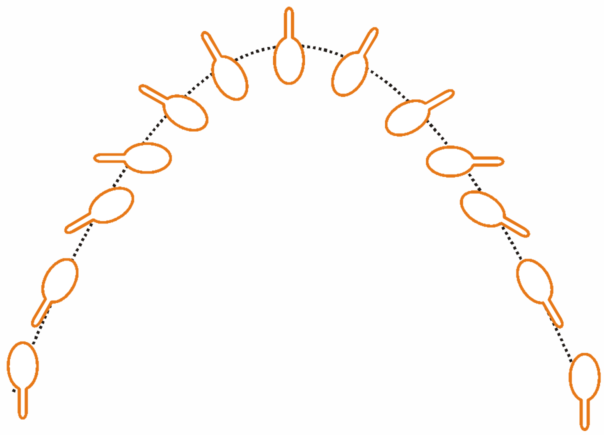
مرکز جرم

تاکنون اجسام را به صورت ذرات جرم‌دار بدون بعد فرض کردیم. در حرکت انتقالی، جابجایی تمام نقاط جسم در طول زمان یکسان است، به گونه‌ای که حرکت یک ذره نشاندهنده حرکت کل جسم است. امّا حتی وقتی که جسم در حین حرکت انتقالی دوران یا ارتعاش می‌کند، نقطه‌ای به نام مرکز جرم در آن وجود دارد که حرکت آن مانند حرکت تک ذره‌ای است که تحت تأثیر همان نیروهای خارجی قرار دارد. شکل (A) حرکت سهمی ساده مرکز جرم یک میل ورزشی را که بازیگری آن را به طرف بازیگر دیگر پرتاب کرده است، نشان می‌دهد. هیچ نقطه دیگری از میل ورزشی چنین حرکت ساده‌ای ندارد. توجه کنید که اگر این میل ورزشی فقط حرکت انتقالی داشته باشد جابجایی هر نقطه از آن مانند جابجایی مرکز جرم در شکل (A) خواهد بود. به همین دلیل حرکت مرکز جرم یک جسم را حرکت انتقالی آن می‌نامند.

هرگاه دستگاه مورد نظر ما صلب نباشد، می‌توان برای آن مرکز جرمی (که حرکت آن نیز بطور نسبتاً ساده قابل توصیف است) در نظر گرفت، حتی اگر موضع ذرات تشکیل دهنده دستگاه نسبت به یکدیگر بطور نسبتاً پیچیده تغییر کند. در این بخش مرکز جرم را تعریف می‌کنیم و چگونگی محاسبه آن را نشان می‌دهیم. ابتدا حالت ساده یک دستگاه شامل دو ذره m_2, m_1 را در نظر می‌گیریم که فاصله آنها از مبدأ O به ترتیب برابر x_2, x_1 است. نقطه C را به عنوان مرکز جرم این دستگاه انتخاب می‌کنیم. x_{cm}، فاصله این نقطه از مبدأ O را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$



شکل (A) یک میل ورزشی توسط بازیگری به طرف بازیگر دیگر پرتاب شده است. چنانکه دیده می‌شود، با اینکه این میل حرکت دورانی دارد و به دور محور خودش می‌چرخد، امّا روی محور آن نقطه‌ای به نام مرکز جرم وجود دارد که یک مسیر سهمی شکل ساده را طی می‌کند.

خواص این نقطه (شکل B) این است که حاصلضرب جرم کل دستگاه M (مساوی بـا m_1+m_2) در فاصله این نقطه از مبدأ برابر است با مجموع حاصلضربهای جرم هر ذره در فاصله‌اش از مبدأ، یعنی

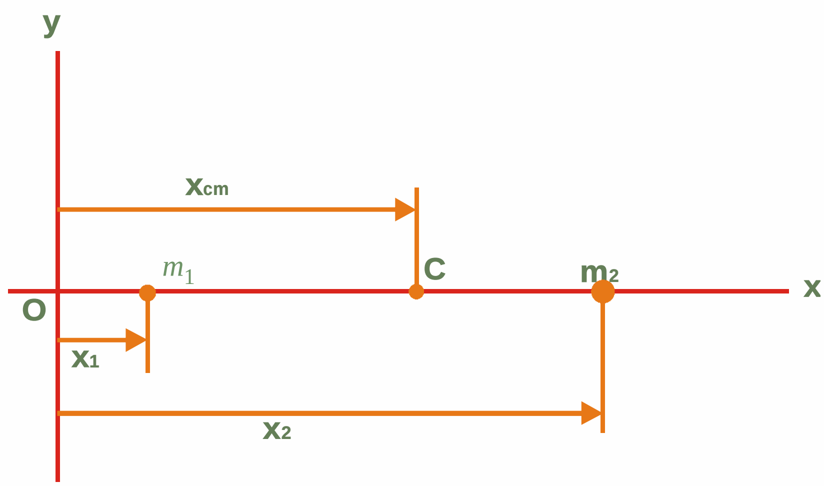
$$(m_1+m_2)x_{cm}=Mx_{cm}=m_1x_1+m_2x_2$$

در معادله (1)، x_{cm} را می‌توان به عنوان میانگین وزنی جرم x_2, x_1 در نظر گرفت.

با ذکر یک مقایسه سعی می‌کنیم این مطلب را بیشتر توضیح دهیم. فرض کنید دو جعبه میخ بـه ما داده شده است. در یکی از جعبه‌ها n_1 میخ که طول هر کدام l_1 و در جعبه دیگر n_2 میخ که طول هر کدام l_2 است وجود دارد. از مـا خواســته شــده اســت کــه میــانگین طــول میخهــا را بدســت آوریــم. اگر $n_1=n_2$، میانگین طول برابر است با $(l_1+l_2)/2$. امّا اگر $n_1 \neq n_2$، تعداد میخهای مربــوط بــه یــک طول از تعداد میخهای طول دیگر بیشتر است و باید یک ضریب «وزنی» برای هر طول در نظــر بگیــریم. برای l_1 این ضریب برابر $n_1/(n_1+n_2)$ و برای l_2 برابر $n_2/(n_1+n_2)$ است. پس میــانگین طــول برابــر است با

$$l = \left(\frac{n_1}{n_1+n_2}\right)l_1 + \left(\frac{n_2}{n_1+n_2}\right)l_2$$

$$l = \frac{n_1 l_1 + n_2 l_2}{n_1+n_2}$$



شکل (B) مرکز جرم دو جرم m_1 و m_2 در نقطه C روی خط و اصل m_1 و m_2. فاصله این نقطه از مبدأ برابر x_{cm} است.

بنابراین، مرکز جرم آنطور که در معادله (1) تعریف شده است یک میـانگین جابجـایی اسـت کـه در آن ضریب «وزنی» برای هر ذره برابر است با نسبت جرم آن ذره به جرم کل دستگاه.

اگر n ذره به جرمهای $m_1, m_2, \ldots, m_n$ در روی یک خط راست داشته باشیم، بنا به تعریف، مرکـز جرم این ذرات نسبت به یک مبدأ دلخواه از رابطه زیر بدست می‌آید

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} \qquad (2)$$

که در آن $x_1, x_2, ..., x_n$ فاصله هر جرم از مبدأ است که x_{cm} نسبت بـه آن انـدازه‌گیـری شـده اسـت.

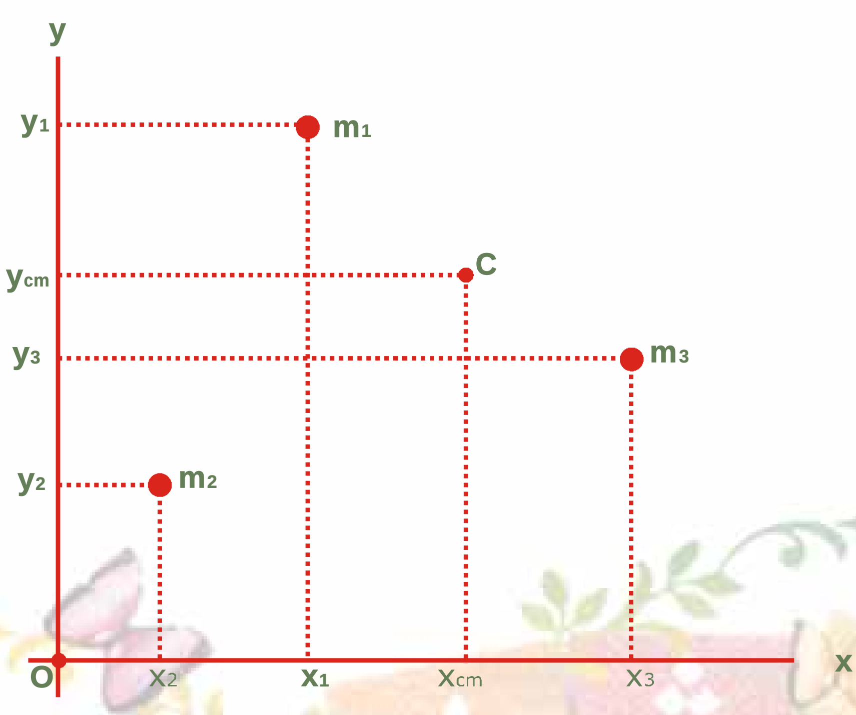
نماد $\sum$ نشاندهنده عمل جمع است، که در این مورد روی n ذره انجام می‌شود. مجموع زیر برابر جـرم کل دستگاه است.

$$\sum m_i = M$$

بنابراین، معادله (2) را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$Mx_{cm} = \sum m_i x_i \qquad \text{(2 الف)}$$

حال فرض کنید سه ذره داریم که بر روی یک خط راست نیستند و مطابق شکل (D) در یک صفحه قرار دارند.



شکل (D) مرکز جرم سه جرم m_1, m_2 ، و m_3 در نقطه C قرار دارد و مختصات آن x_{cm} ، y_{cm} است. نقطه C در صفحه مثلثی که از این سه جرم تشکیل می‌شود واقع است.

مرکز جرم C با مختصات x_{cm}, y_{cm} تعریف می‌شود که از روابط زیر بدست می‌آیند

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3} \quad (3)$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

که در آنها x_1, y_1 مختصات ذره با جرم m_1, x_2 و y_2 مختصات ذره با جرم m_2, x_3 و y_3 مختصات ذره با جرم m_3 هستند. مختصات x_{cm}, y_{cm} مرکز جرم نسبت به همان مبدأ اختیاری اندازه‌گیری می‌شود.

مرکز جرم تعداد زیادی ذره که در یک صفحه قرار دارند در نقطه x_{cm}, y_{cm} واقع است و از روابط زیر بدست می‌آید

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i \qquad \text{و} \qquad y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{1}{M}\sum m_i y_i \quad (4)$$

که در آنها M (مساوی با $\sum m_i$) جرم کل دستگاه است.

مرکز جرم تعداد زیادی ذره که الزاماً در یک صفحه نیستند بلکه در فضا توزیع شده‌اند، در نقطه‌ای به مختصات x_{cm}, y_{cm} و z_{cm} قرار دارد و از روابط زیر بدست می‌آید

$$x_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i x_i \qquad \text{و} \qquad y_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i y_i \qquad \text{و} \qquad z_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i z_i \quad (\text{الف}\ 5)$$

با استفاده از نمادگذاری برداری، هر یک از ذرات دستگاه را می‌توان با بردار مکان r_i و محل مرکز جرم را می‌توان با بردار مکان r_{cm} در یک چارچوب مرجع خاص مشخص کرد. ارتباط این بردارها با x_i, y_i و z_i و همچنین با x_{cm}, y_{cm} و z_{cm}، که در معادله (5 الف) آمده‌اند به صورت زیر است

$$r_i = ix_i + jy_i + kz_i$$

و

$$r_{cm} = ix_{cm} + jy_{cm} + kz_{cm}$$

از این رو، به جای سه معادله نرده‌ای (5 الف) می‌توان تک معادله برداری زیر را قرار داد

$$r_{cm} = \frac{1}{M}\sum m_i r_i \qquad (5\text{ ب})$$

که در آن عمل جمع به صورت جمع برداری انجام می‌شود. شما می‌توانید با قرار دادن روابط مربوط به r_{cm}, r_i در معادلات بالا، صحت معادله (5 ب) را تحقیق کنید. توجه کنید که استفاده از بردارها چگونه معادلات را مختصر و کوتاه می‌کند. معادله (5 ب) نشان می‌دهد که اگر مبدأ چارچوب مرجع در مرکز جرم باشد (یعنی $r_{cm} = 0$)، در آن صورت برای این دستگاه خواهیم داشت.

$$\sum m_i r_i = 0$$

معادلات (5) نشاندهنده کلی‌ترین حالت برای یک مجموعه از ذرات است و معادلات 1 تا 4 حالتهای خاصی از این معادلات است. محل مرکز جرم مستقل از چارچوب مرجعی است که برای تعیین آن به کار رفته است. مرکز جرم دستگاهی از ذرات فقط به جرم ذرات و موضع آنها نسبت به یکدیگر بستگی دارد.

هر جسم صلب، مثلاً یک خط‌کش، را می‌توان به عنوان دستگاهی از ذرات نزدیک به هم در نظر گرفت. در نتیجه خط‌کش نیز مرکز جرم دارد. در اینجا تعداد ذرات (مثلاً اتمها) در جسم آنقدر زیاد و فاصله آنها آنقدر کم است که می‌توان توزیع جرم در این جسم را پیوسته فرض کرد. برای بدست آوردن رابطه مربوط به مرکز جرم یک جسم پیوسته، آن را به n عنصر کوچک با جرم Δm_i که تقریباً در

نقاط x_i, y_i و z_i قرار دارند تقسیم می‌کنیم. بنابراین، مختصات مرکز جرم تقریباً از روابـط زیـر بدسـت می‌آید.

$$z_{cm}=\frac{\sum \Delta m_i z_i}{\sum \Delta m_i} \quad \text{و} \quad y_{cm}=\frac{\sum \Delta m_i y_i}{\sum \Delta m_i} \quad \text{و} \quad x_{cm}=\frac{\sum \Delta m_i x_i}{\sum \Delta m_i}$$

اکنون عنصرهای جرمی یاد شده را به عنصرهای کوچکتری تقسیم می‌کنیم بگونه‌ای که n، تعداد عنصرها، به سمت بینهایت میل کند. هر چه n بیشتر شود، نقاط x_i, y_i و z_i محل عنصرهای جـرم را بـا دقت بیشتری مشخص می‌کنند و وقتی n بینهایت شود، محل آنها دقیقاً تعیـین خواهـد شـد. بـه ایـن ترتیب جسم پیوسته را به بینهایت عنصر جرمی بینهایت کوچک تقسیم می‌کنیم. اکنون مختصات مرکـز جرم را می‌توانیم دقیقاً به صورت زیر تعیین کنیم.

$$x_{cm}=\lim_{Dm_i \to 0}\frac{\sum Dm_i x_i}{\sum Dm_i}=\frac{\int x dm}{\int dm}=\frac{1}{M}\int x dm xxx$$

$$y_{cm}=\lim_{Dm_i \to 0}\frac{\sum Dm_i y_i}{\sum Dm_i}=\frac{\int y dm}{\int dm}=\frac{1}{M}\int y dm \qquad (\text{6 الف})$$

$$z_{cm}=\lim_{Dm_i \to 0}\frac{\sum Dm_i z_i}{\sum Dm_i}=\frac{\int z dm}{\int dm}=\frac{1}{M}\int z dm$$

در این روابط dm عنصر دیفرانسیلی جرم در نقطه x, y و z است و $\int dm$ برابر است با M، کـه در آن M جرم کل جسم است. برای یک جسم پیوسته، عمل انتگرال‌گیری در معادله (6 الف) جانـشین عمل جمع در معادله (5 الف) می‌شود.

رابطه برداری هم‌ارز با سه رابطه نرده‌ای (6 الف)، عبارت است از

$$r_{cm}=\frac{1}{M}\int r \ dm \qquad (\text{6 ب})$$

مانند قبل، عمل جمع در معادله (5 ب) به عمل انتگرال‌گیری تبدیل می‌شود. بار دیگر نتیجه می‌گیریم که اگر مبدأ چارچوب مرجع در مرکز جرم باشد (یعنی اگر $r_{cm} = \mathbf{0}$) در آن صورت برای جسم داریم $\int rdm = \mathbf{0}$. این انتگرال و مجموع متناظر آن $\sum m_i r_i$ در معادله (5 ب) را گشتاور اول جرم دستگاه می‌نامند.

اغلب با اجسام همگنی سر و کار داریم که یک نقطه، یک خط، یا یک صفحه تقارن دارند. در این صورت، مرکز جرم روی نقطه، خط، یا صفحه تقارن واقع است. مثلاً، مرکز جرم یک کره همگن (که یک نقطه تقارن دارد) در مرکز کره است، مرکز جرم یک مخروط (که یک خط تقارن دارد) روی محور مخروط واقع است و بر همین قیاس. می‌توان فهمید که علت این موضوع آن است که، به دلیل تقارن، گشتاور اول جرم (یعنی $\int rdm$) در مرکز یک کره یا در نقطه‌ای روی محور مخروط و مانند آن، صفر است. از معادله (6 ب) نتیجه می‌گیریم که برای چنین نقاطی $r_{cm} = \mathbf{0}$، یعنی مرکز جرم در این نقاط واقع است.

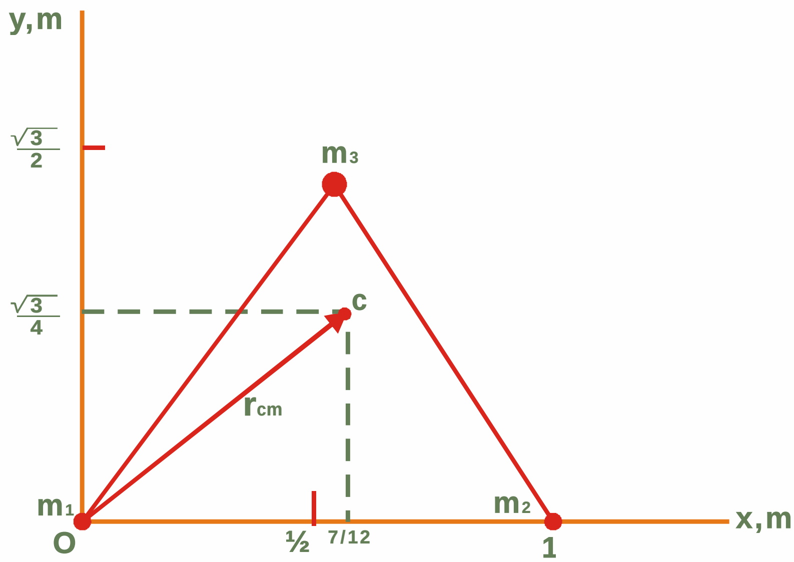
مثال 1. مرکز جرم سه ذره به جرمهای $m_1 = 1kg$, $m_2 = 2kg$ و $m_3 = 3kg$ را که در سه رأس یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع $1m$ قرار دارند، تعیین کنید.

محور x را در راستای یکی از اضلاع مثلث مطابق شکل (E) انتخاب می‌کنیم. توجه کنید که عرض m_3، یعنی فاصله آن در روی محور y برابر $\frac{\sqrt{3}}{2}m$ است. بنابراین

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{(1kg)(0)+(2kg)(1m)+(3kg)(1/2m)}{(1+2+3)kg} = \frac{7}{12}m$$

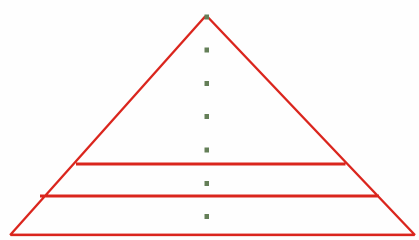
$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i} = \frac{(1kg)(0)+(2kg)(0)+(3kg)(\sqrt{3}/2m)}{(1+2+3)kg} = \frac{\sqrt{3}}{4}m$$

مرکز جرم C، در شکل دیده می‌شود. چرا این نقطه در مرکز هندسی مثلث واقع نیست؟



شکل (E) مثال1. تعیین مرکز جرم (C) سه جرم نامساوی که یک مثلث متساوی الاضلاع تشکیل می‌دهند.

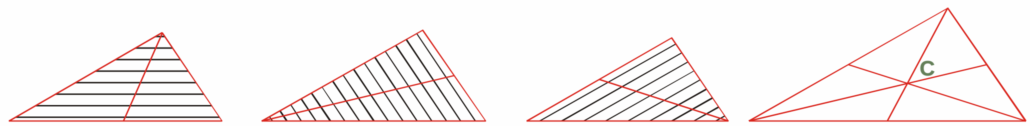
مثال2. مرکز جرم صفحه مثلثی شکل (F) را پیدا کنید.



اگر بتوان جسمی را به چند جزء طوری تقسیم کرد که مرکز جرم هر جزء معلـوم باشـد، معمـولاً می‌توان مرکز جرم جسم را به راحتی پیدا کرد. صفحه مثلثی را می‌توان به نوارهای باریک موازی با یکی از ضلعها تقسیم کرد. مرکز جرم هر نوار روی خطی قرار دارد که وسط آن ضلع را به رأس مقابلش وصـل می‌کند. با تکرار این کار برای هر یک از سه ضلع می‌توان مثلث را از سـه راه مختلـف تقسـیم کـرد. در

نتیجه مرکز جرم در محل تلاقی سه خطی خواهد بود که وسط هر ضلع را به رأس مقابلش وصل می‌کنـد.

این نقطه، تنها نقطه‌ای است که در هر سه خط مشترک است.



شکل (F) مثال2. تعیین مرکز جرم (C) یک صفحه مثلثی شکل