابر با  $\text{Time Step} = 0.014s$  انتخاب شده است. بنابراین مدت زمان کلی به ۷۰۰ بازه‌ی زمانی تقسیم شده که معادل مدت زمان طراحی و طی مسیر در ۱۰ ثانیه خواهد بود.



شکل (۱۹) - سیستم کنترلی طراحی شده به روش اسلاتین و لی جهت تعقیب مسیر

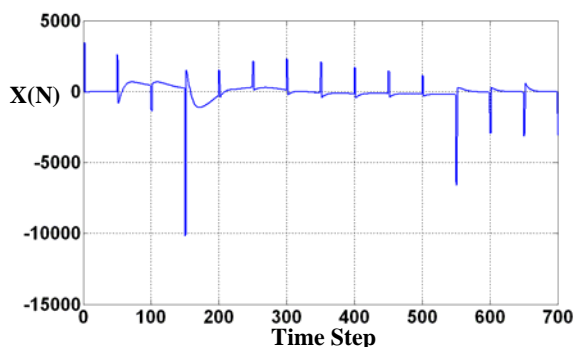
شکل (۲۰) - تعقیب مسیر  $x$  بر حسب بازه‌ی زمانیشکل (۲۱) - تعقیب مسیر  $y$  بر حسب بازه‌ی زمانی

شکل (۲۲) - تعقیب مسیر زاویه‌ای بر حسب بازه‌ی زمانی

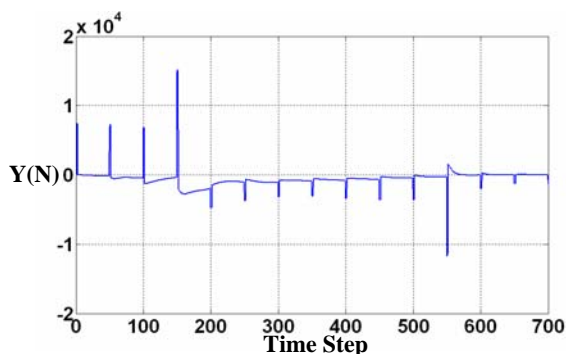
شکل (۲۳) - تعقیب مسیر در صفحه  $xy$



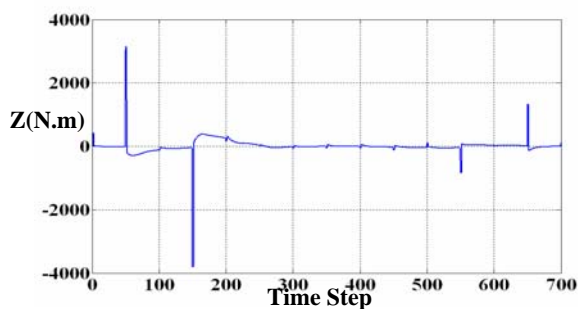
ورودیهای سیستم کنترلی نیز برحسب زمان در شکلهای (۲۴)، (۲۵) و (۲۶) نشان داده شده اند. علت جهش ورودیها در شکلهای این است که ورودی مطلوب  $\bar{\eta}_d$  که یک سیگنال نامنظم است، به چهارده قسمت مساوی (برحسب زمان) تقسیم شده و هر قسمت با یک پاره خط شیبدار (ramp) تقریب زده شده است، این باعث می شود که در هنگام تغییر جهت مقدار ورودی مطلوب، بعلت تغییر ناگهانی گرادیان، ورودیها جهش ناگهانی داشته باشند تا مقدار مطلوب حاصل شود.



شکل (۲۴) - ورودی کنترلی نیرو در راستای حرکت پیشروی به سیستم دینامیکی برحسب بازه‌ی زمانی



شکل (۲۵) - ورودی کنترلی نیرو در راستای حرکت عرضی به سیستم دینامیکی برحسب بازه‌ی زمانی



شکل (۲۶) - ورودی کنترلی گشتاور در حرکت گردش به سیستم دینامیکی برحسب بازه‌ی زمانی



## ۷- طراحی مسیر در محیط‌های پیچیده‌تر

علاوه بر سه حالتی که در آن فقط یک مانع متحرک وجود داشت، دو حالت دیگر طراحی مسیر انجام شده است. در حالت‌های چهارم و پنجم نیز طراحی مسیر در مدت زمان ۱۰ ثانیه انجام گرفته است. در این حالات، چون جابجایی برخی از موانع با مقیاسهای بزرگتری صورت پذیرفته و امکان ترسیم حرکات به صورت لحظات زمانی مختلف وجود ندارد، مقادیر این جابجاییها در جدول نشان داده شده است. در این دو حالت، جهت ساده‌تر شدن مسئله، محدودیت اکچواتور در نظر گرفته نشده و نیز به ازای وجود هر مانع، یک قید مانند رابطه‌ی (۱۰) خواهیم داشت که با تبدیل آن به رابطه‌ی (۱۲) و نیز تبدیل آن به یک قید استاندارد (همانند روابط (۱۷) و (۱۸))، و در نهایت اضافه کردن آن به تابع همیلتونی، با استفاده از روابط (۱۶)، معادلات دیفرانسیل مربوط به بهینه‌سازی حاصل شده و نیز ورودیهای بهینه با استفاده از همان روابط (۲۶) بدست می‌آیند. در این حالات، تابع همیلتونی برابر خواهد بود با:

$$H = \bar{\lambda}^T \bar{F}(\bar{x}, \bar{U}) + \bar{\lambda}_1 \bar{F}_1(\bar{x}, \bar{U}) + \bar{\lambda}_2 \bar{F}_2(\bar{x}, \bar{U}) + \dots \quad (37)$$

که در آن  $\bar{F}$ ، سمت راست معادلات دیفرانسیل (۸) و  $\bar{F}_i$  نیز سیستم معادلات حاصل شده به ازای وجود هر قید(در اینجا قیدهای ناشی از وجود موانع) می‌باشد.  $\bar{\lambda}_i$  ها نیز بردار متغیرهای بهینه‌سازی به ازای متغیرها و معادلات اضافه شده‌ی ناشی از قیدها می‌باشند [8]. در حالت چهارم، دو مانع با معادلات حرکتی زیر در محیط انتخاب شده‌اند:

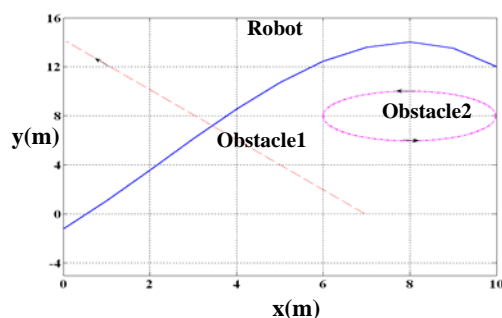
$$\left\{ \begin{array}{l} (x(t)_{obs(1)}, y(t)_{obs(1)}) = (7 - 2t^2, 3.6t^2) \\ (x(t)_{obs(2)}, y(t)_{obs(2)}) = (8 + 2 \cos(60t), 8 + 2 \sin(60t)) \end{array} \right. \quad (38)$$

شرایط اولیه و نهایی ربات بدین صورت انتخاب شده است:

$$\begin{aligned} x(0) &= 0; y(0) = -1; u(0) = 0 \\ v(0) &= 0; \theta(0) = 0; r(0) = 0 \\ x(10) &= 10; y(10) = 12; u(10) = 0 \\ v(10) &= 0; \theta(10) = 0; r(10) = 0 \end{aligned}$$

حداقل فواصل موانع اول و دوم تا ربات به ترتیب ۳ و ۴ متر هستند. نتیجه‌ی نهایی امتداد حرکت ربات و موانع بدون برخورد و با تابع هدف (۱۵) بصورت نمودار در شکل (۲۷) آمده است. موقعیت موانع و ربات نیز در زمانهای مختلف

در جدول (۲) آمده است



شکل (۲۷) - راستای مسیره‌های موانع و ربات در حالت چهارم

جدول (۲) - موقعیت ربات و موانع در حالت چهارم

زمان (S)	موانع اول	موانع دوم	ربات
۲/۵	(-5.5, 22.5)	(9.4, 6.57)	(1.5, 2)
۵	(-43, 90)	(7.96, 6)	(3.7, 7.8)
۷/۵	(-105.5, 202.5)	(6.53, 6.63)	(7.5, 13.5)
۱۰	(-193, 360)	(6, 8.08)	(10, 12)

در حالت چهارم، انرژی مصرفی ربات با استفاده از رابطه (۳۱) برابر با ۱۳۱۲۳ ژول حاصل شده است.

در حالت پنجم این بار سه مانع متحرک ا در محیط قرار داده می‌شوند. معادلات حرکت موانع به ترتیب به صورت

روابط (۳۹) می‌باشند:

$$\left\{ \begin{array}{l} (x(t)_{obs(1)}, y(t)_{obs(1)}) = (0.5t^2, 8 - 2t) \\ (x(t)_{obs(2)}, y(t)_{obs(2)}) = (5, 6 \sin(100t)) \\ (x(t)_{obs(3)}, y(t)_{obs(3)}) = (9, -6 + 1.4t) \end{array} \right. \quad (39)$$

شرایط اولیه و نهایی ربات به صورت زیر انتخاب شده است:

$$x(0) = 0; y(0) = -3.5; u(0) = 0$$

$$v(0) = 0; \theta(0) = 0; r(0) = 0$$

$$x(10) = 10; y(10) = 6; u(10) = 0$$

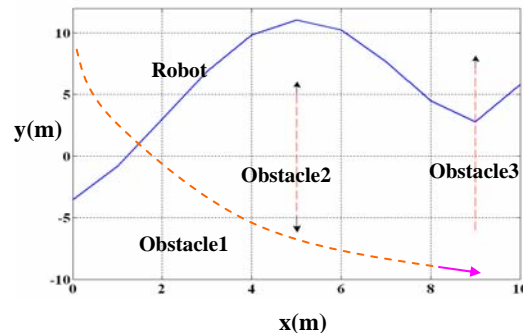
$$v(10) = 0; \theta(10) = 0; r(10) = 0$$

حداقل فواصل ربات تا موانع اول، دوم و سوم به ترتیب برابر با ۶، ۴ و ۳ متر می‌باشند. نتیجه‌ی نهایی امتداد حرکت

ربات و موانع بدون برخورد و با تابع هدف بصورت نمودار در شکل (۲۸) نشان داده شده است. همچنین موقعیت موانع



و ربات بر حسب زمان در جدول (۳) نشان داده شده است. در حالت پنجم نیز انرژی مصرفی ربات با استفاده از همان رابطه (۳۱) برابر با ۱۶۰۳۹ ژول حاصل شده است.



شکل (۲۸) - راستای مسیرهای ربات و موانع در حالت پنجم

جدول (۳) - موقعیت ربات و موانع در حالت پنجم

زمان (S)	مانع اول	مانع دوم	مانع سوم	ربات
۲/۵	(0.43, 3)	(5, -5.8)	(9, -2.5)	(1, -0.75)
۵	(1.5, -2)	(5, -2.8)	(9, 1)	(3.9, 9.8)
۷/۵	(5.82, -7)	(5, 4.47)	(9, 4.5)	(8.3, 3.87)
۱۰	(20.13, -12)	(5, 4.96)	(9, 8)	(10, 6)

## ۸- نتیجه گیری

بعنوان نتیجه گیری کلی، می توان گفت که با اصلاح تابع همیلتونی و با استفاده از برنامه ریزی دینامیک، برای ربات های زیرسطحی در محیط های با موانع متحرک می توان طراحی مسیر بهینه انجام داد. همچنین باید ورودی های بهینه بگونه ای انتخاب شوند که تابعی از متغیرهای بهینه سازی و متغیرهای سیستم باشند. در غیر این صورت، ورودی بهینه یک ورودی مناسب نخواهد بود و امکان دارد که پاسخ بهینه برای ربات بدست نیاید. در مورد سیستم کنترلی نیز می توان نتیجه گرفت که چون مسیر بهینه بدست آمده، معمولاً یک مسیر هموار است، سیستم کنترل انتخابی جهت تعقیب مسیر، یک سیستم مناسب می باشد.



## نمادها:

$\theta$	زاویه
$\bar{\eta}$	بردار موقعیت در مختصات کلی
$J$	ماتریس انتقال
$\bar{v}$	بردار سرعت در مختصات محلی
$C$	ماتریس اثرات غیرمستقیم
$D$	ماتریس اثر مستقیم
$M$	ماتریس جرم
$\bar{r}$	بردار ورودیها
$(x_{obs}, y_{obs})$	موقعیت مانع
$OF$	تابع هدف در همیلتونی
$\bar{\lambda}$	بردار متغیرهای بهینه سازی
$H$	همیلتونی
$\xi$	متغیر کمکی قید حرکت مانع
$\zeta$	متغیر کمکی تبدیل معادله
$\sigma$	متغیر کمکی جهت بهینه کردن ورودی
$\mu$	متغیر جایگزین شده بجای زمان
$t$	زمان
$\bar{U} = \bar{r}$	بردار ورودیها
$\bar{\eta}_d$	موقعیت مطلوب
$\lambda$	پهنای باند (در سیستم کنترلی)
$K_d$	ماتریس پارامترهای طراحی
$\bar{x}$	بردار متغیرهای سیستم
$E$	انرژی مصرفی توسط ربات در طراحی مسیر



## مراجع:

- [1] S.Waydo & Richard M.Murray, "Vehicle Motion Planning Using Stream Functions", IEEE International Conference on Robotics & Automation, Taipei, Taiwan, September 2003.
- [2] M.I.Riberio & P. Lima, "Motion Planning" Institute of Systems and Robotics, Lisbon, Portugal, 2002, research paper.
- [3] J.Rief&M.Sharir, "Motion Planning in The Presence of Moving Obstacles", Tel Aviv & New York Universities, 1994, Journal of Association for Computing Machinery, Vol.41, pp 764-790.
- [4] Kiku Fujimura, "Time minimal Paths amidst Moving Obstacles in three Dimensions", International Journal on Theoretical Computer Science, Vol 270, January 2002, pp 421-440.
- [5] T.I.Fossen, "Guidance and Control of Ocean Vehicles", University of Trondheim, Norway, Copyright 1994 by John Wiley and Sons Ltd.
- [6] L.Lapierre, D.Soetanto, A.Pascoal, "Nonlinear Path Following with Applications to the Control of Autonomous Underwater Vehicles", Institute for Systems and Robotics and Department of Electrical Engineering and Computers, Proceedings of the 42<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control, Maui, Hawaii, USA, December 2003.
- [7] T.I.Fossen, J.G.Balchen, "The NEROV Autonomous Underwater Vehicle", Department of Engineering Cybernetics, The Norwegian Institute of Technology, research report, 1995.
- [8] Byron S.Gottfried & Joel Weisman, "Introduction to Optimization Theory", Department of Industrial Engineering, University of Pittsburgh, Department of Chemical and Nuclear Engineering, University of Cincinnati, Copyright 1973 by Prentice-Hall.
- [9] Morton.M.Denn, "Optimization By variational Methods", Department of Chemical Engineering, University of Delaware, Copyright 1969 by Mc Graw-Hill.