



## بهگزینی چیدمان چندلایه‌های مرکب تحت بارگذاری استاتیکی فراگیر

مهدی مسافر<sup>۱</sup>، مهرداد صباغی<sup>۲</sup>

شرکت مهندسی و ساخت تأسیسات دریایی ایران، تهران

mosafer@ioec.com

### چکیده

با پیشرفت علم و تکنولوژی، مصالح ساختمانی و مهندسی نیز تحول چشمگیری پیدا کرده‌اند، به طوری که در جهان توسعه‌یافته امروز کمتر از مصالح سنتی استفاده می‌شود. یکی از علومی که به این پیشرفت کمک شایانی کرده است، علم متالوژی است، که با پیشرفت سریع خود، هر روزه مصالح جدید را با کیفیت و رفتار بسیار بهتر و مفیدتر ارائه می‌کند. مواد مرکب که از مصالح جدید و به‌روز به شمار می‌روند از این دسته هستند. این دسته از مصالح با تنوع فراوان و کاربردهای رو به افزایش خود سهم بسیاری در پیشرفت و توسعه صنعت ایفا می‌کنند. مواد مرکب پایه پلیمری ویژگی‌های بسیار خوبی برای استفاده در صنایع دریایی دارند. به همین دلیل، کاربردهای وسیعی در صنایع دریایی پیدا کرده‌اند، که از آن جمله می‌توان به ساخت بدنه قایقها و کشتیها و تأسیسات فراساحلی اشاره کرد. این مواد در صنعت نفت و گاز نیز برای ترمیم و تقویت سازه‌های فرسوده و ترمیم لوله‌های فرسوده نفت و گاز، و عایق توربین به کار می‌روند.

یکی از تفاوت‌های مواد مرکب با مصالح سنتی این است که این مواد را با توجه به نیاز می‌توان طراحی کرد. در طراحی هم، طراحی بهینه همواره جایگاه ویژه‌ای دارد.

---

۱ - کارشناس خطوط لوله نفت و گاز، شرکت مهندسی و ساخت تأسیسات دریایی ایران (IOEC)  
۲ - مشاور مدیر عامل در امور تحقیق و توسعه، شرکت مهندسی و ساخت تأسیسات دریایی ایران (IOEC)



طراحی بهینه چیدمان لایه‌های یک لامینت، مسأله بسیار پیچیده‌ای است. ما با به کار بردن یک روش بهگزینی ریاضی، چیدمان لایه‌های یک لامینت چندلایه را برای داشتن کمینه وزن پیدا کرده‌ایم. به گونه‌ای که در هیچکدام از لایه‌های آن شکست رخ ندهد. خواهید دید که با این کار دیگر برای طراحی مطلوب، به آزمون و خطاهای فراوان نیازی نداریم و پاسخ به دست آمده از این روش، از چیدمان به دست آمده با آزمون و خطاهای فراوان بهتر است.

**کلمات کلیدی:** چندلایه‌های مرکب - چیدمان لایه‌ها - بهگزینی - فراساحل

## مقدمه

مواد مرکب (Composite Materials) در صنایع کاربردهای فراوانی دارند، که به دلیل مزایای فراوان آنهاست. بالا بودن نسبت سفتی به وزن، بالا بودن نسبت استحکام به وزن (حتی تا ۱۵ برابر برخی از فولادها)، عمر طولانی، مقاومت بالا نسبت به خوردگی، چگالی پایین و قابلیت طراحی، و وجود روشهای مختلف ساخت و امکان تولید اشکال پیچیده و متنوع از مزایای این مواد است، [۱ و ۵]. گذشته از بی‌میلی اولیه صنایع برای تغییر به سمت مواد مرکب، ساخت و نصب مواد مرکب در صنایع فراساحلی، به مرور، افزایش یافته است. به گونه‌ای که اکنون به طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. امروزه، مواد مرکب در موارد زیر در فراساحل به کار می‌روند [۵].

حفاظت تجهیزات در برابر آتش، انفجار، و ضربه	تانک و مخزن
سیستمهای پایپینگ	نردبان و سینی انتقال کابل
تابلوه‌های حفاظ آتش	حفاظت از خوردگی
دالان و کفپوش	قایقهای نجات
دیوارهای پارتیشن	بویه و کمر بند نجات

در طراحی مواد مرکب، هدفهای گوناگونی مورد توجه طراحان قرار می‌گیرد. در این پژوهش، ما یک لامینت (Laminate) چندلایه (Multi-Layered) را تحت بارگذاری استاتیکی فراگیر در نظر گرفته و چیدمان لایه‌های (Stacking Sequences) آن را برای داشتن کمینه وزن پیدا کرده‌ایم. به گونه‌ای که در هیچکدام از لایه‌های آن شکست رخ ندهد.



برای بررسی شکست از معیار تسای - هیل (Tsai-Hill) استفاده کرده‌ایم. نیز در لامینت‌ها فرض‌های زیر را به کار برده‌ایم، [۱].

- (۱) لایه و لامینت از قانون هوک پیروی می‌کنند.
- (۲) در لایه‌ها حفره وجود ندارد.
- (۳) هرکدام از لایه‌ها ارتوتروپ است و زاویه الیاف از لایه‌ای به لایه دیگر می‌تواند تغییر کند.
- (۴) جابه‌جاییها و تغییرشکلها کوچکند.
- (۵) لامینت بسیار نازک است و کرنش عمود بر صفحه میانی لامینت ناچیز است.
- (۶) حالت تنش، صفحه‌ای است.
- (۷) لایه‌ها کاملاً به هم چسبیده‌اند.
- (۸) بارها بر صفحه میانی لامینت نشسته‌اند.

ویژگیهای مواد همگن در همه نقاط آن یکی است، اما ویژگیهای مواد مرکب، که در حالت کلی ناهمگن و غیرایزوتروپ هستند، تابع نقاط آن است. تغییر جنس لایه‌ها باعث می‌شود که هم وزن لامینت تغییر کند، هم استحکام آن. تغییر زوایای الیاف لایه‌ها هم بر استحکام لامینت اثر می‌گذارد، [۱ و ۲]. این تغییرات با تغییر چگونگی بارگذاری، به گونه‌های متفاوتی عمل می‌کنند، که همه این موارد سبب می‌شود که طراحی بهینه چیدمان لایه‌های یک لامینت، به مسأله‌ای بسیار پیچیده تبدیل شود، [۳ و ۴]. برای همین برای طراحی بهینه باید روند ویژه‌ای را به کار برد. ما برای این کار از یک روش بهگزینی ریاضی استفاده کرده‌ایم.

در پایان با یک شبیه‌سازی کامپیوتری، کارایی روش بیان‌شده را نشان داده‌ایم. خواهید دید که با این کار دیگر برای طراحی مطلوب، به آزمون و خطاهای فراوان نیازی نداریم و پاسخ به دست آمده از این روش، از چیدمان به دست آمده با آزمون و خطاهای فراوان بهتر است.

### رفتار کشسانی تک‌لایه‌های ارتوتروپیک

ویژگیهای هر جسم همگن در همه نقاط آن یکنواخت است. در مواد ایزوتروپیک، تنش نرمال باعث افزایش طول در جهت بارگذاری و کاهش طول در جهت عمود بر راستای آن می‌شود.



تنش برشی نیز باعث تغییر شکل برشی می‌گردد، [۱ و ۲].

مواد مرکب در حالت کلی ناهمگن و غیر ایزوتروپ هستند. ویژگیهای هر جسم غیر ایزوتروپ با تغییر نقاط آن تغییر می‌کند. در شکل (۱) یک تک‌لایه ارتوتروپیک را همراه با دستگاههای مختصات نشسته بر آن نشان داده‌ایم. 1 و 2 جهت‌های اصلی ماده و X و Y جهت‌های بارگذاری را نشان می‌دهند. در مواد ارتوتروپیک، اگر تنش نرمال در جهت محورهای اصلی ماده اعمال نشود رفتار آن همانند مواد ایزوتروپیک نخواهد بود. در این مواد، تنش نرمال هم باعث افزایش طول در جهت بارگذاری و کاهش طول در جهت عمود بر آن می‌شود، هم باعث تغییرشکل برشی می‌گردد، [۱ و ۲]. نیز تنش برشی هم باعث تغییرشکل برشی می‌شود و هم باعث کم یا زیاد شدن طول می‌گردد، [۱ و ۲]. بنابراین تعداد ویژگیهای لازم برای شناختن رفتار مواد ارتوتروپیک بیشتر از تعداد ویژگیهای لازم برای شناختن رفتار مواد ایزوتروپیک است. هر تک‌لایه ارتوتروپیک را می‌توان با داشتن ویژگیهای زیر شناخت.

$$\rho, E_1, E_2, G_{12}, \nu_{12}, X_t, Y_t, S, X_c, Y_c, t, \theta$$

$\rho$  چگالی ماده،  $E_1$  و  $E_2$  شناسه‌های کشسانی ماده در جهت‌های 1 و 2،  $G_{12}$  شناسه برشی ماده،  $\nu_{12}$  نسبت پواسون ماده،  $X_t$  و  $Y_t$  تنشهای تسلیم کششی در جهت‌های 1 و 2، S تنش تسلیم برشی،  $X_c$  و  $Y_c$  تنشهای تسلیم فشاری در جهت‌های 1 و 2، t ضخامت تک‌لایه و  $\theta$  زاویه الیاف آن با محور X است. اکنون برخی از روابط حاکم بر مواد مرکب را با فرضهایی که در بخش مقدمه بیان کردیم، بازمی‌گوییم.

در هر تک‌لایه ارتوتروپیک برابری زیر برقرار است، [۱ و ۲].

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \nu_{12}$$

(۱)

برابری (۱) را با نام قانون ماکسول (Maxwell law) می‌شناسند. تنشها و کرنشهای جهت‌های اصلی ماده با برابری

زیر به هم می‌پیوندند، [۱ و ۲].

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{Q} \begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_{12} \end{Bmatrix}$$

(۲)

f را برای نمایش تنش و e را برای نمایش کرنش به کار برده‌ایم. نیز



$$\mathbf{Q} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} E_1 & \nu_{21}E_1 & 0 \\ \nu_{12}E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Delta G_{12} \end{bmatrix}; \Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} \quad (3)$$

به ماتریس سفتی کاهیده (reduced stiffness matrix) می‌گویند. در شکل (۲) تنشهای نشست بر المانهایی از ماده را نشان داده‌ایم. بین این تنشها برابری زیر برقرار است، [۱].

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

که در آن

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin 2\theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin 2\theta \\ -0.5 \sin 2\theta & 0.5 \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix} \quad (5)$$

T ماتریس تبدیل از دستگاه x-y به دستگاه 1-2 است. بین کرنشها برابری مشابهی وجود دارد، [۱ و ۲]:

$$\begin{Bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 0.5e_{12} \end{Bmatrix} = \mathbf{T} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ 0.5e_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

تنشها و کرنشهای جهت‌های بارگذاری با برابری زیر به هم می‌پیوندند، [۱ و ۲].

$$\begin{Bmatrix} f_x \\ f_y \\ f_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}} \begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix}; \bar{\mathbf{Q}} = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{Q} [\mathbf{T}^{-1}]^T \quad (7)$$

به  $\bar{\mathbf{Q}}$  ماتریس سفتی کاهیده تبدیل‌یافته می‌گویند.

برای بررسی شکست تک‌لایه‌های ارتوتروپیک معیارهای گوناگونی را پرداخته‌اند. یکی از معیارها، که بیش از معیارهای دیگر به کار می‌رود، معیار شکست تسای - هیل است. بر اساس این معیار، هنگامی یک تک‌لایه می‌شکند که اندازه شاخص شکست (Failure Index) آن بزرگتر از یک شود.



شاخص شکست بر اساس این معیار، از برابری زیر به دست می‌آید، [۱ و ۲].

$$FI = \left(\frac{f_1}{X}\right)^2 + \left(\frac{f_2}{Y}\right)^2 + \left(\frac{f_{12}}{S}\right)^2 - \left(\frac{f_1}{X}\right)\left(\frac{f_2}{X}\right) \quad (8)$$

که در آن

$$X = \frac{X_t + X_c}{2} + \frac{X_t - X_c}{2} \operatorname{sgn}(f_1), \quad Y = \frac{Y_t + Y_c}{2} + \frac{Y_t - Y_c}{2} \operatorname{sgn}(f_2) \quad (9)$$

است.  $\operatorname{sgn}$  نشان تابع علامت (sign function) است.

### رفتار کشسانی لامینتهای چندلایه

در شکل (۳) مقطع یک  $N$  لایه را همراه با محور نشسته بر ضخامت آن و در شکل (۴) موقعیت صفحه میانی (mid-plane) آن را نشان داده‌ایم. همانگونه که از شکل (۳) پیداست، شماره‌گذاری لایه‌ها از پایین آغاز می‌شود. نیز فاصله سطح بالایی لایه  $p$  از سطح پایینی لایه اول را با  $z_p$  نشان داده‌ایم. در چنین چندلایه‌ای کرنشها از برابری زیر به دست می‌آیند، [۱ و ۲].

$$\begin{Bmatrix} e_x \\ e_y \\ e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ e_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (10)$$

در برابری (۱۰) بالانویس ۰ را برای نشان دادن کرنشهای صفحه میانی لامینت و  $k$  را برای نشان دادن شعاعهای خمش لامینت به کار برده‌ایم. در یافتن برابری (۱۰) فرض شده است که خط راست عمود بر صفحه میانی لامینت پس از تغییر شکل لامینت راست و عمود بر صفحه میانی باقی می‌ماند. با این فرض، جابه‌جایی‌های هر نقطه از لامینت را می‌توان با برابری‌های زیر به جابه‌جایی‌های صفحه میانی لامینت مرتبط کرد، [۲].

$$\begin{aligned} u &= u_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial x} \\ v &= v_0 - z \frac{\partial w_0}{\partial y} \\ w &= w_0 \end{aligned} \quad (11)$$



زیرنویس 0 را برای نشان دادن جابه‌جایی‌های صفحه میانی لامینت به کار برده‌ایم.  $u$ ،  $v$  و  $w$  به ترتیب جابه‌جایی در جهت  $x$ ،  $y$  و  $z$  را نشان می‌دهد. روشن است که از جایگذاری برابری‌های (۱۱) در برابری‌های

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ e_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (12)$$

و نامگذاری

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \\ k_y &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \\ k_{xy} &= \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \end{aligned} \quad (13)$$

برابری (۱۰) به دست می‌آید، [۱ و ۲].

در شکل (۵) قراردادهای مربوط به نیروها و گشتاورهای وارد بر واحد طول یک لامینت را نشان داده‌ایم. این نیروها و گشتاورها با برابری زیر به کرنشهای صفحه میانی و شعاعهای خمش می‌پیوندند، [۱].

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_x^0 \\ e_y^0 \\ e_{xy}^0 \\ k_x \\ k_y \\ k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (14)$$

$N$  را برای نشان دادن نیرو بر واحد طول و  $M$  را برای نشان دادن گشتاور بر واحد طول به کار برده‌ایم. نمادهای  $A$ ،

$B$  و  $D$  در برابری (۱۴)، ماتریسهای  $3 \times 3$  هستند، [۱ و ۲]:

$$\mathbf{A} = \sum_{p=1}^N t_p \bar{\mathbf{Q}}_p \quad (15)$$



$$\mathbf{B} = \sum_{p=1}^N -t_p \bar{z}_p \bar{\mathbf{Q}}_p ; \bar{z}_p = \frac{z_p + z_{p-1}}{2} \quad (16)$$

$$\mathbf{D} = \sum_{p=1}^N (t_p \bar{z}_p^2 + \frac{t_p^3}{12}) \bar{\mathbf{Q}}_p \quad (17)$$

اگر از معیار شکست تسای - هیل استفاده کنیم، عامل بار (load factor) هر لامینت بر اساس شاخص شکست لایه‌های آن با برابری زیر تعریف می‌شود.

$$LF = \frac{1}{\sqrt{\min(FI_1, FI_2, \dots, FI_N)}} \quad (18)$$

بنابراین برای اینکه هیچکدام از لایه‌های لامینت نشکند، باید  $LF > 1$  باشد.

### تعریف تابع ارزش و قیدهای مسأله بهینه‌یابی

فرض کنید می‌خواهیم وزن کمینۀ یک چندلایه را بیابیم. همانگونه که از شکل (۴) پیداست، سطح مقطع همه لایه‌ها یکی است. پس اگر این سطح مقطع را با  $A$  نشان دهیم، وزن چندلایه از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$W = \sum_{p=1}^N \rho_p A t_p g = A g \sum_{p=1}^N t_p \rho_p \quad (19)$$

که در آن  $g$  نشان شتاب گرانش زمین است. بنابراین برای یافتن کمینۀ وزن چندلایه کفایست کمینۀ تابع ارزش زیر را بیابیم.

$$J = \sum_{p=1}^N t_p \rho_p \quad (20)$$

جنس لایه‌ها می‌تواند یکی از موادی که در جدول (۱) نوشته‌ایم، باشد.





## جدول ۱ - جنس چند ماده مرکب

1-	E-glass/epoxy
2-	S-glass/epoxy
3-	Woven-glass/epoxy(7781/5245C)
4-	Kevlar/epoxy(Aramid 149/epoxy)
5-	Carbon/epoxy(AS4/3501-6)
6-	Carbon/PEEK(AS4/APC2)
7-	Carbon/epoxy(IM6/SC1081)
8-	Carbon/polyimide(Mod I/WRD9371)
9-	Graphite/epoxy(GY-70/934)
10-	Boron/epoxy(B5.6/5505)
11-	Boron/aluminum(B4/6061 Al)
12-	Silicon carbide/aluminum(SCS2/6061 Al)

ویژگیهای مهندسی این مواد را در جدول (۲) گردآورده‌ایم، [۱].

## جدول ۲ - ویژگیهای مهندسی چند کامپوزیت

Code	$\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	$E_1$ (GPa)	$E_2$ (GPa)	$G_{12}$ (GPa)	$\nu_{12}$	$X_t$ (MPa)	$Y_t$ (MPa)	$S$ (MPa)	$X_c$ (MPa)	$Y_c$ (MPa)
1	2.1	39	8.6	3.8	0.28	1080	39	89	620	128
2	2	43	8.9	4.5	0.27	1280	49	69	690	158
3	2.2	29.7	29.7	5.3	0.17	367	367	97.1	549	549
4	1.38	87	5.5	2.2	0.34	1280	30	49	335	158
5	1.58	142	10.3	7.2	0.27	2280	57	71	1440	228
6	1.57	131	8.7	5	0.28	2060	78	157	1080	196
7	1.6	177	10.8	7.6	0.27	2860	49	83	1875	246
8	1.54	216	5	4.5	0.25	807	15	22	655	71
9	1.59	294	6.4	4.9	0.23	589	29.4	49.1	491	98.1
10	2.03	201	21.7	5.4	0.17	1380	56	62	1600	125
11	2.65	235	137	47	0.3	1373	118	128	1573	157
12	2.85	204	118	41	0.27	1462	86	113	2990	285

زاویه الیاف لایه‌ها و ضخامت آنها را نیز در بازه‌های زیر در نظر گرفته‌ایم.

$$(۲۱) \quad -90^\circ < \theta_p \leq 90^\circ; p = 1, 2, \dots, N$$

$$(۲۲) \quad t_{\min} \leq t_p \leq t_{\max}; p = 1, 2, \dots, N$$

نیز می‌خواهیم چندلایه تا  $R$  درصد بیش از بار آستانه شکست نخستین لایه مقاومت کند. در این صورت باید نابرابری

زیر برقرار باشد.

$$(۲۳) \quad LF > 1 + \frac{R}{100}$$



تابع ارزش (۲۰) تابعی از  $\theta_p$  ها،  $t_p$  ها و  $c_p$  ها است،  $p = 1, 2, \dots, N$ . که  $c_p$  نمایانگر کد مربوط به جنس لایه  $p$ ام است که از جدول (۲) انتخاب شده است.

## الگوریتم بهینه‌یابی

هدف از بهگزینی، یافتن کمینه فراگیر یا بیشینه فراگیر یک تابع مانند  $J = f(\mathbf{x})$  است، که در آن  $\mathbf{x}$  برداری از  $n$  شناسه طراحی است. روشن است که یافتن نقطه‌ای که تابع در آن نقطه کمینه فراگیر یا بیشینه فراگیر دارد نیز از هدفهای بهگزینی است. بررسی جداگانه پرسشهای کمینه‌یابی و پرسشهای بیشینه‌یابی کاری بیهوده است، زیرا با یافتن کمینه تابع  $f(\mathbf{x})$ ، بیشینه تابع  $f(\mathbf{x})$  به دست می‌آید، [۶ و ۷]. برای همین معمولاً همه روشهای بهگزینی را برای کمینه‌یابی بیان می‌کنند. اگر پرسش بهگزینی هیچ قیدی نداشته باشد، به آن پرسش بهگزینی نامقید می‌گوییم و اگر قید داشته باشد، به آن پرسش بهگزینی مقید می‌گوییم.

در این پژوهش تابعی که باید کمینه شود، تابع ارزش (۲۰) است، قیدها با نابرابریهای (۲۱) تا (۲۳) بیان شده‌اند، و بردار شناسه‌های طراحی به صورت زیر است.

$$\mathbf{x} = [\theta_1 \quad \theta_2 \quad \dots \quad \theta_N \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_N \quad c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_N]^T \quad (24)$$

گذشت زمان نشان داده که روشهایی برای پاسخهایی پرسشهای بهگزینی مهندسی کارآ هستند که به آنها روشهای جست‌وجو می‌گوییم. در روشهای جست‌وجو، تقریبهای دو گام پی‌درپی با برابری زیر به هم می‌پیوندند.

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k \quad (25)$$

در برخی از روشهای جست‌وجو، در یافتن  $\Delta \mathbf{x}^k$  تنها از اندازه‌های تابع یاری می‌گیریم، مانند جست‌وجوی بختی. به چنین روشهایی، جست‌وجوی مستقیم می‌گوییم. اگر در یافتن  $\Delta \mathbf{x}^k$  از گرادیان تابع هم یاری بگیریم، روش به‌کارگرفته را روش گرادیان می‌گوییم، مانند روش برویدن - فلیچر - گلدفارب - شانو (BFGS). در روشهای گرادیان  $\Delta \mathbf{x}^k$  این‌گونه است:

$$\Delta \mathbf{x}^k = s_k \mathbf{d}^k \quad (26)$$



$\mathbf{d}^k$  سوی جست‌وجو است، که می‌تواند یک‌ه هم نباشد.  $s_k$  اندازه‌ای از  $s$  است که تابع  $f(\mathbf{x}^k + s\mathbf{d}^k)$  را کمینه می‌کند. پس در هر گام، با شناخته بودن  $\mathbf{x}^k$  و  $\mathbf{d}^k$  باید در جست‌وجوی کمینه یک تابع یک متغیره باشیم. چنین جست‌وجویی را جست‌وجوی خطی می‌گوییم.

جست‌وجوی بختی ساده‌ترین روش بهگزینی است. در این روش، در هر گام، چند بردار بختی ایجاد می‌کنیم. سپس اندازه تابع را در هر کدام از این نقطه‌ها به دست می‌آوریم. نقاطی که قیدهای مسأله را می‌شکنند از مجموعه این نقطه‌ها حذف می‌کنیم. سپس، از روبرو کردن بهترین نقطه هر گام با بهترین نقطه گامهای دیگر، نقطه‌ای را که تابع در آن نقطه کوچکترین اندازه را دارد می‌یابیم، [۶].

در روشهای گرادیان، می‌خواهیم جست‌وجوی کمینه در هر گام، در بهترین سو انجام گیرد، اما روشن نیست که بهترین سوی جست‌وجو کدام است. گمان کنید در جست‌وجوی نقطه بهینه، در گام  $k$  ام نقطه  $\mathbf{x}^k$  را یافته باشیم. از گسترش تابع ارزش به سری تیلور گرد این نقطه و بریدن دنباله این رشته، برابری زیر به دست می‌آید.

$$f(\mathbf{x}) \cong \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k)^T \mathbf{H}(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + \mathbf{g}^T(\mathbf{x}^k)(\mathbf{x} - \mathbf{x}^k) + f(\mathbf{x}^k) \quad (27)$$

$\mathbf{g}$  گرادیان تابع  $f$  و  $\mathbf{H}$  ماتریس هسیان تابع  $f$  است:

$$g_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad i=1,2,\dots,n, \quad H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}; \quad i,j=1,2,\dots,n \quad (28)$$

نقطه  $\mathbf{x}^{k+1}$  از برابر صفر گذاشتن گرادیان تابع (۲۷) به دست می‌آید:

$$\nabla f(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^{k+1}} = \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^k)\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \quad (29)$$

این دستور را، برای انعطاف بیشتر، می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - s_k \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{x}^k)\mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \quad (30)$$

در برخی از روشها،  $\mathbf{H}$  را مستقیماً محاسبه می‌کنند. برآورد عددی  $\mathbf{H}$  محاسبات بسیار حجیمی می‌خواهد. در برخی دیگر از روشها، به یاری بررسی  $f(\mathbf{x})$  و  $\nabla f(\mathbf{x})$ ، از این روند دوری می‌کنند. برای این کار روشهای گوناگونی برای به‌هنگام کردن  $\mathbf{H}$  ساخته‌اند.



دستوری را که برویدن، فلیچر، گلدفارب و شانو پیشنهاد کرده‌اند، کارآمدترین روش برای کمینه‌یابی فراگیر است. این دستور، که آن را به نام BFGS نیز می‌شناسند، به صورت زیر است، [۶].

$$\mathbf{H}^{k+1} = \mathbf{H}^k + \frac{\mathbf{q}^k [\mathbf{q}^k]^T}{[\mathbf{q}^k]^T \Delta \mathbf{x}^k} - \frac{[\mathbf{H}^k]^T [\Delta \mathbf{x}^k]^T \Delta \mathbf{x}^k \mathbf{H}^k}{[\Delta \mathbf{x}^k]^T \mathbf{H}^k \Delta \mathbf{x}^k}; \quad \mathbf{q}^k = \nabla f(\mathbf{x}^{k+1}) - \nabla f(\mathbf{x}^k) \quad (31)$$

برای نقطه آغاز، به جای  $\mathbf{H}^0$  می‌توان هر ماتریس متقارن معین مثبتی، مانند ماتریس یکانی، را جایگزین کرد. در روند پیشروی برای کمینه‌یابی، پیرایشهای دیگری جز اینها نیز می‌توان انجام داد. برای نمونه، در یافتن  $s_k$  با جست‌وجوی خطی، دستیابی به همگرایی پایانی لازم نیست، [۶ و ۷].

### نتایج شبیه‌سازی کامپیوتری

برای نشان دادن کارایی روش بیان‌شده، یک ۴ لایه ارتوتروپیک، که هرکدام از لایه‌های آن را می‌توان از مواد جدول (۱) انتخاب کرد، در نظر بگیرید. فرض کنید این لامینت تحت بارگذاری زیر قرار دارد.

$$\begin{aligned} N_x &= 1000 \text{ N/mm} & M_x &= 250 \text{ N.mm/mm} \\ N_y &= 200 \text{ N/mm} & M_y &= 0 \\ N_{xy} &= 0 & M_{xy} &= 0 \end{aligned}$$

نیز فرض کنید

$$\begin{aligned} t_{\min} &= 0.125 \text{ mm} \\ t_{\max} &= 5 \text{ mm} \\ R &= 20 \end{aligned}$$

باشد. با چنین مشخصاتی چیدمان ۴ لایه را به یاری روش کمینه‌یابی BFGS به دست آورده‌ایم. این روش با ۹۰۶ تکرار، پاسخی را که در جدول (۳) گردآورده‌ایم، به دست آورده است.

جدول ۳ - پاسخ به دست آمده به روش پیشنهادی

$p$	Material	$t$ (mm)	$\theta$ (degree)
1	Silicon carbide/aluminum(SCS2/6061 Al)	1.319	0
2	E-glass/epoxy	0.125	-45
3	E-glass/epoxy	0.125	-45
4	Boron/aluminum(B4/6061 Al)	1.129	0



در این نقطه، اندازه تابع ارزش (۲۰)

$$J = 7.276$$

است. برای مقایسه روش پیشنهادی با روشهای آزمون و خطا، پاسخیابی این مسأله را به یاری جستوجوی بختی (Random Search) هم آزموده‌ایم، [۶]. این جستوجو با ۱۰۰۰ بار تکرار به پاسخی که در جدول (۴) گردآورده‌ایم، رسیده است.

جدول ۴ - پاسخ به دست آمده با جستوجوی بختی

$p$	Material	$t$ (mm)	$\theta$ (degree)
1	Carbon/PEEK(AS4/APC2)	1.422	-5
2	Graphite/epoxy(GY-70/934)	0.862	15
3	Carbon/polyimide(Mod I/WRD9371)	1.703	-15
4	Carbon/epoxy(IM6/SC1081)	0.903	-90

در این نقطه، اندازه تابع ارزش (۲۰)

$$J = 7.671$$

است. همانگونه که می‌بینید، این جستوجو نتوانسته است پاسخ روش پیشنهادی را بیابد. با توجه به پاسخهای به دست آمده، ضخامت لامینت به روش پیشنهادی 2.968 میلیمتر، و به روش جستوجوی بختی 4.890 میلیمتر به دست آمده است.

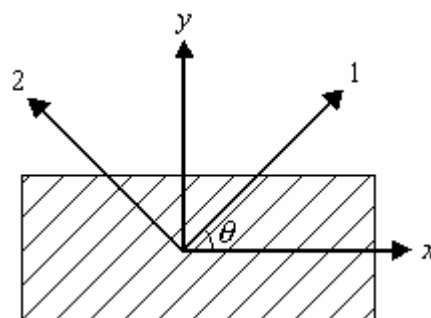
## نتیجه‌گیری

همانگونه که دیدید، برای به‌گزینی چیدمان لایه‌های مواد مرکب تحت بارگذاری استاتیکی فراگیر روشی را پیشنهاد کردیم که در آن از یک روش به‌گزینی ریاضی استفاده می‌شود. با به کار بردن چنین روشی دیگر برای یافتن چیدمان لایه‌های مواد مرکب، نیاز به آزمون و خطاهای فراوان نیست. نیز پاسخی که از روش پیشنهادی به دست می‌آید از پاسخی که به روش آزمون و خطا به دست می‌آید شایسته‌تر است. افزون بر آن، گسترش این روش برای هر مسأله‌ای از این دست، آسان است.

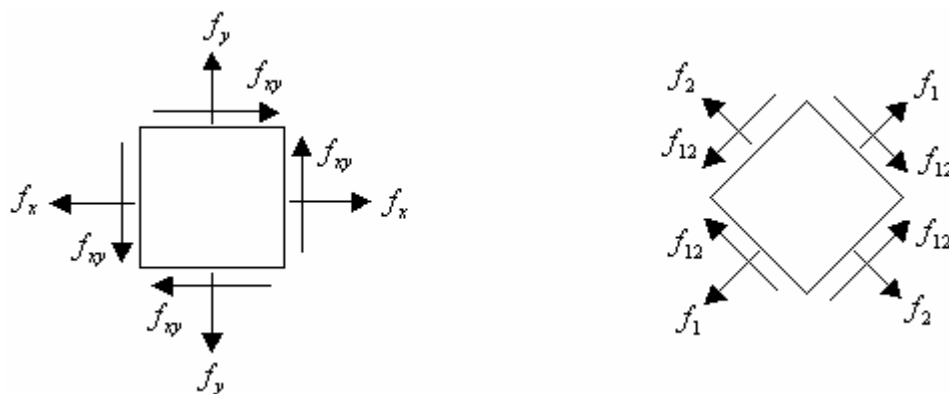


## مراجع

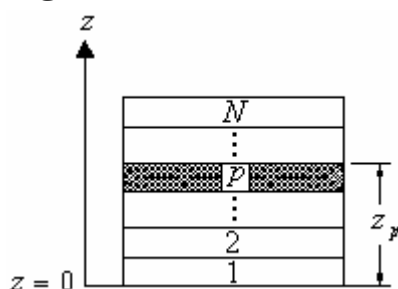
1. Daniel I.M., and Ori I., *Engineering Mechanics of Composite Materials*, Oxford University, Oxford, 1994.
2. Jones, R.M., *Mechanics of Composite Materials*, Hemisphere, New York, 1975.
3. Iyengar N.G.R., and Gupta S.K., *Structural Design Optimization*, Indian Institute of Technology, Kanpur, 1997.
4. Soremekun, G., Gürdal Z., Haftka, R.T., and Watson, L.T., "Improving Genetic Algorithm Efficiency and Reliability In the Design and Optimization of Composite Structures", *Virginia Polytechnic Institute and State University, Blacksburg, Virginia*, October 1996.
5. Health & Safety Executive, *Composite Materials for Offshore Use*, Offshore Technology Report – OTO 69 901, UK, August 1996.
۶. مسافر، مهدی، شگردهای عددی در پاسخ‌یابی پرسشهای مهندسی با برنامه‌ریزی متلب، چاپ دوم، انتشارات متفکران، ۱۳۸۴.
۷. باندای، بریان، روشهای بهگزینی *Basic*، برگردان میرنیا، میرکمال، و موسوی، میررحیم، انتشارات میقات، ۱۳۶۶.



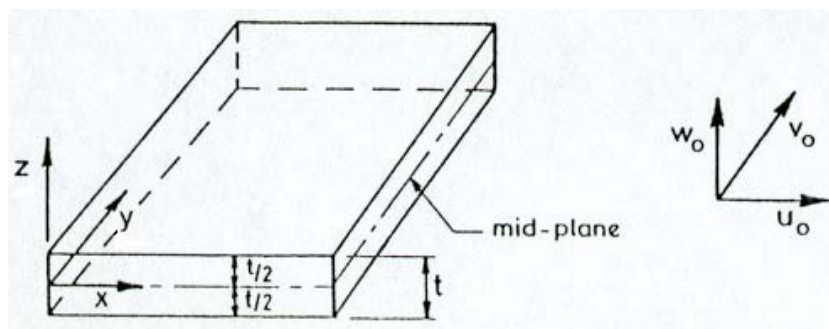
شکل ۱ - دستگاههای مختصات نشسته بر یک تک‌لایه ارتوتروپیک



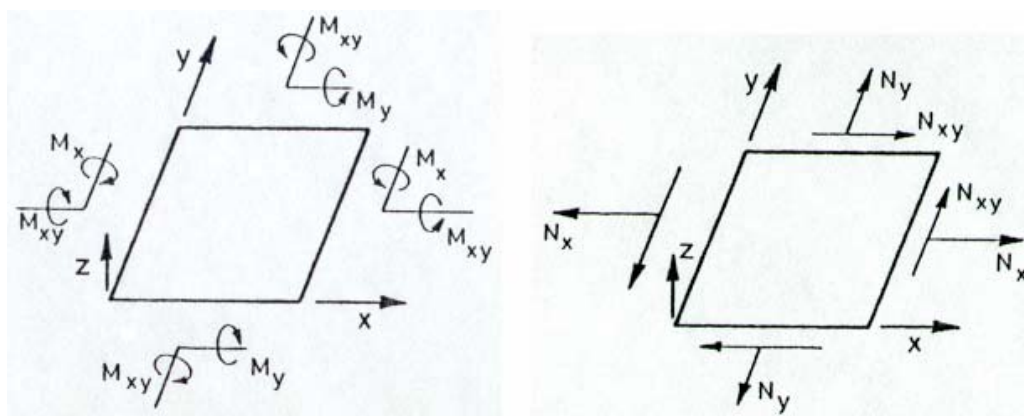
شکل ۲ - تنشهای نشست بر المانهایی از ماده



شکل ۳ - مقطع یک لایه \$N\$ همراه با محور نشست بر ضخامت آن



شکل ۴ - موقعیت صفحه میانی یک لامینت



شکل ۵ - قراردادهای مربوط به نیروها و گشتاورهای وارد بر واحد طول یک لامینت