



# شناسایی مرز سوپرکوییتی بوجود ناشی از جسم گوه ای شکل و تحلیل میدان سرعت و فشار حول آن

نوروز محمد نوری<sup>۱</sup>، آرش اسلام دوست<sup>۲</sup>

تهران، نارمک، دانشگاه علم و صنعت ایران، دانشکده مکانیک، آزمایشگاه

هیدرودینامیک کاربردی، کد پستی ۱۶۸۴۶-۱۳۱۱۴

mnouri@iust.ac.ir

## چکیده

در این مقاله میدان جریان ناشی از یک جسم لاغر و سوپرکوییتی بوجود آمده در پشت آن مورد بررسی قرار گرفته است. پرفیل سوپرکوییتی موجود که محل تقابل دو فاز مایع و گاز را از هم مشخص می کند، با استفاده از تئوری اجسام لاغر بدست آمده است. بعد از تحلیل چنین جریانی توسط روش المان مرزی، مشاهده می شود که فشار روی مرز حفره دارای مقدار ثابتی می باشد. اثر عدد کاویتاسیون در طول سوپرکوییتی بوجود آمده، ناشی از یک جسم گوه ای شکل نیز مورد بررسی قرار گرفته است.

**کلمات کلیدی:** سوپرکاویتاسیون - جریان پتانسیل - جسم لاغر - روش المان مرزی

---

<sup>۱</sup>استادیار دانشگاه علم و صنعت ایران دانشکده مکانیک

<sup>۲</sup>دانشجوی کارشناسی ارشد دانشگاه علم و صنعت ایران دانشکده مکانیک



## مقدمه

در اجسام غوطه ور در مایعات که نسبت به سیال اطراف دارای سرعت زیادی می باشند، زمانیکه فشار محلی به فشار بخار مایع موجود می رسد، می توان کاویتاسیون<sup>۳</sup> را مشاهده کرد. اگر عدد کاویتاسیون خیلی کاهش یابد، یک سوپرکویتیتی<sup>۴</sup> تشکیل می شود که جسم را در بر می گیرد.

تا حدود سه دهه پیش کاویتاسیون به عنوان پدیده ای مخرب شناخته شده بود و تمام تلاشها بر این بود که بتوان از بوجود آمدن آن جلوگیری کرد. اما ناگهان نگاه ها به این پدیده عوض شد و از این پدیده برای کاهش درگ هیدرودینامیکی وارد بر اجسام متحرک در داخل آب استفاده شد. امروزه توانایی رسیدن به سرعت  $100 \text{ m/s}$  در زیر آب با استفاده از این روش وجود دارد.

سوپر کویتیتی را هم به صورت طبیعی و هم به صورت مصنوعی می توان ایجاد نمود. برای بوجود آمدن سوپر کویتیتی بصورت طبیعی، نیاز به کاهش فشار مایع در بر گیرنده جسم جامد می باشد. کنترل بر روی این فشار را می توان به دو طریق اعمال نمود. این دو روش، افزایش سرعت نسبی بین جسم جامد و مایع محیط و یا کاهش فشار وارده بر کل محیط که جسم جامد و مایع محیط آن در آن واقع شده است، می باشد. برای بوجود آوردن سوپر کویتیتی بصورت مصنوعی لازم است که در پشت جسم جامد، گازی تزریق شود که به فشار مایع اطراف جسم رسیده باشد. با تغییر دبی گاز تزریق شده می توان سوپر کویتیتی مشابه با تمام اعداد کاویتاسیون موجود بدست آورد.

اولین مطالعاتی که برای مدل کردن این پدیده صورت گرفته توسط [1] Riabouchinski, Plesset [2] و [3] Wu با استفاده از روشهای تبدیل Conformal صورت گرفت. [4] Tulin چگونگی استفاده از روشهای اغتشاشات برای تحلیل جریان سوپر کویتیتی دوبعدی را معرفی کرد. Cuthbert و [5] Streets با چیدن چشمه و چاه در طول محور جسم لاغر و حفره متقارن محوری و استفاده از دیوار Riabouchinski برای بستن حفره آنرا مدل کردند. آنها این مساله را برای شکل های نامعین حفره مدل کردند ولی تنها در موارد خاصی موفق شدند.

<sup>3</sup> Cavitation

<sup>4</sup> Supercavity



Brennen [6] از یک روش تخمینی، در صفحه انتقال یافته سرعت و تابع جریان برای تحلیل جریان کاویتاسیون متقارن محوری ایجاد شده پشت یک دیسک و کره که بین دو دیوار واقع شده اند، استفاده کرد. Chou [7] کار Cuthbert و Street را توسعه داد تا بتواند جریان کاویتاسیون متقارن محوری را با استفاده از تئوری اجسام لاغر تحلیل کند. او برای حل مساله چشمه هایی را روی محور جسم-حفره و نقاط کنترلی را روی سطح جسم-حفره قرار داد. بنابراین یک معادله انتگرالی بدست آمد همراه با شرط مرزی دینامیکی روی حفره بدست آمد. برای ساده سازی معادلات در این کار، از یک پرفیل مخروطی شکل برای بسته شدن حفره استفاده شده است. Vorus [8] برای حل جریان سوپرکاویتاسیون از یک سری لورنت برای مرز حفره استفاده کرد که در آن از فرض نسبتاً واقعی برای بسته شدن حفره، یعنی مدل جت بازگشتی، استفاده شده. نتایج کار او درگ متفاوتی را با نتایج کار Chou نشان داد. Kuria [9] سعی کرد مساله جسم لاغر را همانند Chou حل کند، با این تفاوت که از روش طیفی همراه با چند جمله ای اصلاح شده Chebyshev استفاده کرد. او توانست مساله را برای تعداد مشخص نقاط کنترلی حل کند. روش المان مرزی غیر خطی برای جریان کاویتاسیون روی هیدروفویل ها، توسط Uhlman [10,11]. Kinnas و Fine [12,13]، گسترش داده شد. آنها چشمه و دوقطبی های نرمال را روی سطح جسم و حفره توزیع کردند. برای بدست آوردن قدرت این چشمه ها و دوقطبی ها از شرط دینامیکی که روی مرز حفره فرضی در نظر گرفته می شد، بدست می آمد. شرط مرزی سینماتیکی برای بهینه سازی مرز استفاده می شد. در سال ۱۹۹۴ دو روش هیدرودینامیک عددی برای اجسام با سرعت زیاد و جریان سوپرکاویتاسیون و متقارن محوری، بوجود آمد. یکی بر اساس تئوری اجسام لاغر بود که توسط Varghese [14] ارائه شد. دیگری بر پایه روش المان مرزی بود که توسط Kirschner [15] و Uhlman [16] ارائه شد.

در این مقاله از تئوری اجسام لاغر برای شناسایی مرز سوپرکویتی بوجود آمده استفاده می شود. پایه بکار رفته برای این کار، استفاده از قضیه استقلال Logvinovich می باشد [17].



اصل استقلال Logvinovich بیان می کند که هر المان از حفره<sup>5</sup> که در حال عبور از روی مرز می باشد، بصورت مستقل از المان موجود در همسایگی اش رفتار می کند و تغییرات مربوط به مرز حفره توسط اختلاف فشار بین فشار داخل حفره و فشار بینهایت و یا به بیان دیگر توسط عدد کاویتاسیون کنترل می شود.

### روابط حاکم بر مساله:

در این بخش ابتدا روابط ریاضی حاکم بر مساله که مشخص کننده مرز سوپرکوییتی بوجود آمده ناشی از یک جسم لاغر می باشد<sup>6</sup>، بیان می شود. بعد از این مرحله با داشتن مرز حفره مشخص، اساس معادلات المان مرزی<sup>7</sup> لازم برای تحلیل میدان جریان ناشی از جسم و حفره بیان می شود.

### شناسایی مرز حفره:

یک جسم به عنوان کویتیتور به همراه حفره که پشت آن در سیال واقع در محیط بینهایت را همانند آنچه در شکل (۱) دیده می شود در نظر بگیرید. برای ساده سازی از فرض تقارن نسبت به محور  $x$  ها در  $y=0$  در نظر گرفته می شود. فرض جسم لاغر بودن را می توان با توجه به فرضی که اشاره به عدم تغییرات شدید سرعت در میدان حل نسبت به سرعت بالادست می باشد، اعمال نمود. این گفته را با توجه به شکل (۱) می توان به این صورت کامل کرد که مولفه های  $u$  و  $v$  سرعت اغتشاشی در مقایسه با  $U_\infty$  خیلی کوچک می باشند.

مولفه سرعت  $v_e$  را می توان با توجه به سینماتیک سطح آزاد حفره تعیین نمود. این شرط بیان می کند که هر نقطه موجود روی حفره در یک زمان مشخص، در هر زمان دیگر نیز روی دیواره حفره باقی خواهد ماند تا اینکه بالاخره به محل بسته شدن حفره برسد و در نهایت از روی آن جدا شود. بنابراین  $v_e$  را می توان با رابطه زیر بیان کرد:

<sup>5</sup> Cavity

<sup>6</sup> Slender Body

<sup>7</sup> Boundary Element Method



$$v_c = \frac{\partial y_c}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial y_c}{\partial x} \quad (1)$$

که  $y = y_c(x, t)$  معادله نشاندهنده مرز حفره در لحظه  $t$  می باشد.

بنابراین از مولفه سرعت  $v$  در بینهایت جایی که سرعت یکنواخت است می توان صرفنظر نمود. در نتیجه می توان انتظار داشت که با دور شدن از مرز حفره  $v$  کاهش یابد.

در حالت دوبعدی فرض می کنیم که  $v$  به صورت متناسب با  $\frac{1}{y^n}$  رفتار میکند که  $y$  بیانگر فاصله عمودی از محور تقارن می باشد [17]. در ادامه نشان داده می شود که توان  $n$  متناسب با عدد کاویتاسیون  $\sigma$  می باشد و زمانیکه  $\sigma$  به ۱ میل می کند  $n$  به مقدار صفر می رسد. بنابراین فرض می شود که  $n$  همیشه بزرگتر از ۱ می باشد و در نتیجه مشکل به وجود آمدن نقطه سینگولار برطرف میشود. فرض می شود که  $v$  را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$v(x, y, t) = v_c \left[ \frac{y_c}{y} \right]^n = \left[ \frac{\partial y_c}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial y_c}{\partial x} \right] \left[ \frac{y_c}{Y} \right]^n \quad (2)$$

با توجه به فرض مربوط به اجسام لاغر و در یک سیال غیر لزج، معادله بقای ممنتوم را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (3)$$

که  $p$  معرف فشار،  $\rho$  معرف چگالی و  $\frac{d}{dt}$  بیانگر مشتق مادی می باشد که به صورت زیر نوشته می شود:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial x} + U_\infty \frac{\partial}{\partial x} \quad (4)$$

معادله بیانگر تغییرات مرز حفره را می توان از جایگزاری رابطه (۳) در رابطه (۲) و سپس انتگرال گیری از رابطه حاصل بین بازه  $y_c$ ، یعنی جایی که فشار آن برابر با فشار داخل حفره  $p_c$  است تا بینهایت که فشار آن برابر با  $p_v$  می باشد، بدست آورد. در نهایت این عملیات منجر به رسیدن به رابطه زیر می شود:



$$y_c \frac{d^2 y_c}{dt^2} + n \left( \frac{dy_c}{dt} \right)^2 = -(n-1) U_\infty^2 \frac{\sigma}{2} \quad (5)$$

در این معادله  $\frac{d}{dt}$  مشتق مادی و  $p_c$  بیانگر عدد کاویتاسیون می باشد که بصورت زیر تعریف شده:

$$\sigma = \frac{p_v - p_\infty}{\frac{1}{2} \rho U_\infty^2} \quad (6)$$

معادله (5) شبیه معادله Rayleigh-Plesset است که امکان محاسبه تغییرات زمانی یک حباب کروی را که در اختلاف فشار  $p_v - p_\infty$  قرار گرفته است را فراهم می آورد. این معادله بیان می کند که روی هر مقطعی از حفره دوبعدی می توان به صورت لاگرانژی حرکت کرد تا جایی که به پایین دست جریان که در آن سرعت برابر با  $U_\infty$  می باشد، رسید. در طی زمانیکه مقطع مورد نظر ما به سمت پایین دست جریان حرکت می کند، تغییرات پی در پی این مقطع را می توان توسط رابطه (5) بیان کرد. شرایط مرزی حاکم را زمانی اعمال می شود که مقطع مورد نظر ما از کویتیتور جدا می شود. این شرایط تعیین کننده اندازه مقطع و مقدار مشتق روی آن می باشد که این مقادارها بترتیب متناسب اند با اندازه کویتیتور و شیب آن در نقطه جدایی. با مقایسه رابطه (5) با حل کلاسیک [18] Tulin و بررسی لاغری بدست آمده از هر دو حل ضریب  $n$  را می توان به صورت زیر تعریف کرد:

$$n = 1 + \frac{\sigma/2}{(1 + \sigma/2)^2} \quad (7)$$

بنابراین  $n$  همیشه بزرگتر از 1 می باشد و زمانیکه  $\sigma$  به سمت 0 میل می کند، مقدار آن به 1 می رسد.

در نهایت معادله تعیین کننده مرز حفره در حالت پایدار بصورت معادله زیر می باشد:

$$\frac{d^2(y_c^2)}{dx^2} = -2 \left[ \frac{\sigma/2}{1 + \sigma/2} \right]^2 \quad (8)$$

### روابط ریاضی روش المان مرزی:

برای پیدا کردن میدان سرعت اعمال شده توسط یک جسم لاغر و سوپرکویتیتی پشت آن، با توجه به مرز

بدست آمده، از روش المان مرزی استفاده شده است [19].



مزیت این روش نسبت به سایر روشهای موجود صرفه جویی در زمان برای حل مساله ای مشخص می باشد؛ چونکه در این روش برای پیشبینی وقایع روی مرز موجود دیگر نیازی به تحلیل همزمان میدان محاسباتی نمی باشد. روش المان مرزی برای حل معادله لاپلاس و در نهایت برای بدست آوردن پتانسیل روی مرز بکار می رود. با داشتن اندازه پتانسیل روی مرز می توان با استفاده از جمع آثار ناشی از پتانسیل روی مرز و بینهایت، بردار سرعت و در نتیجه فشار موجود در کل میدان حل را محاسبه کرد. معادله حاکم بر مساله به صورت زیر می باشد.

$$\nabla \phi = \vec{U}_\infty \cdot \hat{n} \quad (9)$$

که در این رابطه  $\phi$  نشان دهنده پتانسیل اغتشاشات،  $\vec{U}_\infty$  نشان دهنده بردار سرعت بینهایت و  $\hat{n}$  نشان دهنده بردار نرمال بر مرز و جهت آن رو به خارج مرز به سمت میدان جریان موجود می باشد. این معادله بیان می کند که شار نرمال عبوری از مرز صفر می باشد. در کل می توان سرعت کل در هر نقطه از میدان محاسباتی را به صورت زیر بیان کرد.

$$\nabla \phi = \vec{U}_\infty + \nabla \phi \quad (10)$$

با استفاده از اتحاد گرین و تابع گرین دوبعدی  $G(X, X_0) = -\frac{1}{2\pi} \ln(r)$ ، حل پتانسیل اغتشاشات روی نقطه ای از مرز با مختصات  $X = (x, y)$  به صورت زیر بیان کرد.

$$\phi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_s \left[ \ln r(X, X_0) \frac{\partial \phi(X)}{\partial n} + \phi(X) \frac{\partial}{\partial n} [\ln r(X, X_0)] \right] ds \quad (11)$$

در این رابطه  $\frac{\partial}{\partial n}$  بیانگر تغییرات در راستای عمود بر مرز در جهت میدان جریان موجود می باشد. در این رابطه پتانسیل موجود روی مرز ناشی از توزیع چشمه ها و دوقطبی ها روی مرز و اثرات آنها می باشد. قدرت چشمه ها و دوقطبی ها به ترتیب  $\frac{\partial \phi}{\partial n}$  و  $-\phi$  می باشد.

## حل مساله

برای حل معادله (۱۱) بصورت عددی، مرز موجود را به  $N$  قسمت تقسیم می کنیم. بنابراین در نهایت دستگاه معادلات  $N \times N$  بدست می آید.



در این مقاله پتانسیل روی هر یک از المان های در نظر گرفته شده، ثابت فرض شده است. برای حل این دستگاه معادلات از روش حذف گوسی استفاده شده. برای پیدا کردن سرعت در میدان حل با توجه به پتانسیل بدست آمده روی مرز و در نتیجه در داخل میدان حل می توان از روابط زیر استفاده کرد.

$$u = U_{\infty} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad (12)$$

با محاسبه میدان سرعت موجود برای بدست آوردن میدان فشار می توان از معادله برنولی استفاده کرد.

$$P_{\infty} + \frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2 = P + \frac{1}{2} \rho U^2 \quad (13)$$

که در این رابطه  $P_{\infty}$  فشار بالا دست جریان،  $U_{\infty}$  اندازه سرعت در بالا دست جریان و  $U$  اندازه سرعت در نقطه از میدان جریان که فشار آن مدنظر است می باشد.

با توجه به معادله برنولی می توان ضریب فشار را به صورت زیر تعریف کرد.

$$C_p = 1 - \left( \frac{q}{U_{\infty}} \right)^2 \quad (14)$$

که  $q$  نشان دهنده سرعت روی مرز حفره می باشد.

### جمع بندی و نتیجه گیری

بعد از حل مساله و رسیدن به یک مرز فشار ثابت و در نظر گرفتن تئوری بکار رفته برای یافتن مرز سوپرکوییتی و اعمال چند فرض برای ساده سازی مساله می توان دید که با توجه به فیزیک مساله، این ساده سازی ها باعث نمی شود که خطای زیادی در نتایج خروجی ایجاد شود. این گفته را می توان در شکل (۲) مشاهده کرد. این شکل نمودار ضریب فشار بر حسب طول بی بعد حفره یعنی، طول حفره بر طول وتر گوه، نشان می دهد. می توان دید که این ضریب و در نتیجه فشار روی مرز حفره ثابت می باشد. ثابت بودن فشار روی مرز خود دلیلی بر این است که مرز انتخابی ما برای حفره مرز صحیح می باشد که با فیزیک مساله هم همخوانی دارد.

شکل (۳) نمودار طول بی بعد حفره بر حسب عدد کاویتاسیون را نشان می دهد. خط پیوسته مربوط به کار حاضر می باشد.





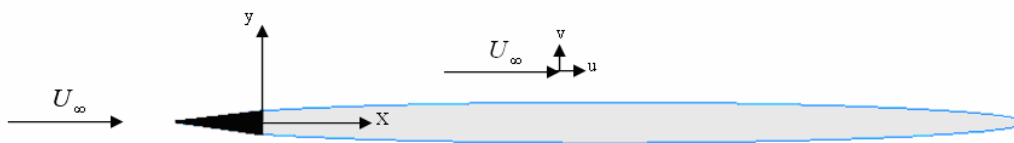
دیده می شود که در عدد کاویتاسیون ثابت طول حفره محاسبه شده در مقایسه با دو کار قبلی، کمتر می باشد. این اختلاف در سه نمودار را می توان با توجه به پیچیدگی های جریان در محل بسته شدن حفره توجیه نمود. در این ناحیه جریان بشدت آشفته و ناپایدار می باشد و دنباله حفره در انتها دائماً در حال فروپاشی و شکل گیری مجدد می باشد و در نتیجه نمی توان محل ثابتی را برای بسته شدن حفره در نظر گرفت. شکل (۴) میدان سرعت اطراف حفره را نشان می دهد. دیده می شود که در نزدیکی گوشه های تیز جسم سرعت به مقدار حداکثر خود می رسد و سپس تا نزدیکی های محل بسته شدن حفره ثابت باقی می ماند. با توجه به اینکه برای حل میدان جریان از فرض های مربوط به پتانسیل بودن جریان استفاده شده، جوابهای بدست آمده برای سرعت در نزدیکی محل بسته شدن حفره با فیزیک حاکم بر این ناحیه متفاوت خواهد بود.

## مراجع

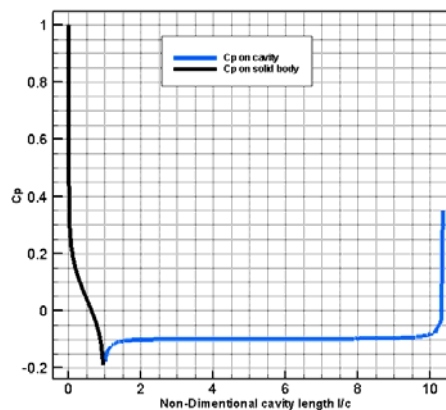
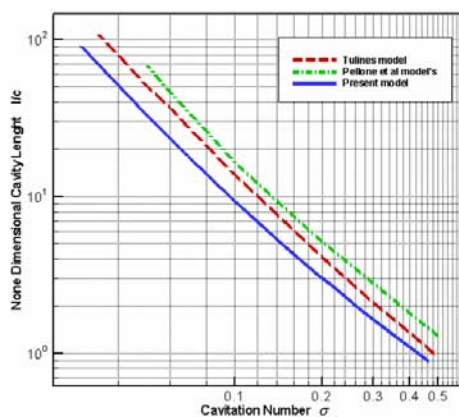
- [1] Riabouchinski, D., "On Steady Fluid Motion with Free Surface", Math. Soc., Vol. 19, pp. 202-212, 1920.
- [2] Plesset, M.S., Shaffer, P.A., "Drag in Cavitating Flows", Reviews of Modern Physics, Vol. 1, Number 1, 1948.
- [3] Wu, T.Y., "Cavity and wake flows", Annual reviews on fluid mechanics in Caltech, 1972.
- [4] Tulin, M. P., "Supercavitating Flows—Small Perturbation Theory", J. Ship Res., 7, p. 3., 1964.
- [5] Cuthbert, J., and Street, R., "An Approximate Theory for Supercavitating Flow About Slender Bodies of Revolution," LMSC Report, TM81-73/39, Lockheed Missiles and Space Co., Sunnyvale, CA. 1964.
- [6] Brennan, C., "A Numerical Solution of Axisymmetric Cavity Flows," J. Fluid Mech., 37, p. 4. 1969.
- [7] Vorus, W. S., "A Theoretical Study of the Use of Supercavitation/Ventilation for Underwater Body Drag Reduction," VAI Technical Report, Vorus & Associates, Inc., Gregory, MI. 1991.
- [8] Chou, Y. S., "Axisymmetric Cavity Flows Past Slender Bodies of Revolution", J. Hydronautics, 8, p. 1. 1974.
- [9] Kuria, I. M., Kirschner, I. N., Varghese, A. N., and Uhlman, J. S., "Compressible Cavity Flows Past Slender Non-Lifting Bodies of Revolution," Proceedings of the



- ASME & JSME Fluids Engineering Annual Conference & Exhibition, Cavitation and Multiphase Flow Forum, FEDSM97-3262, Vancouver, BC. 1997.
- [10] Uhlman, J. S., "The Surface Singularity Method Applied to Partially Cavitating Hydrofoils," *J. Ship Res.*, 31, p. 2. 1987.
- [11] Uhlman, J. S., "The Surface Singularity or Boundary Integral Method Applied to Supercavitating Hydrofoils," *J. Ship Res.*, 33, p. 1. 1989.
- [12] Kinnas, S. A., and Fine, N. E., "Nonlinear Analysis of the Flow Around Partially and Super-Cavitating Hydrofoils by a Potential Based Panel Method," *Proceedings of the IABEM-90 Symposium, International Association for Boundary Element Methods, Rome, Italy. 1990.*
- [13] Kinnas, S. A., and Fine, N. E., "A Numerical Nonlinear Analysis of the Flow Around Two- and Three-Dimensional Partially Cavitating Hydrofoils," *J. Fluid Mech.*, 254, pp. 151–181. 1993.
- [14] Varghese, A. N., Uhlman, J. S., and Kirschner, I. N., "Axisymmetric Slender-Body Analysis of Supercavitating High-Speed Bodies in Subsonic Flow," *Proceedings of the Third International Symposium on Performance Enhancement for Marine Applications, T. Gieseke, editor, Newport, RI. 1997.*
- [15] Kirschner, I. N., Uhlman, J. S., Varghese, A. N., and Kuria, I. M., "Supercavitating Projectiles in Axisymmetric Subsonic Liquid Flows," *Proceedings of the ASME & JSME Fluids Engineering Annual Conference & Exhibition, Cavitation and Multiphase Flow Forum, FED 210, J. Katz and Y. Matsumoto, editors, Hilton Head Island, SC. 1995.*
- [16] Uhlman, J. S., Varghese, A. N., and Kirschner, I. N., "Boundary Element Modeling of Axisymmetric Supercavitating Bodies," *Proceedings of the 1<sup>st</sup> Symposium on Marine Applications of Computational Fluid Dynamics, Hydrodynamic/Hydroacoustic Technology Center, McLean, VA. 1998.*
- [17] Pellone, C., Franc, J.P., Perrin, M., "Modeling of unsteady 2D cavity flows using the Logvinovich independence principle", *C. R. Mecanique*, pp.827-833, 2004.
- [18] Tulin ,M.P., "Steady two-dimensional cavity flows about slender bodies", *DTMB Rept. 834*, 1953.
- [19] Pozrikilidis , C., "Boundary Elements Methods", ISBN: 1-58488-323-5, 2002.
- [20] Knapp , R., Daily , J., Hammit, F., "Cavitation". New York: Mc Graw-Hill book comp. 1970



شکل (۱): گوه به همراه سوپرکویتهی ایجاد شده پشت آن در داخل محیط بیکران



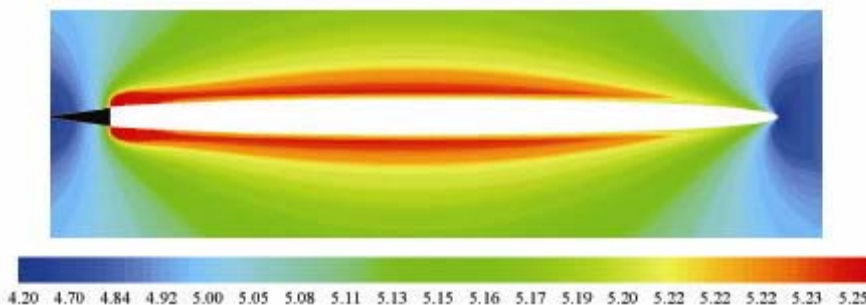
شکل (۳): مقایسه طول بی بعد سوپرکویتهی در اعداد

کاویناسیون مختلف با

کارهای [18] Tulin و [17] Pellone et al

شکل (۲): نمودار ضریب فشار روی مرز جسم و حفره

بر حسب طول بی بعد



شکل (۴): میدان سرعت بدست آمده حول کویتهیور گوه ای شکل و سوپرکویتهی پشت آن ( $U_\infty = 5$ )