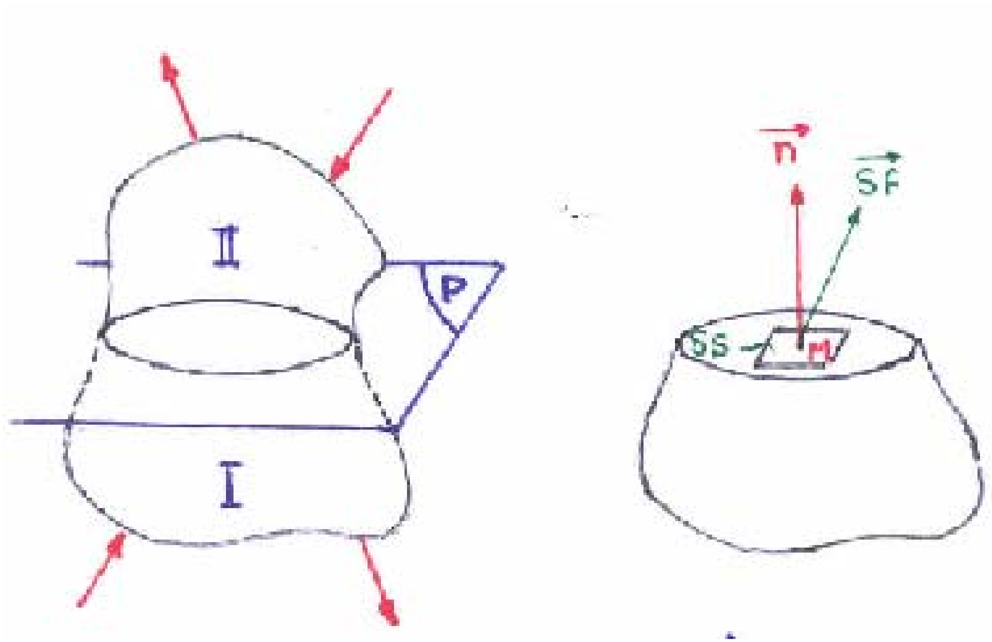
مکانیک محیطهای پیوسته

- تعریف تنش: تنش برای یک جسم مفهومی مجازی دارد
- در صورتی که بر جامد نامشخص نیروهای خارجی وارد شوند این جامد را به وسیله یک صفحه مجازی قطع می کنیم.

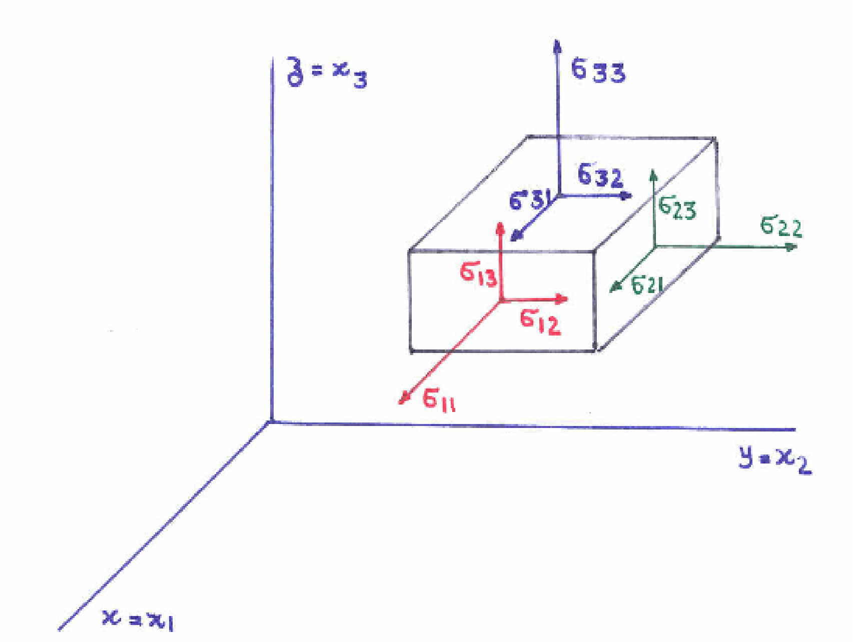


بردار تنش $\vec{\sigma} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\vec{\Delta F}}{\Delta S}$ ويا $\vec{F} = \frac{\vec{\delta F}}{\delta S}$

$$\vec{F} \begin{cases} \sigma_n & \text{تنش قايم} \\ \sigma_t & \text{تنش مماسی} \end{cases}$$

مفهوم تنش در فضا

نظريه مربوطه نشان مي دهد كه براي تعيين، تنشهاي وارد بر تمامي جزء سطوح مختلف گذرا از نقطه M كافيست كه در نقطه A مكعبي درنظر بگيريم و ببينيم بر كليه سطوح آن چه نيروهايي و بالطبع چه تنشهايي وارد مي شود



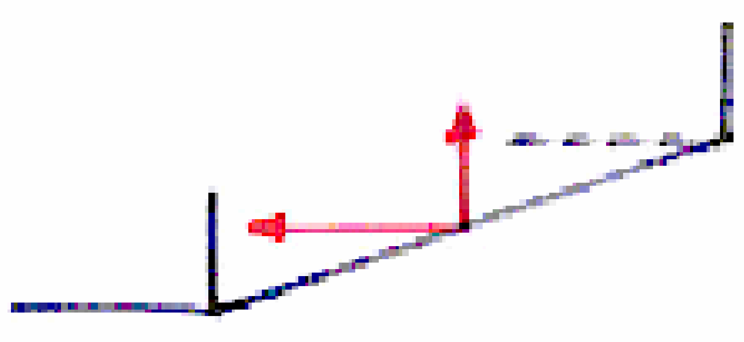
تانسور تنش

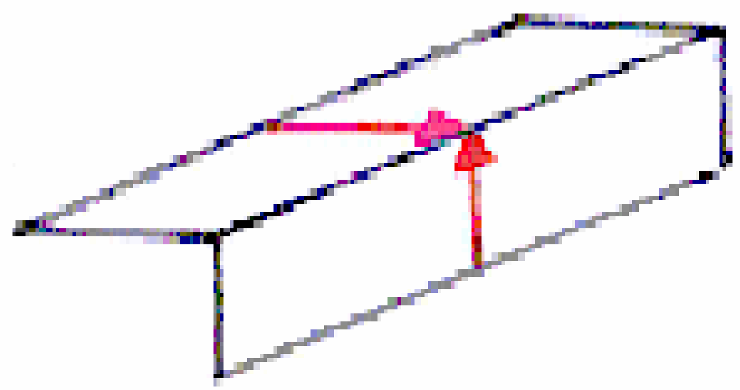
تاکنون به تعریف تنش ومفهوم کلی آن وتعریف مؤلفه های تنش برروی یک مکعب در فضا پرداختیم، اکنون به تعریف تانسور تنش به صورت زیر می پردازیم

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

تنش برشي در دو صفحه بي نهايت كوچك عمود بر يك يال مشترك برابرند (قضيه كوشي)

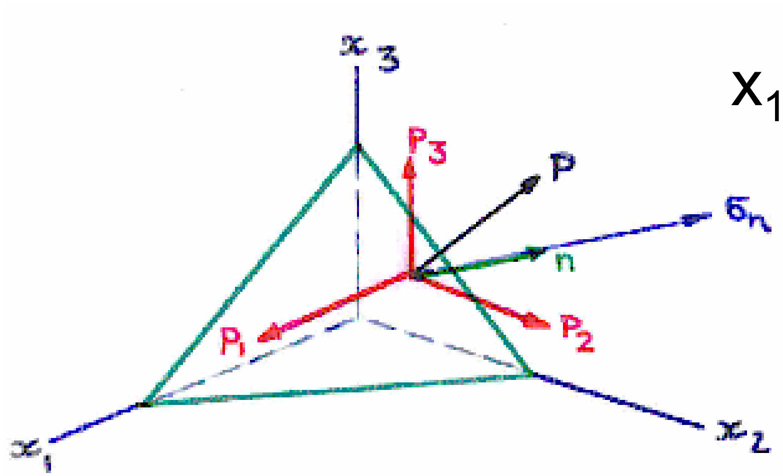
اين تنشهاي برشي يا از فصل مشترك دور مي شوند و يا به هم نزديك مي شوند





تعريف تنشهاي اصلي و صفحه هاي اصلي

اگر تانسور تنس را به این صورت تعریف نماییم: $\sigma_{ij} = \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij} + S_{ij}$



سطح sدر مختصات فضایی x_1,x_2,x_3

$$P_i = \sigma_{ij} n_j s$$

$$|\vec{\sigma}| = \frac{\sqrt{P_1^2 + P_2^2 + P_3^2}}{s}$$

$$\sigma_n = \frac{P_i n_i}{s} = \sigma_{ij} n_i n_j$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_n^2 + |\vec{\sigma}|^2$$

اگر $(S=1)$ ←

(1)

$$
\begin{cases}
P_1 = \sigma_{1j} n_j = \sigma_{11} n_1 + \sigma_{12} n_2 + \sigma_{13} n_3 \\
P_2 = \sigma_{2j} n_j = \sigma_{21} n_1 + \sigma_{22} n_2 + \sigma_{23} n_3 \\
P_3 = \sigma_{3j} n_j = \sigma_{31} n_1 + \sigma_{32} n_2 + \sigma_{33} n_3
\end{cases}
$$

در صورتيكه بر روي سطح فقط تنش عمودي σ_n را داشته باشيم، مولفه هاي P_1، P_2 ، P_3 در موقعيت تصاوير σ_n بر روي محورهاي مختصات خواهند بود

(2)

$$\begin{cases} P_1 = \sigma_n \cdot n_1 \\ P_2 = \sigma_n \cdot n_2 \\ P_3 = \sigma_n \cdot n_3 \end{cases}$$

$$(1) \ \& \ (2) \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

یکی از پاسخها $n_1=n_2=n_3=0$ است که بی معناست چون $n_1^2+n_2^2+n_3^2=1$

لذا باید دترمینان ماتریس
ضرایب مساوی صفر باشد

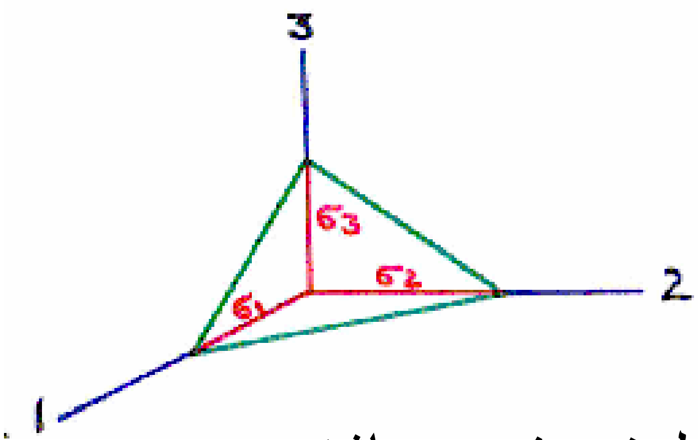
$$\mathrm{Det}\begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

واین درحقیقت همان معادله مشخصه یک ماتریس است و یا به عبارت دیگر بردار

$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix}$ بردار ویژه تانسور تنش می باشد

$$\underline{\sigma_n^3} - (\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33})\,\underline{\sigma_n^2} + (\sigma_{11}\sigma_{22}+\sigma_{22}\sigma_{33}+\sigma_{33}\sigma_{11}-\sigma_{12}^2-\sigma_{23}^2-\sigma_{31}^2)\,\underline{\sigma_n} - (\sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33}+2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13}-\sigma_{11}\sigma_{23}^2-\sigma_{22}\sigma_{31}^2-\sigma_{33}\sigma_{12}^2)=0$$

حل این معادله برای σ_n مقادیر خاص $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ را به ما خواهد داد که
تنشهای اصلی ما خواهند بود



به ازاء هر تنش اصلی یک بردار خاص وجوددارد صفحه ای که از دو بردار خاص تشکیل گردد را صفحه اصلی می نامند

و اما در معادله ارائه شده، سه پارامتر ذیل قابل تعریف مي باشند:

1) $J_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \mathrm{Trace}[\sigma] = \text{اثر}[\sigma]$

2) $J_2 = \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{31}^2$ مجموع دترمینان کوفاکتورهاي قطر اصلي تانسور تنش

3) $J_3 = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{31} - \sigma_{11}\sigma_{23}^2 - \sigma_{22}\sigma_{31}^2 - \sigma_{33}\sigma_{12}^2 = \det[\sigma]$

$$\boxed{\sigma_n^3 - J_1\sigma_n^2 + J_2\sigma_n - J_3 = 0}$$

مقادير $\mathbf{J_1}$ ، $\mathbf{J_2}$، $\mathbf{J_3}$ مستقل از دستگاه محورهاي مختصات بوده و به تغيير ناپذيرهاي تانسور تنش موسومند

مثال : مطلوبست تعيين تنش‌هاي اصلي وقتي كه داشته باشيم:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 112 & 120 & 0 \\ 120 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & 80 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} 112-\sigma_n & 120 & 0 \\ 120 & -100-\sigma_n & 0 \\ 0 & 0 & 80-\sigma_n \end{bmatrix} = 0$$

$$(80-\sigma_n)\left[(-100-\sigma_n)(112-\sigma_n)-(120)(120)\right]=0$$

$$(\sigma_n-80)(\sigma_n^2-12\sigma_n-25600)=0$$

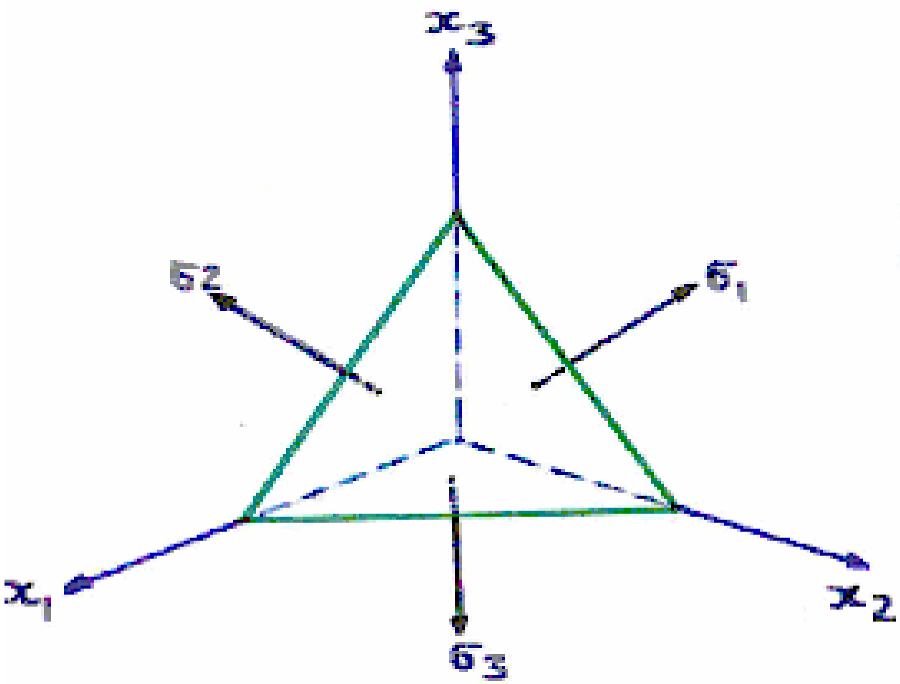
$$\sigma_n = 80 \qquad \sigma_n = \frac{6 \pm \sqrt{25636}}{1} = \begin{cases} 166 \\ -154 \end{cases}$$

$$\sigma_1 = +166_{\frac{kn}{m^2}} \qquad \sigma_2 = 80_{\frac{kn}{m^2}} \qquad \sigma_3 = -154_{\frac{kn}{m^2}}$$

لذا تانسور تنش‌هاي اصلي عبارت است از :

$$\begin{bmatrix} 166 & 0 & 0 \\ 0 & 80 & 0 \\ 0 & 0 & -154 \end{bmatrix}$$

دوایر موهر



$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_n^2$$

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

اگر n_1 ، n_2 و n_3 را به عنوان مجهولات در نظر بگیریم، خواهیم داشت

$$\left\{\begin{array}{l} n_1^2 = \dfrac{\sigma_t^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)} \geqslant 0 \\[2em] n_2^2 = \dfrac{\sigma_t^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} \geqslant 0 \\[2em] n_3^2 = \dfrac{\sigma_t^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} \geqslant 0 \end{array}\right.$$

در صورتیکه فرض کنیم $\sigma_1 \succ \sigma_2 \succ \sigma_3$ باشد ، خواهیم داشت:

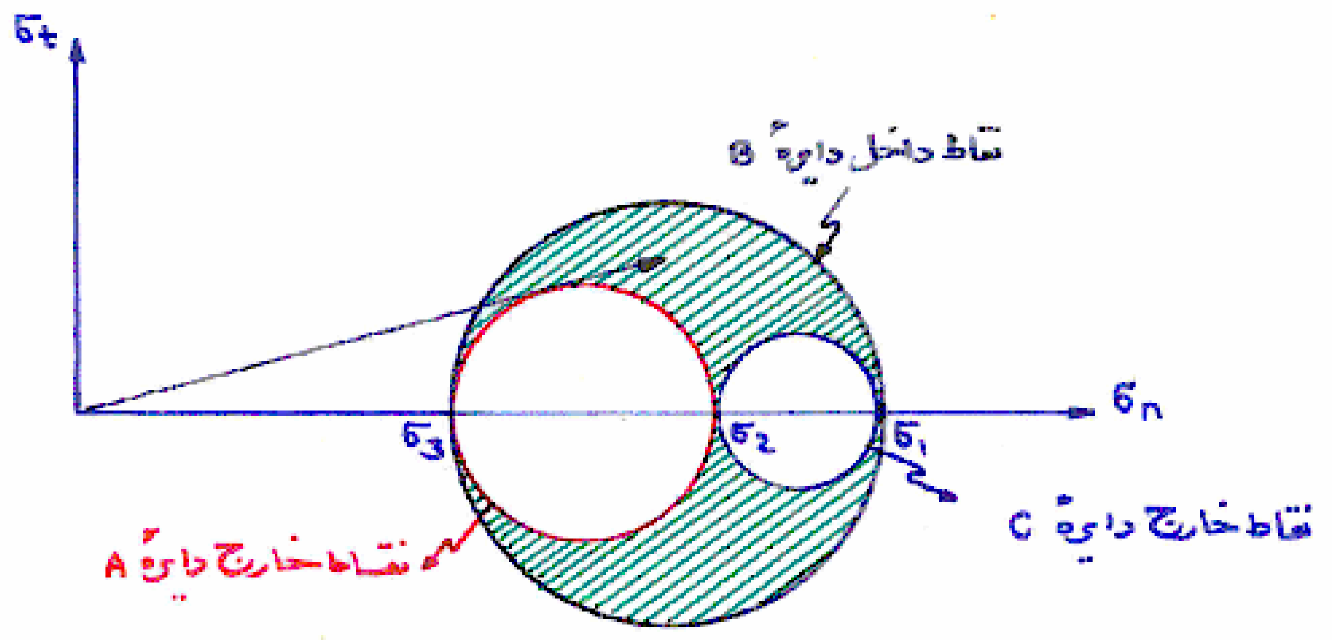
$$\sigma_t^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geqslant 0$$

دایره A

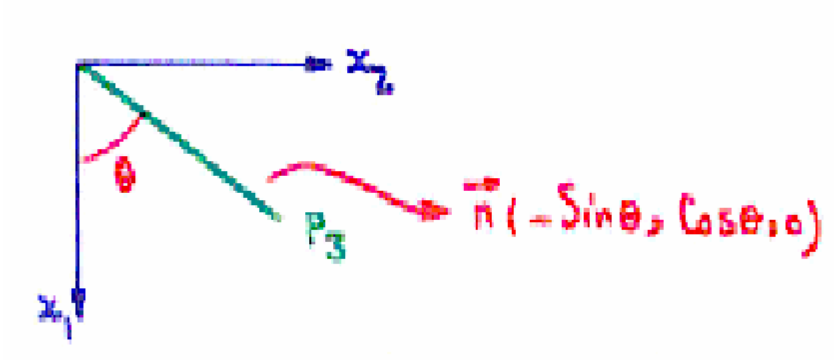
جراکه $\sigma_t^2+\sigma_n^2-(\sigma_2+\sigma_3)\sigma_n+\sigma_2\sigma_3=0$ معادله يك دايره است

دایرهB $\quad \sigma_t^2+(\sigma_n-\sigma_3)(\sigma_n-\sigma_1)\leq 0$

دایرهC $\quad \sigma_t^2+(\sigma_n-\sigma_1)(\sigma_n-\sigma_2)\geq 0$



حال اگر به بررسي اين تنشها و و ترسيم دواير موهر در صفحه بپردازيم، مي توانيم موضوع را به صورت زير تشريح كنيم:



در صفحه، صفحه أي كه بر روي آن تنشها اصلي مي باشند با خط P_3 معرفي

مي گردد، كه زاويهθ با محور x_1 مي‌سازد. بردار نرمال اين خط

مختصات $\vec{n}(-Sin\ \theta, Cos\ \theta, 0)$ را دارا مي باشد، لذا:

$$\sigma_n = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2$$

$$\sigma_n = \sigma_1 \sin^2\theta + \sigma_2 \cos^2\theta + 0$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 - \sigma_n^2$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 \sin^2\theta + \sigma_2^2 \cos^2\theta + 0 - (\sigma_1^2 \sin^2\theta + \sigma_2^2 \cos^2\theta)^2 \Rightarrow$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 \sin^2\theta + \sigma_2^2 \cos^2\theta - \sigma_1^2 \sin^4\theta - \sigma_2^2 \cos^4\theta - 2\sigma_1\sigma_2 \sin^2\theta \cos^2\theta \Rightarrow$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_1^2 \sin^2\theta (1 - \sin^2\theta) + \sigma_2^2 \cos^2\theta (1 - \cos^2\theta) - 2\sigma_1\sigma_2 \sin^2\theta \cos^2\theta \Rightarrow$$

وبه همین ترتیب:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\theta$$

ملاحظه مي شود كه $\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}$ مركز دايره ايست به قطر $\sigma_1-\sigma_2$ كه شعاع آن از $\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}$ محاسبه مي گردد و يا ضرب شعاع و $Sin2\theta$ دو نقطه تحت زاويه 2θ روي اين دايره مشخص مي شود كه همان تنشهاي برشي حداكثر و حداقل هستند.

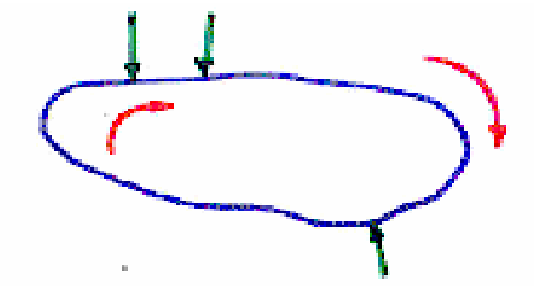
بايد اضافه نمود كه افزودن ميزان تنش ثابتي به مقادير تنشهاي اصلي دايره موهر به اندازه يك $\sigma_\circ$ به سمت راست انتقال مي يابد و در تنش برشي ماكزيمم و مينيمم تغييري حاصل نمي شود. $\sigma_3+\sigma_\circ$ ، $\sigma_2+\sigma_\circ$ ، $\sigma_1+\sigma_\circ$.

زيرا فقط فشار هيدروستاتيكي اضافه شده است.

$$P=\frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$$

لذا نتيجه مي گيريم كه : فشار هيدروستاتيكي تاثيري روي مقدار حداكثر و حداقل تنش برشي ندارد

معادلات تعادل بر حسب تنشها



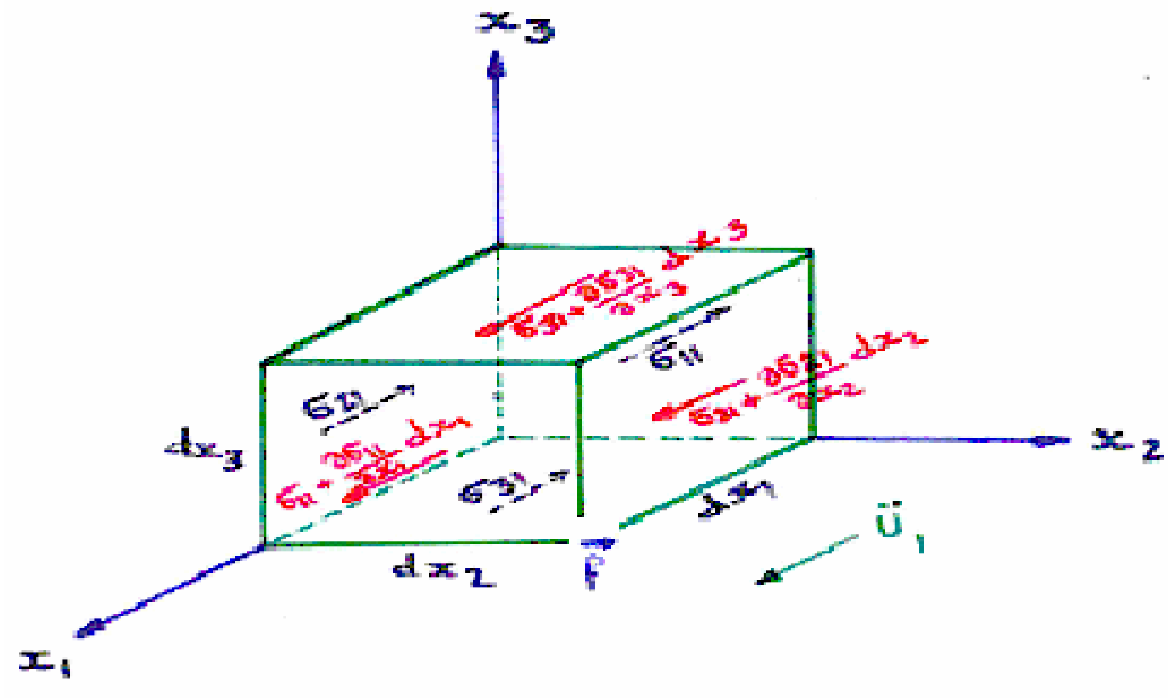
براي اينكه جسمي در حال تعادل باشد، بايد

داشته باشيم: $\Sigma F=0 \& \Sigma M=0$

به عبارت ديگر بايد كليه ذرات جسم در حال تعادل باشند، مي توان نوشت:

$$\Sigma\vec{F}-M\vec{\gamma}=0$$ يا $$\Sigma\vec{F}=M.\vec{\gamma}$$ (فرمول دالامبر)

فرض می کنیم که جسمی با شتاب $\vec{u}$ حرکت می کند:



در اینصورت تغییرات تنشها بر سطوح مکعب در جهت ۱ به صورت شکل بالا تصویر می شوند اگر حجم مخصوص مصالح را ρ فرض نماییم ونیروی وارده بر واحد جرم جسم $\vec{F}$ باشد:

نیروی وارده بر واحد جرم جسم $= \vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$

معادله تعادل در جهت x_1 به صورت زیر نوشته می شود:

$$\left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1\right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2\right) dx_1 dx_3$$
$$- \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3\right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 +$$
$$\rho\, dx_1 dx_2 dx_3 F_1 = \rho\, dx_1 dx_2 dx_3 \cdot \ddot{u}_1$$

لذا خواهیم داشت:

$$dx_1 dx_2 dx_3 \left(\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho F_1 \right) = dx_1 dx_2 dx_3\, \rho\, \ddot{u}_1$$

معادلات تعادل بر حسب تنشها

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} + \rho F_1 = \rho \ddot{u}_1$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + \rho F_2 = \rho \ddot{u}_2$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + \rho F_3 = \rho \ddot{u}_3$$

کاربرد مکانیک محیطهای پیوسته در خاک

تنش در خاک: در صورتی که خاک را اشباع فرض کنیم تنشها بین دانه های جامد و آب حفره ای تقسیم می شود

در مایعات تنشها فقط قائم اند که در خاک آنرا با u فشار حفره ای یا منفذی نشان می دهیم اگر یک جزء سطح افقی خاک را فرض نمائیم رابطه مهم ترزاقی به شرح زیر برقرار است:

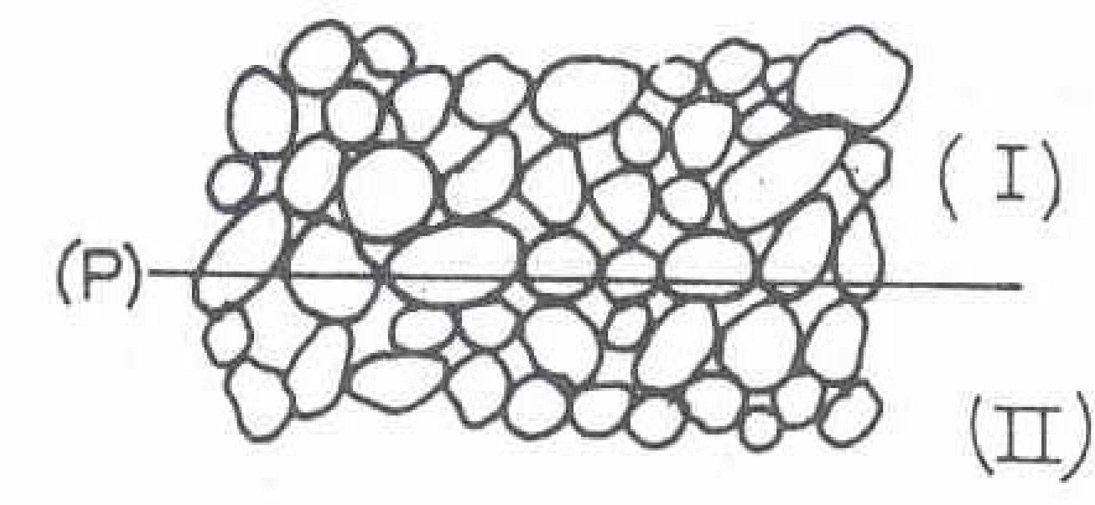
تنش کل قائم = تنش مؤثرقائم + فشار منفذی

$$\sigma_n=\sigma'_n+u$$

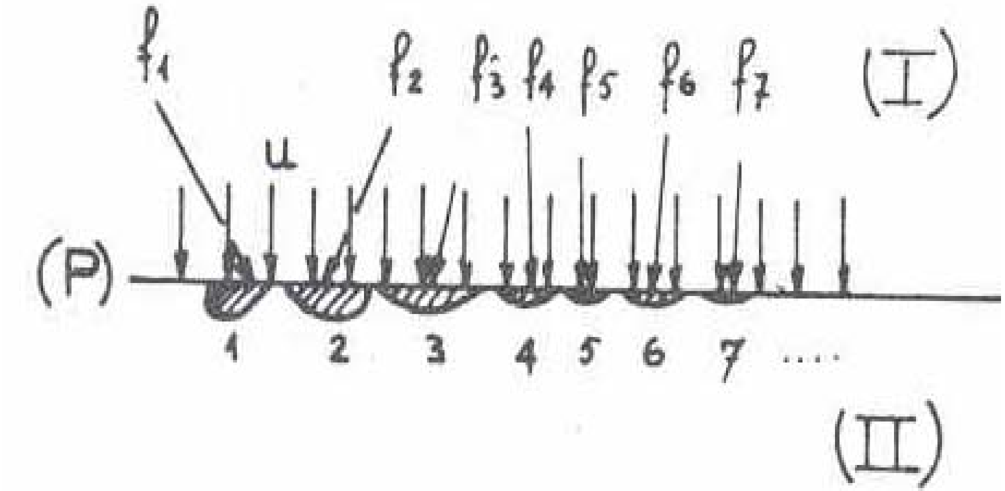
$$\sigma_t=\sigma'_t$$

تنش کل مماسی=تنش مؤثرمماسی

تشریح مفهوم تنش مؤثر

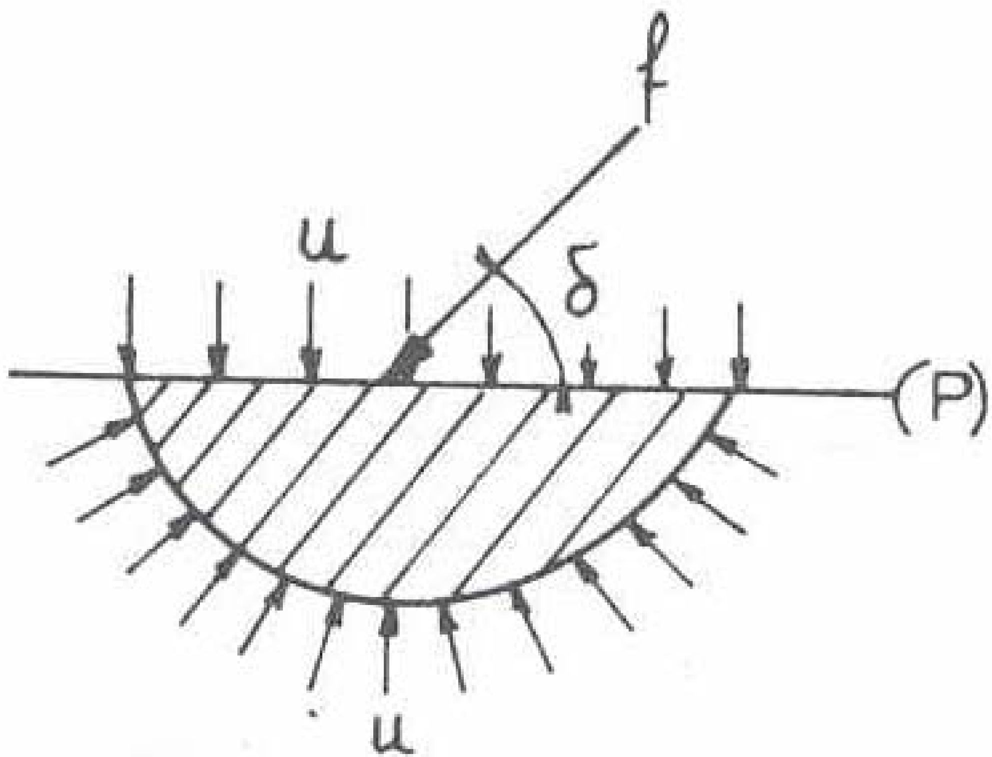


اگر مساحت جزء سطح s باشد



$$\sigma' = \Sigma f_i \sin\delta_i / s$$

$$\tau' = \Sigma f_i \cos\delta_i / s$$

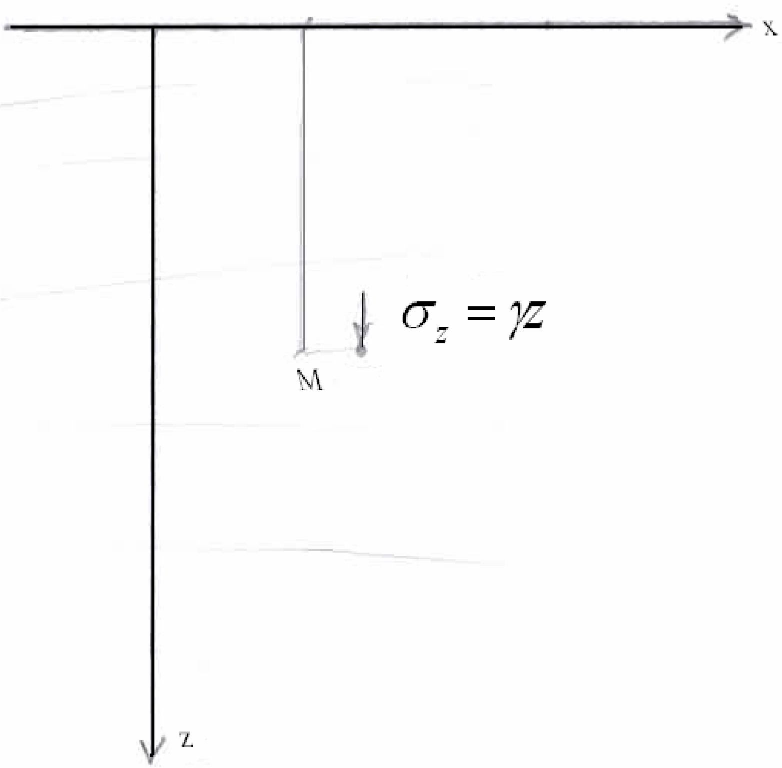


$$\sigma = (\Sigma f_i \sin\delta_i + u \cdot s)/s$$

$$\tau = \Sigma f_i \cos\delta_i / s$$

$$\sigma = \sigma' + u \qquad \tau = \tau'$$

مثال ۱ :در نقطه ای واقع در داخل نیم فضای خاکی تنش ها را تعیین می کنیم:



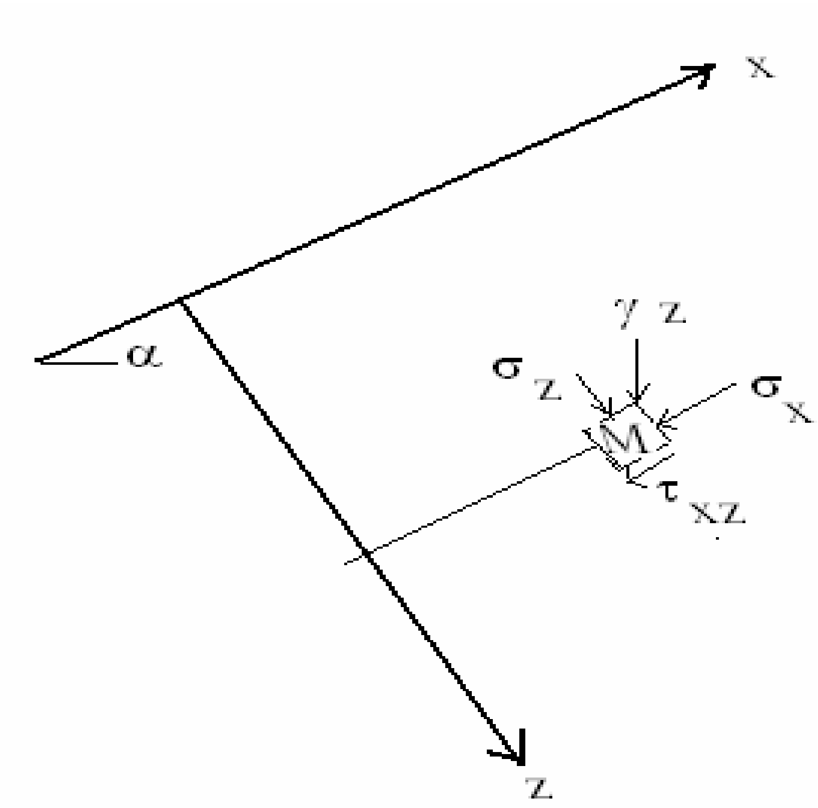
$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow \sigma_x = f(z)$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \gamma \Rightarrow \sigma_z = \gamma z + c$$

به علت تقارن $c = 0$

$$\sigma_z = \gamma z$$

مثال ۲: سطح خاک در مثال ۱ شیب دار است



$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\gamma \sin \alpha$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = +\gamma \cos \alpha$$

تغییرات در جهت محور xها صفر فرض می گردد

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial_z} = -\gamma \sin \alpha \rightarrow \tau_{xz} = -\gamma z \sin \alpha + c_1$$

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial_z} = \gamma \cos \alpha \rightarrow \partial_z = \gamma z \cos \alpha + c_2$$

c1,c2 به علت اینکه در سطح خاک باری نداریم صفر فرض می گردد

$$\sigma_z = \gamma z \cos \alpha \qquad \tau_{xz} = -\gamma z \sin \alpha$$

اگر عمق عمودی را به h نمایش دهیم:

$$z = h\cos\alpha$$

$$\begin{cases} \sigma_z = \gamma h \cos^2 \alpha \\ \tau_{xz} = -\gamma h \cos\alpha \sin\alpha \end{cases}$$