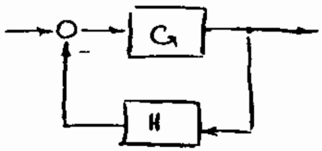
• پایداری در حوزهٔ فرکانس :

• هدف : از روی پاسخ فرکانس حلقه باز سیستم ، پایداری سیستم حلقه بسته را تشخیص دهیم

• تذکر: برای سیستمهای خطی، کلی ترین معیار پایداری ، پایداری در حوزهٔ فرکانس است.

(چون در بعضی موارد امکان مکان هندسی ریشه ها و یا معیار راث جوابگو نیستند)

• پیش از ورود به این بحث ، باید موارد زیر مشخص شود :



$$T = \frac{G}{1+GH}$$

(a) ارتباط قطبهای $1+GH$ با قطبهای GH

(b) ارتباط قطبهای T با صفرهای $1+GH$

(c) مفهوم نگاشت نقاط

(d) مفهوم نگاشت کانتور

فرض :

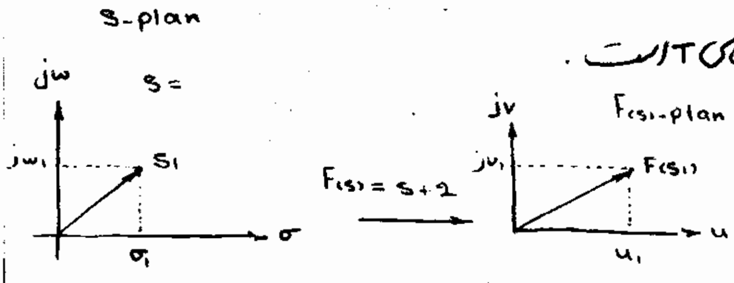
$$H = \frac{N_h}{D_h} \qquad G = \frac{N_g}{D_g}$$

$$T = \frac{G}{1+GH} = \frac{\frac{N_g}{D_g}}{1+\frac{N_g N_h}{D_g D_h}} = \frac{\frac{N_g}{D_g}}{\underbrace{\frac{N_g N_h + D_g D_h}{D_g D_h}}_{1+GH}}$$

www.teyf.com

← قطبهای $1+GH$ همان قطبهای GH است.

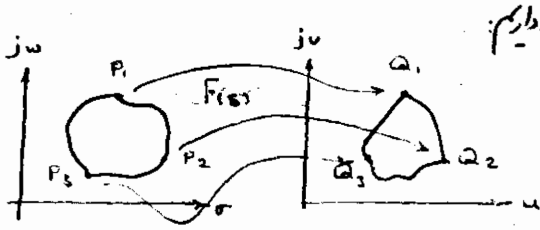
← صفرهای $1+GH$ همان قطبهای T است.



$S_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ $\qquad$ $F(s_1) = u_1 + jv_1$

← $F(s_1)$ نگاشت s_1 است تحت تابع $F(s)$

- اکنون به فرض در صفحه s به جای یک نقطه، مجموعه نقاط داریم:

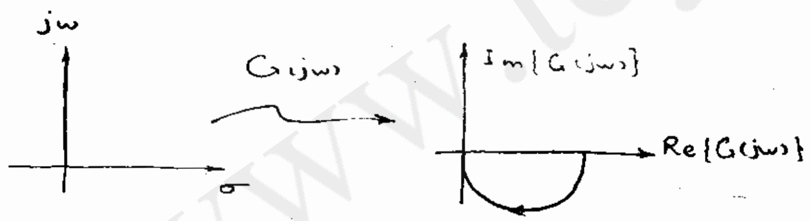


کانتور: مجموعه نقاط پیوسته

کانتور بسته: مجموعه نقاط پیوسته بسته

تذکر: اگر کانتور در صفحه s پیوسته باشد، ولی کانتور در صفحه $F(s)$ نیز پیوسته است که: کانتور صفحه s از صفر و قطبهای $F(s)$ عبور نکند.

* مثال: از نگاشت کانتور:

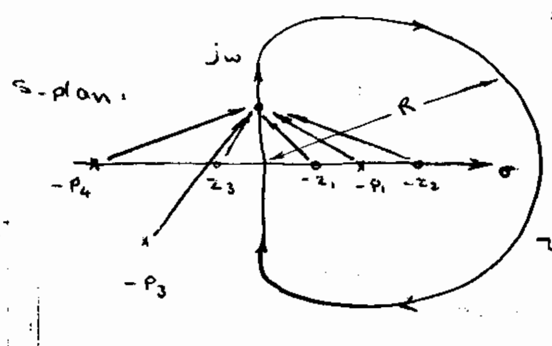


جهت کانتور: جهت افزایش فرکانس (جهت عقربه‌های ساعت)

پس از مقدمه، میپردازیم به بحث پایداری در حوزه فرکانس:

$$F(s) = K \cdot \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots}$$

با فرض دیاگرام صفر و قطب $F(s)$ به صورت زیر است:



← کانتور A

www.teyf.com

. کانتور A : نیمصفحه سمت راست و شامل محور $j\omega$ ← کانتور A : نیمدایره ای شامل کل محور $j\omega$ با شعاع $R \to \infty$

بردارهای $S+z_1$ ، $S+z_2$ و $S+P_1$ ، هنگامیکه کانتور را یکبار در جهت کانتور طی میکنیم، 360° تغییر فاز میدهند (یکبار کامل میچرخند)

* ← چرخش خالص بردارهای $S+z_3$ ، $S+P_4$ ، $S+P_2$ ، $S+P_3$ ← صفر است

وقتی کانتور را یکبار در جهت کانتور طی کنیم، تغییر خالص فاز آنها صفر است.

تعمیم:

(a) در چرخش در جهت کانتور، بردارهای درون کانتور یکبار کامل میچرخند

(b) در چرخش درون کانتور در جهت آن، بردارهای خارج کانتور، چرخش خالص صفر دارند.

* تغییر زاویه خالص $F(s)$ = تغییر زاویه صفرها − تغییر زاویه قطبها

برای مثال اخیر: $= 2(360) - 1(360)$

Z : تعداد صفرهای $F(s)$ که در داخل کانتور هستند.

P : تعداد قطبهای $F(s)$ که در داخل کانتور هستند

تعریف میکنیم: $N = Z - P$ (N میتواند مثبت باشد یا منفی)

* تغییر خالص زاویه $F(s)$ = $N \times 360^\circ$ = تعداد دفعاتی که $F(s)$ مبداء صفحه $F(s)$ را دور میزند

اگر $N>0$ باشد ← $F(s)$ در جهت کانتور دور میزند

* قضیه آرگومانها: (Principle of Arguments)

اگر تابع $F(s)$ دارای Z صفر و P قطب درون کانتور بسته A باشد و کانتور A از هیچ صفر یا قطب $F(s)$ عبور نکند آنگاه به ازای تغییرات s در طول کانتور A، منحنی $F(s)$ مبداء صفحه مختصات را به تعداد $N = Z - P$ بار دور خواهد زد.

(اثبات در کتاب اُگاتا - Page 584)

www.teyf.com

• پایداری: فرض کنیم $F(s) = 1 + GH(s) = A(s)$

برای پایداری $T = \frac{G}{F}$ باید T قطبی در RHP نداشته باشد ← F(s) نباید صفری در RHP داشته باشد

و چون RHP، همان داخل کانتور A است ←

برای پایداری، F(s) نباید صفری درون کانتور A داشته باشد: یعنی: $Z = 0$ باشد

از طرفی P نیز معلوم است. (چون قطبهای F(s) (همان P) همان قطبهای GH هستند)

← P = تعداد قطبهای سمت راست تابع GH(s) *

* نتیجه: اگر نگاشت کانتور A تحت F(s) را در صفحه F(s) ترسیم کنیم و تعداد دورها را بشماریم:

← اگر $N = -P$ باشد ← سیستم حلقه‌بسته (T) پایدار است.

تذکر: (۱) $N = -P$ یعنی: در خلاف جهت عقربه‌های ساعت، به اندازه P بار دور بزند.

(۲) بیان کردیم که P نیز معلوم است.

• قضیه نایکوئیست:

اگر تابع تبدیل حلقه‌باز سیستم (GH(s)) دارای P قطب سمت راست باشد، برای پایداری باید منحنی F(s) باید (به ازای تغییرات s در طول کانتور A) به تعداد P ـ بار مبدأ صفحه F(s) را دور بزند.

یعنی P بار در جهت عکس عقربه‌های ساعت.

تذکر: می‌خواستیم از روی منحنی GH(s) پایداری را مشاهده کنیم، به جای F(s):

$F(s) = 1 + GH(s)$

مبدأ صفحه F(s) به نقطه (−۱،۰) در صفحه GH(s) مربوط است ← می‌توان قضیه را به فرم زیر بیان کرد

* اگر تابع تبدیل حلقه باز سیستم ($GH(s)$) دارای P قطب سمت راست باشد، برای پایداری باید منحنی $GH(s)$ ، (به ازای تغییرات s در طول کانتور A)، به تعداد P بار، نقطه $(-1,0)$ را در صفحه $GH(s)$ دور بزند. یعنی P بار در عکس جهت عقربه‌های ساعت.

* منحنی نایکوئیست: منحنی $GH(s)$ است (به ازای تغییرات s در کانتور A) در صفحه $GH(s)$.

* شرط پایداری نایکوئیست:

سیستم فیدبک پایدار است، اگر و فقط اگر تعداد چرخشهای دیاگرام (منحنی) نایکوئیست در جهت CCW حول — یعنی حلقه بسته

یعنی در جهت خلاف عقربه‌های ساعت — نقطه $(-1,0)$ مساوی باشد با تعداد قطبهای $GH(s)$ در RHP.

اگر $P=0$ باشد: سیستم فیدبک پایدار است اگر دیاگرام نایکوئیست $(-1,0)$ را دور نزند.

* کانتور A سه قسمت دارد:

(۱) $\omega>0$: دیاگرام قطبی (پاسخ فرکانسی)

(۲) $\omega<0$: قرینه دیاگرام قطبی

(۳) $s\to\infty$: در طول نیم دایره بزرگ

$$GH(s)=\frac{\prod^{m}(s+z_i)}{\prod^{n}(s+P_i)}\times K$$

در طول نیم دایره بزرگ

$$\begin{cases} m=n \to s\to\infty: & GH(s)=K \\ m<n: \to s\to\infty, & GH(s)=0 \end{cases}$$

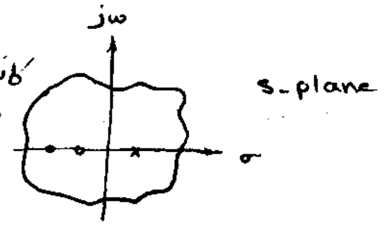
* قسمت اصلی منحنی نایکوئیست همان بخش $\omega>0$ است.

www.teyf.com

* جلسه بیست و چهارم: سه شنبه: ۸۲/۳/۶

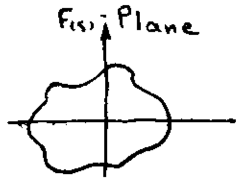
... ادامه مطالب پایداری در حوزه فرکانس:

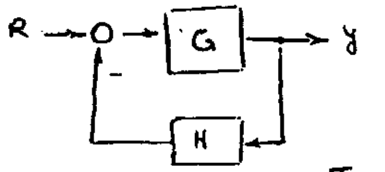
یادآوری: محک پایداری نایکوئیست:



کانتور A: از صفر و قطبهای F(s) عبور نکند

$N=2-1=1$

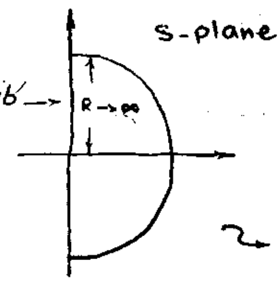




$F(s) = 1+GH$

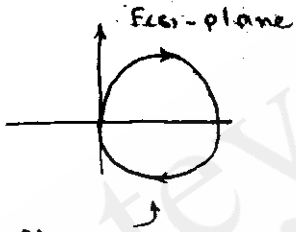
$T_{YR} = \dfrac{G}{1+GH}$

\- اگر کانتور A را کل نیمصفحه سمت راست صفحه s تعریف کنیم داریم:



کانتور نایکوئیست

$\rightsquigarrow F(s) \rightarrow$



$N=0$ $\longrightarrow$ $Z=N+P$

P: قطبهای سمت راست GH(s)

برای پایداری میخواهیم $Z=0$ باشد ← $N=-P$

تذکر:

$F(s) = 1+GH(s)$ $\qquad (0,0)\Big|_{F(s)} \approx (-1,0)\Big|_{GH(s)}$

← معیار نایکوئیست را برای نقطه $(-1,0)$ (در صفحه GH(s)) بررسی میکنیم:

$N =$ تعداد دورهای دور زدن نقطه $(-1,0)$

جمع بندی: P و GH در اختیار میباشد. نگاشت نایکوئیست تحت GH(s) در صفحه GH(s)

را یافته سپس N و $Z=N+P$ بدست میاید. (منحنی نایکوئیست)

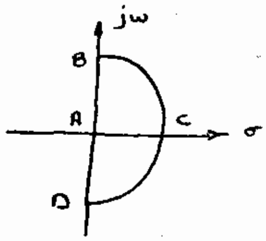
در این جلسه به حل مثال میپردازیم.

مثال (۱):

$$GH(s) = \frac{K}{(1+T_1 s)(1+T_2 s)} \quad ; \quad K>0$$

گام (۱): ترسیم منحنی نایکوئیست (در صفحه S):

(جهت کانتور هم باید مشخص شود)



قطعات کانتور: AB ، BCD ، DA

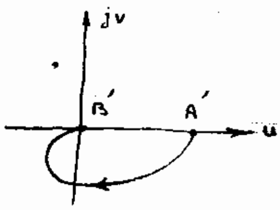
* قطعه AB:

$AB:\quad s=jw \Rightarrow GH(s)=GH(jw)$: پاسخ فرکانسی : $GH(jw) = \dfrac{K}{(1+T_1 jw)(1+T_2 jw)}$

$w=0 \rightarrow M=K ، \Phi=0$

$w=\infty \rightarrow M=0 ، \Phi=-180^\circ$

$$\left.\begin{aligned} M(w) &= \frac{K}{(1+T_1^2 w^2)^{1/2}(1+T_2^2 w^2)^{1/2}} \\ \Phi(w) &= -tg^{-1}(wT_1) - tg^{-1}(wT_2) \end{aligned}\right\}$$



چون سیستم تمام قطب است ← منحنی کاهشی است

چون فاز حداکثر ۱۸۰- است ← باید از محور افقی بالا تر بیاید

تذکر و یادآوری: منحنی قطبی: منحنی پاسخ فرکانسی به ازاء $w=(0,\infty)$ است که به دو روش ترسیم میشود:

$GH(jw) = M(w) \cdot e^{j\Phi(w)}$ یا $GH(jw) = R(w) + jX(w)$

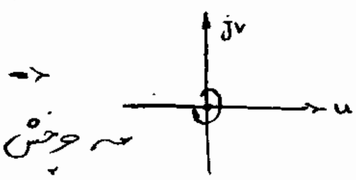
* قطعه BCD: $S = Re^{j\theta}$ ← $\left\{\begin{aligned} &R=\infty \\ &\theta\in[-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}] \end{aligned}\right.$ ←

$$GH(s) = \frac{K}{(1+T_1 Re^{j\theta})(1+T_2 Re^{j\theta})}$$

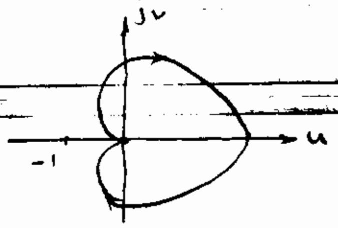
$$GH(s) = \frac{K}{T_1 T_2 R^2 e^{j2\theta}} = \frac{K}{T_1 T_2 R^2} \cdot e^{-j2\theta}$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{aligned} &B:\ M=0 ;\ \Phi=-180 \\ &C:\ M=0 ،\ \Phi=0 \\ &D:\ M=0 ،\ \Phi=180 \end{aligned}\right.$$

* تذکر: چرخش حول مبداء در اینجا مهم نیست. چون باید چرخش حول نقطه (۱،۰-) را در نظر گرفت.



← چرخش 360° حول مبداء با شعاع صفر



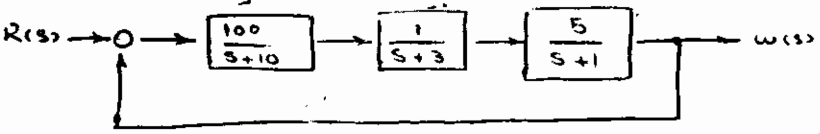
+ قطعه DE : این قطعه قرینه AB است : ←

* بررسی پایداری : $(T_1, T_2 > 0)$

$P=0$: تعداد قطبهای سمت راست GH $N=0$: چرخش حول $u=-1$

برای $0<K$ ← $Z=N+P=0$ ⇐ برای هر مقدار مثبت K، پایدار است.

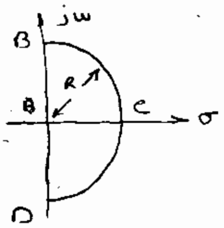
+ مثال (۲) :



* حل :

$$GH(s)=\frac{500}{(s+1)(s+3)(s+10)}$$

GH را داریم : سپس کانتور نایکوئیست را رسم میکنیم :



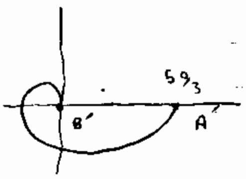
قطعه AB :

$$s=j\omega \rightarrow GH(s)=GH(j\omega)=\frac{500}{(j\omega+1)(j\omega+3)(j\omega+10)}$$

$$\begin{cases} M(\omega)=\dfrac{500}{[(1+\omega^2)(9+\omega^2)(100+\omega^2)]^{1/2}} \\ \phi(\omega)=-tg^{-1}\omega-tg^{-1}\dfrac{\omega}{3}-tg^{-1}\dfrac{\omega}{10} \end{cases}$$

$$A: \quad \omega=0 \rightarrow \underbrace{M=\frac{50}{3}, \ \phi=0}_{\text{مختصات نقطه } A'}$$

$$B: \omega=\infty \rightarrow M=0 \qquad \phi=-270^\circ$$



برای BCD : $s=Re^{j\theta}$

$$GH(s)=\frac{500}{(1+Re^{j\theta})(3+Re^{j\theta})(10+Re^{j\theta})} \leftarrow \begin{cases} R\rightarrow\infty \\ \theta\in[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

$$\rightarrow GH(s)\simeq\frac{500}{R^3\cdot e^{j3\theta}}$$

www.teyf.com

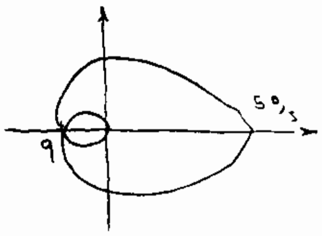
$\rightarrow$ B: $M = 0$, $\Phi = -270$

C: $M = 0$, $\Phi = 0$ $\quad\longrightarrow\quad 270 - (-270) = 540^\circ = 360 + 180^\circ$

D: $M = 0$, $\Phi = +270$

در مبداء یک دور و نیم میزنیم.

برای قطعه DE : $s = -j\omega$ ← قرینه حالت AB است



• بررسی پایداری:

این نمودار تعریف کلی نمی‌کند. چون نمی‌دانیم ۱- کجاست.

با نقاط تقاطع منحنی قطبی با محور حقیقی را بیابیم:

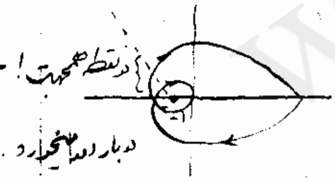
$$GH(j\omega) = \frac{500}{(-14\omega^2 + 30) + j(43\omega - \omega^3)} \rightarrow$$

$$GH(j\omega) = \underbrace{\frac{500(-14\omega^2 + 30)}{[-14\omega^2 + 30]^2 + [43\omega - \omega^3]^2}}_{Re\{GH(j\omega)\}} + j\cdot\underbrace{\frac{-[43\omega - \omega^2]}{[-14\omega^2 + 30]^2 + [43\omega - \omega^3]^2}}_{Im\{GH(j\omega)\} = X(\omega)}$$

$$X(\omega) = 0 \rightarrow 43\omega - \omega^2 = 0 \rightarrow \omega_\pi = \pm\sqrt{43}$$

$$q = Re\{\omega_\pi\} = -0.874 \rightarrow -1 < -0.874 \rightarrow N = 0$$

سیستم پایدار است. ← $Z = N + P = 0$ ← $P = 0$



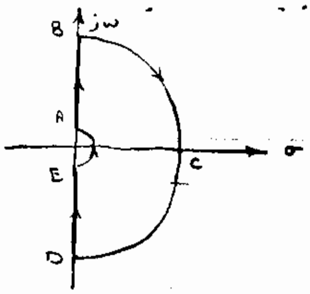
تذکر: اگر فرض $q < -1$ بود ← نقطه $(-1, 0)$ دوبار دور زده می‌شد.

* مثال (۳):

$$GH(s) = \frac{s+2}{s^2}$$

تذکر: به یاد دارید که کانتور نایکوییست نباید از صفر و قطبهای $F(s)$ عبور کند و تعریف یاد دارید که قطبهای $F(s)$ با قطبهای $GH(s)$ یکی می‌باشند. در اینجا: $s^2 = 0 \rightarrow s = 0$ ← کانتور نباید از $s = 0$ بگذرد

باید کانتور A را تصحیح کنیم (identator)



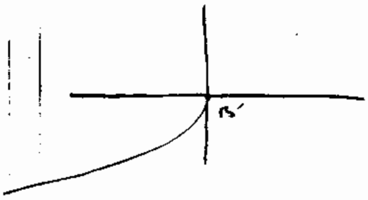
برای قطعه AB :

$$S=j\omega \to GH(s)=GH(j\omega)=\frac{j\omega+2}{-\omega^2}=\left(\frac{2}{-\omega^2}\right)+j\left(\frac{-1}{\omega}\right)$$

A: $\omega=0 \to M=+\infty ,\ \Phi=-180$

B: $\omega=\infty \to M=0 ,\ \Phi=-90$

چون هم R و هم X منفی است ← در ربع سوم است.



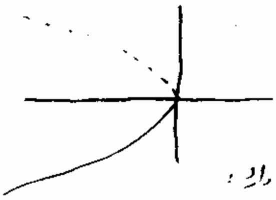
برای BCD: $S=Re^{j\theta}$

$\{R\to\infty ,\ \theta\in[-\pi/2 , \pi/2]\} \to$

$B \Rightarrow M=0 ,\ \Phi=-90$ $\quad$ $C: M=0 ,\ \Phi=0$ $\quad$ $D: M=0 ,\ \Phi=+90$

← در قطعه BCD در مبدا دوران با زاویه 180° با شعاع صفر داریم.

برای DE: قرینه AB است.



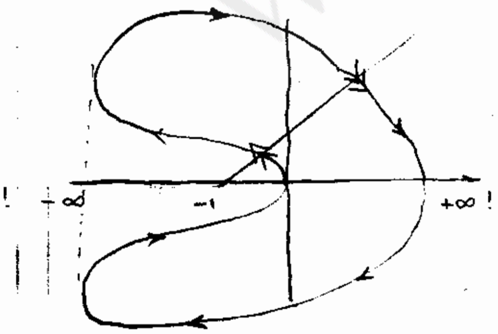
الآن باید ببینیم آن نیم دایره کوچک (که در اثر indentation کاسته شده) چه رفتاری دارد:

* قطعه EA: در این قطعه $S=\epsilon e^{j\theta}$

$\theta\in[-\pi/2 , +\pi/2]$ (E ← , → A)

$$\to GH(s)=\frac{2+\epsilon e^{j\theta}}{\epsilon^2 e^{j2\theta}}=\frac{2}{\epsilon^2 e^{j2\theta}}=\infty\angle-2\theta \to \begin{cases} E: M=\infty ,\ \Phi=180 \\ A: M=\infty ,\ \Phi=-180 \end{cases}$$

* توجه: از E به A: فاز از +180° به -180° می رسد ← در جهت عقربه های ساعت یک دور می زنیم، و چون $M=\infty$ ← شعاع بینهایت است:



تعداد دور خالص: $N=+1-1=0$

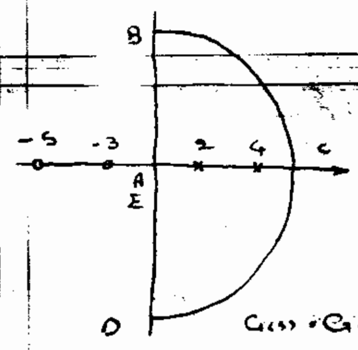
$P=0 \to Z=P+N=0+0=0 \to$ پایدار است

*مثال (۴):

$$G(s)=K\cdot\frac{(s+3)(s+5)}{(s-2)(s-4)}$$

تذکر: چون فیدبک واحد بوده ← $G=GH$

هادی افشاری



تذکر: داشته همواره توجه میکنیم که تعداد صفر و قطبهای ۲ عدد کرده باشیم

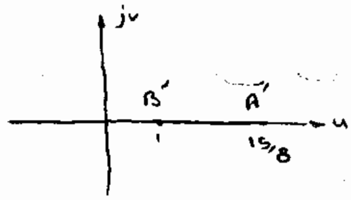
تذکر: برای سیستمهایی که متغیر K دارد، ابتدا برای $K=1$ تحلیل می‌کنیم

$\Leftarrow K=1$

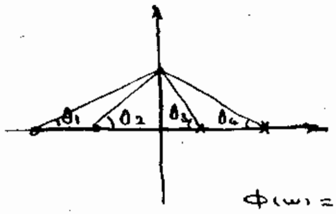
* قطعه AB: $\leftarrow s=j\omega$

$$G(s)=G(j\omega)=\frac{(3+j\omega)(5+j\omega)}{(j\omega-2)(j\omega-4)}$$

$$\begin{cases} A:\ \omega=0 \rightarrow M=\frac{15}{8},\ \phi=0 \\ B:\ \omega=\infty \rightarrow M=1,\ \phi=0 \end{cases}$$



الان ایده ای برای نقاط میان A و B نداریم:



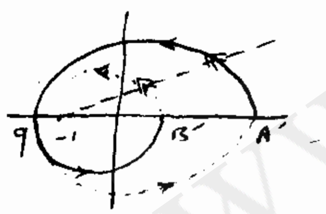
یک s فرضی میان A و B در نظر میگیریم:

$$\phi(\omega)=\theta_1+\theta_2-(180-\theta_3)-(180-\theta_4)$$

قطب راست زاویه مثبت اعمال میکند. (و برعکس)

صفر راست زاویه منفی اعمال میکند (و برعکس)

نقطه قطع محور حقیقی: $Im=0 \rightarrow \omega=\sqrt{11} \rightarrow q=-1.33$



قطعه BCD، حول نقطه B' دوران میکنیم و DE هم قرینه AB:

$$K=1\begin{cases} N=-2 \\ P=2 \end{cases} \rightarrow Z=0 \rightarrow$$ به ازای $k=1$ پایدار است.

- اگر K بزرگ شود شکل منبسط خواهد شد ولی در پایداری تاثیری نخواهد داشت.

اما برای Kهای کوچکتر از ۱: چون منحنی منقبض میشود، در نقطه ای از ۱- عبور خواهد کرد ← از مرز پایداری عبور میکند.

$Kq=1 \rightarrow$ به ازای $K=\frac{1}{1.33}$ وارد مرز ناپایداری میشود:

$\rightarrow$ محدوده پایداری: $\begin{cases} K>\frac{1}{1.33}: & \text{پایدار} \\ K<\frac{1}{1.33}: & \text{ناپایدار} \end{cases}$

www.teyf.com

* جلسه بیست و نهم :   پنجشنبه : ۸٫۳٫ ۸۲

- دیاگرام نایکوئیست

- اصل آرگومانها : $N = Z - P$

- تحلیل پایداری : $Z = N + P$

- وقتی دیاگرام نایکوئیست از نقطه ۱- عبور کند معیار نایکوئیست ساکت است (یعنی از روی قضیه نایکوئیست نمی‌توان تحلیل پایداری کرد.

علت : چون وقتی از ۱- عبور کند کانتور از صفر $F(s)$ عبور کرده است :

$$GH(s) = -1 \rightarrow F(s) = 1 + GH(s) = 0$$

یعنی کانتور نایکوئیست از صفرهای $F(s)$ عبور می‌کند در $s = j\omega_1$ ریشه دارد .

← معادله مشخصه ریشه‌ای روی محور موهومی دارد (*)

تذکر: (۱) هنگامیکه چنین حالتی اتفاق افتاد می‌توان گفت سیستم پایدار مرزی است. چون از تعداد ریشه‌های سمت راست خبر نداریم و حتی ممکن است روی محور موهومی $(j\omega)$ ریشه تکرار داشته باشیم ← حالت (*) تنها میگوید : ریشه‌ای روی محور موهومی وجود دارد همین و بس.

(۲) مگر اطلاعات دیگری از سیستم داشته باشیم :

فرضاً سیستم درجه ۲ اگر منحنی نایکوئیست از ۱- عبور کند ← میتوان گفت سیستم پایدار مرزی است

چون سیستم درجه دو اگر ریشه‌ای در $j\omega_1$ داشته باشد ، ریشه دیگر هم در $-j\omega_1$ است و در نتیجه سمت راست ریشه نداریم.

* مثال :

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

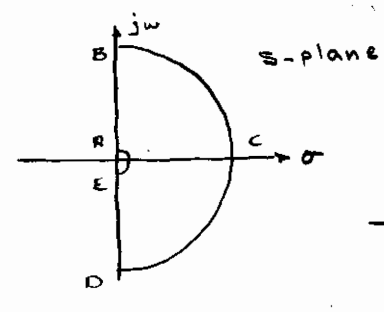
ابتدا کانتور نایکوئیست indent شده را رسم میکنیم :

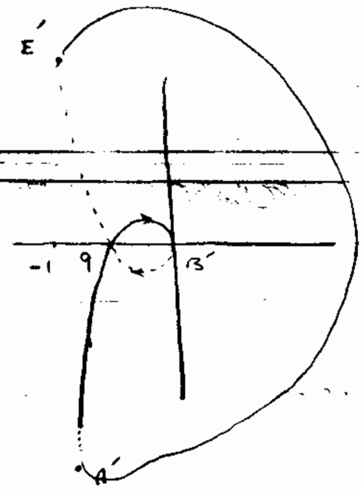
* $K = 1$ (فرض) :

* قطعه AB :

$s = j\omega$

$$\rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)(j\omega+3)(j\omega+5)}$$





$$\begin{cases} A: \omega=0 \to |G(j\omega)| = \infty \;,\; \Phi=-90^\circ \\ B: \omega=\infty \to |G(j\omega)|=0 \;,\; \Phi=-270^\circ \end{cases}$$

تذکر: تعداد نقاط قطع با محور حقیقی باید یافت شود:

$Im=0 \to \omega_\pi=\sqrt{15} \to q=Re\{\omega_\pi\}=-0.0083$

تذکر: همواره جهت حلقه را نیز مشخص کنید (در جهت افزایش فرکانس)

• قطعه BCD که در مبدا است و DE هم که در نیمه AB است

برای EA: $S=\epsilon . e^{j\theta}$, $\theta \in [-\pi/2, +\pi/2]$

$$\left.\begin{cases} E: |G|=\infty \;,\; \Phi=+90 \\ A: |G|=\infty \;,\; \Phi=-90 \end{cases}\right\} \to$$ از E به A چرخش با شعاع بینهایت در 180° داریم.

بررسی پایداری

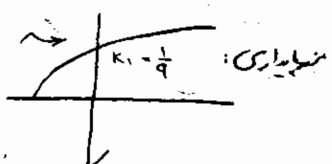
برای $K=1$: $N=0$, $P=0 \to Z=0 \to$ سیستم حلقه بسته برای $K=1$ پایدار است

برای $K<1$ هم پایدار است.

برای $K=\frac{1}{q}$ منحنی از -1 میگذرد و برای $K>\frac{1}{q}$ ناپایدار است.

محدوده پایداری: $K<\frac{1}{q}=125$

* تذکر: رابطه نایکوئیست و مکان هندسی: (مهم)



از روی معیارات میتوان تقاطع مکان و محور موهومی را یافت ← همان K و q و ω در آن بدست آورد می‌شود

* تذکر: بررسی $K<0$: برای K های منفی ناپایدار است.

$F(s)$ در صفحه $(-1,0)$

$F(s)=1+KGH(s) \qquad K<0$

$F(s)=1-K_1GH(s) \qquad K_1=-K>0$

$F(s)$ در صفحه $(+1,0)$

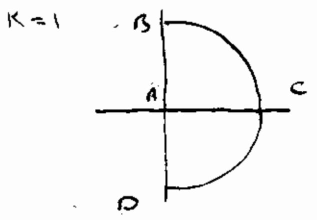
← برای تحلیل حالت $K<0$ ← نقطه بحرانی را $(+1, 0)$ در نظر میگیریم و دوران حول آنرا بررسی میکنیم

$P=0 \qquad N=1 \longrightarrow Z=1+0=1$ ← ناپایدار است.

* مثال:

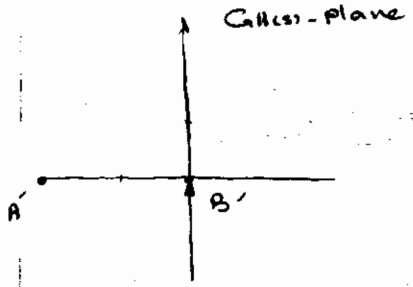
$$GH(s)=K\cdot\frac{(s-2)}{(s+1)^2}$$

$K=1$



$$GH(j\omega)=\frac{j\omega-2}{(j\omega+1)^2}$$

$$\begin{cases} A:\ \omega=0 \longrightarrow |G(j\omega)|=2 & \Phi=+180 \\ B:\ \omega=\infty \longrightarrow |G(j\omega)|=0 & \Phi=-90 \end{cases}$$



حال ببینیم که چگونه از A' به B' میرسیم:

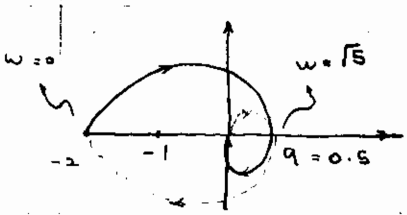
تعداد نقاط قطع محور حقیقی را بیابیم:

$$GH(j\omega)=\frac{j\omega-2}{-\omega^2+1+2j\omega}=\frac{(j\omega-2)(1-\omega^2-2j\omega)}{(1-\omega^2)^2+(2\omega)^2}$$

$$\longrightarrow GH(j\omega)=\frac{(4\omega^2-2)+j(5\omega-\omega^3)}{(1-\omega^2)^2+(2\omega)^2}$$

$$Im=0 \longrightarrow \omega=\sqrt{5} \longrightarrow Re\{GH(j\omega)\}\Big|_{\omega=\sqrt{5}}=0.5=a$$

چون منحنی قطع دارد در 0.5 است ← شکل به صورت زیر در می آید:



$$\left.\begin{matrix} P=0 \\ N=1 \end{matrix}\right\} \longrightarrow Z=1+0=1 \longrightarrow$$ ناپایدار

$K=\frac{1}{2}$: مرز ناپایداری ← ناپایدار: $\frac{1}{2}<K<1$ $\qquad$ $K>1$ ← باز هم ناپایدار

پایدار مرزی: چون سیستم درجه ۲ است.

تذکر: رابطه مکان هندسی و نایکوئیست را خوب بدانید!

تذکر: $P=0$ یعنی سیستم حلقه باز پایدار است.

* معیار ساده شده نایکوئیست:

مقدمه: اگر $P=0$ باشد ← شرط پایداری صفر بودن یا نبودن Z است.

← اگر راهی وجود داشته باشد تا بفهمیم منحنی نایکوئیست دور -1 چرخیده است یا خیر ($N=0$ یا $N\neq0$) کافی است برای آنکه نظر بدهیم در مورد پایداری سیستم حلقه بسته.

تذکر: اگر $P\neq0$ باشد ← این کافی نیست که بفهمیم دور چرخیده یا خیر. بلکه باید تعداد دورها را بدانیم.

برای این منظور باید مفاهیم enclosure و encirclement را بدانیم:

- یک نقطه enclosure شده است اگر در جهت cw، encirclement شده باشد.

- یک نقطه توسط یک منحنی encirclement شده است اگر وقتی در طول منحنی حرکت می‌کنیم، نقطه در سمت راست ما قرار گرفته باشد. (در شکل یک حلقه منحنی داشته باشیم).

* اگر $GH(s)$ دارای قطبی در RHP نباشد (یعنی $P=0$ باشد)، آنگاه سیستم فیدبک پایدار است اگر و فقط اگر وقتی در طول دیاگرام قطبی با افزایش فرکانس حرکت می‌کنیم، همواره نقطه -1 سمت چپ این منحنی قرار گرفته باشد.

تذکر: (1) کمک این معیار تعداد دور و به عبارتی N و Z بدست نمی‌آید.

(2) برای سیستم‌های حلقه باز پایدار ($P=0$)، تنها می‌توان از روی پاسخ فرکانسی در مورد پایداری قضاوت کرد.

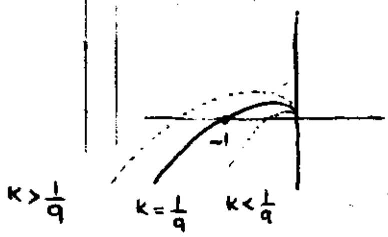
(3) برای $K<0$ از صفر تر همین معیار را می‌توان برای نقطه $+1$ اعمال کرد.

www.teyf.com

* **پایداری نسبی:**

در دیاگرام صفر و قطب، معیار پایداری نسبی، فاصله قطبها از محور موهومی بود. در نایکوئیست نزدیکی با ۱- معیاری برای پایداری نسبی می باشد.

مرز نزدیکی برای پایداری، گین مقدار است: $K = \frac{1}{9}$

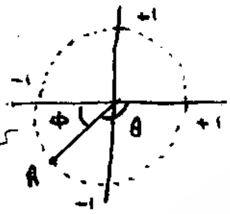


* **حد بهره (Gain Margine):**

یعنی وقتی فاز 180° است، گین چقدر با ۱+ فاصله دارد؟

$$GH(j\omega) = -1 \rightarrow \begin{cases} |GH(j\omega)| = 1 \\ \measuredangle GH(j\omega) = +180^\circ \end{cases}$$

حالت دیگری که بررسی می کنیم زمانی است که $|GH(j\omega)| = 1$ است ولی باید دید فاز چه فاصله ای با $+180^\circ$ دارد؟ ← این هم معیاری برای بررسی پایداری نسبی خواهد بود.



* **حد فاز (Phase Margine):**

یعنی اگر $|GH(j\omega)| = 1$ باشد، فاز چقدر با π فاصله دارد؟

الان قصد داریم این دو مفهوم را رسما تعریف کنیم:

GM: Gain Margine

ماکزیمم مقدار گینی که میتوان به سیستم اعمال کرد تا به مرز پایداری برسد:

$$GM = \frac{1}{9} \qquad 9 = |GH(j\omega_\pi)|$$

$$\rightarrow \quad GM = \frac{1}{|GH(j\omega_\pi)|}$$

ω_π: فرکانسی که در آن، زاویه -180° میشود.

فرکانس گذر فاز:

$$GM_{dB} = -20\log|GH(j\omega_\pi)| = -|GH(j\omega_\pi)|_{dB}$$

www.teyf.com

هادی افشاری

← با این تعریف اگر سیستم پایدار باشد ← GM_{dB} باید مثبت باشد.

PM : (Phase Margine)

هنگامیکه $|G|=1$ است، PM برابر با مقدار فازی است که می‌توان از سیستم کم کرد (یعنی در جهت عقربه ساعت) تا آنرا در مرز پایداری قرار دهید.

$PM = \Phi = 180 - \theta \qquad \theta = -\angle GH(j\omega_c)$

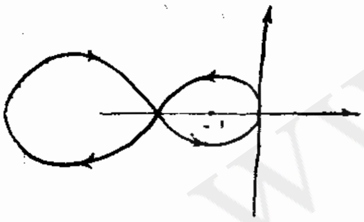
ω_c : فرکانس گذر بهره ← $|GH(j\omega_c)| = 1$

$\rightarrow PM = 180 + \angle GH(j\omega_c)$

← PM باید مثبت باشد تا سیستم پایدار باشد.

* در حالت $P=0$: با افزایش K سیستم ناپایدار میشود. در برای افزایش پایداری باید K را کم میکردیم.
به این GM، «GM از بالا» گویند. (چون حد بالای GM است)

اما مثلاً برای حالت $P\neq 0$:

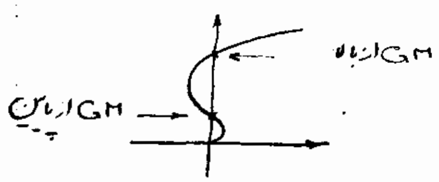


فرض: $P=1$

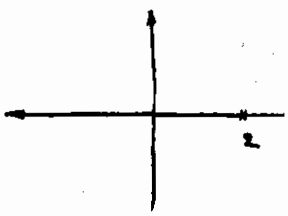
$\left.\begin{array}{l} P=1 \\ N=-1 \end{array}\right\} \rightarrow Z=0 \rightarrow$ پایدار

برای ناپایدار کردن باید K را کم کنیم (که -1 دور نگردد) ← برای چنین سیستمهایی GM از پایین تعریف میکنیم.

نمایش این موضوع در مکان هندسی:



توضیح: وقتی $P\neq 0$ با افزایش K پایداری بیشتر میشود:



شرط پایداری: $K>2$

اگر K زیاد شود ← مرز پایداری بزرگتر میشود ← پایدارتر میشود.

* بررسی از روی دیاگرام بودی :

از روی معیار ساده شدهٔ نایکوئیست پیش می‌بریم :

وقتی $\measuredangle G = 180$ ← $|G| = ?$

وقتی $|G| = 1$ ← $\measuredangle G = ?$

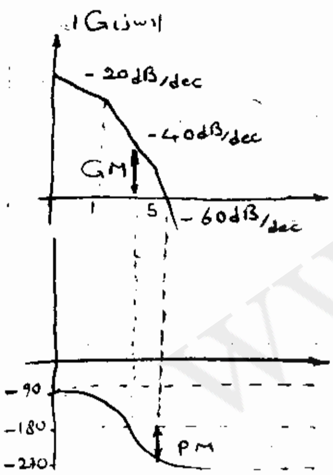
ω_c : فرکانس گذر بهره .

ω_π : فرکانس گذر فاز .

تذکر : بررسی پایداری از روی دیاگرام بودی مختص سیستمهای حلقه باز پایدار ($P = 0$) می‌باشد چون از معیار ساده شده نایکوئیست کمک می‌گیریم .

* مثال : بررسی پایداری از روی دیاگرام بودی :

$$GH(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(-2j\omega+1)}$$



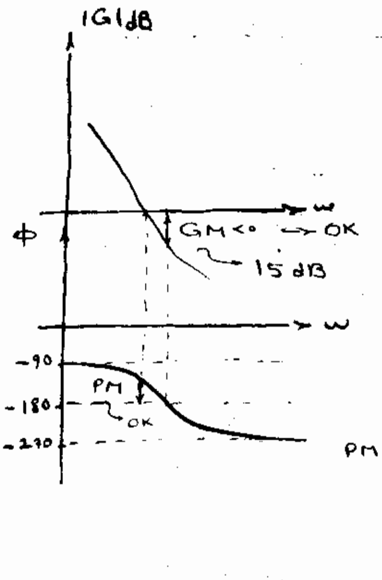
ابتدا دیاگرام بودی را رسم میکنیم :

مجانبی

برای پایداری : در $\measuredangle 180$ ← $|G|$ باید منفی باشد .

برای پایداری : در $|G| = 1$ ← $\measuredangle G$ باید از -180 مثبت تر باشد .

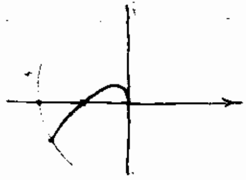
نمودار بودی دقیق برای مثال اخیر



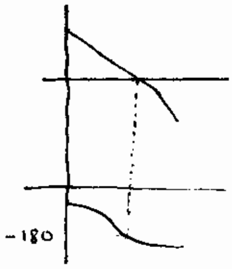
$\} \Rightarrow$ پایدار است

$PM = 43^\circ > 0$

* جلسه بیست و ششم: (این جلسه غایب بودم) یکشنبه: ۸۴/۳/۱۱

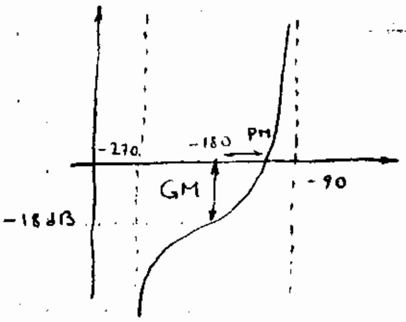


- حدفاز ← نزدیکی به ۱-
- حدبهره



$\rightarrow GM = \infty$

* دیاگرام لگاریتم اندازه فاز:



* رابطه حدفاز با میرایی نسبی:

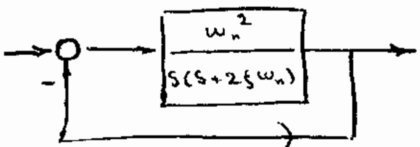
$\xi \leftarrow \quad \rightarrow PM$

فرکانس گذر بهره

$$PM = 180 + \angle G(j\omega_c)$$

سیستم درجه ۲ استاندارد.

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$: ابتدا تبدیل سیستم حلقه بسته



$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s} \rightarrow G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{j\omega(j\omega + 2\xi\omega_n)}$$

$$\rightarrow |G| = \frac{\omega_n^2}{\omega(\omega^2 + 4\xi^2\omega_n^2)^{1/2}} \rightarrow 1 = \frac{\omega_n^2}{\omega_c(\omega_c^2 + 4\xi^2\omega_n^2)^{1/2}}$$

www.teyf.com

$$\rightarrow \omega_n^4 = \omega_c^2(\omega_c^2 + 4\zeta^2\omega_n^2) \rightarrow \omega_c^4 + 4\zeta^2\omega_n^2\omega_c^2 - \omega_n^4 = 0$$

$$\rightarrow \omega_c^2 = -2\zeta^2\omega_n^2 \pm \sqrt{4\zeta^4\omega_n^4 + \omega_n^4} \rightarrow \omega_c^2 = \omega_n^2(-2\zeta^2 \pm \sqrt{1+4\zeta^2})$$

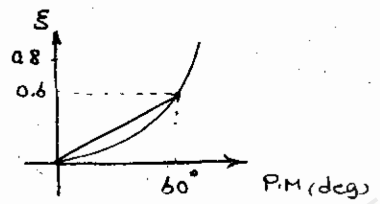
$$\omega_c = \omega_n\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^2}}$$

$$\frac{\omega_c}{\omega_n} = \sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^2}} \quad (*)$$

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{-\omega^2 + j2\zeta\omega\omega_n} \rightarrow \angle G(j\omega) = -(180 - tg^{-1}\frac{2\zeta\omega_n}{\omega})$$

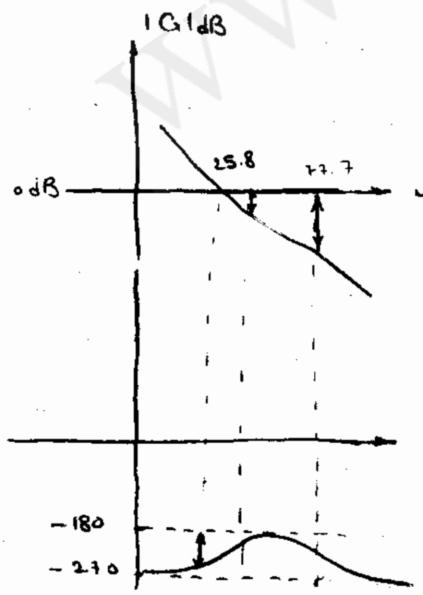
$$PM = 180 + \angle G(j\omega_c) = tg^{-1}\frac{2\zeta\omega_n}{\omega_c} \rightarrow \& * \rightarrow$$

$$PM = tg^{-1}\frac{2\zeta}{\sqrt{-2\zeta^2 + \sqrt{1+4\zeta^2}}}$$



$\zeta = 0.01\ PM$ (?!) $\leftarrow$ $\zeta \leqslant 0.7$

* سیستمهای ناپایداری مشروط :



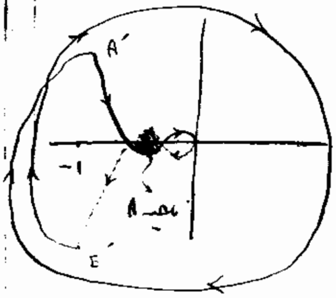
سیستم مینیمم فاز با بهره مثبت $|G(0)| = \infty,\ K = 1$

چون PM منفی است، ناپایدار است.

* مطالعه دیاگرام نایکوئیست در تحلیل پایداری :

www.teyf.com

• چون سیستم فاز است و قطب و صفر سمت راست نداریم ← -270° فقط میتواند ناشی از سه انتگرال گیر باشد.



540° تغییر فاز از E به A′ یعنی ۱٫۵ دور

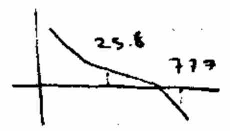
از روی معیار ساده شده واضح است که ناپایدار است.

و نیز از روی معیار کامل نایکوئیست داریم:

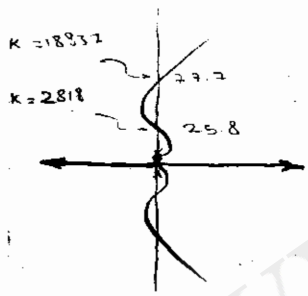
$$\left.\begin{array}{l} K<69\,dB \\ k>85\,dB \end{array}\right\} \quad Z=2 \leftarrow \left\{\begin{array}{l} P=0 \\ N=2 \end{array}\right.$$

برای پایداری باید ۱- در ناحیه A قرار گیرد:

$$K=\frac{1}{10^{-\frac{69}{20}}} \rightarrow >69\,dB \rightarrow \qquad 69\,dB < K \text{ آزمایش } < 85\,dB \rightarrow PM>0$$



• نمودار مکان هندسی را با این اطلاعات بصورت تقریبی میتوانیم رسم کنیم:



$$GH(j\,25.8)=-1$$

$$1+GH(j\,25)=0$$

$$GH(77.7)=-1$$

$$1+GH(77.7)=0$$

پایداری سیستمهای با تأخیر زمانی:

$$GH(s)=GH_1(s).e^{-\tau_d s}$$

$GH_1(s)$: یک تابع حقیقی گویا

ابزار s در حوزه فرکانس:
- معیار راث
- مکان ریشه؟
- نایکوئیست

- مکان ریشه :

$$1 + GH(s) = 0$$

$$1 + GH_1(s)e^{-\tau_d s} = 0$$

$$\begin{cases} |GH_1(s)\, e^{-\tau_d (s)}| = 1 \\ \measuredangle GH_1(s) e^{-\tau_d s} = \pm 180(2q+1) \end{cases}$$

$$\measuredangle GH(s) = \measuredangle GH_1(s) + \measuredangle e^{-\tau_d s} = 180$$

$$\measuredangle GH_1(s) - \omega\tau_d = 180 \longrightarrow \measuredangle GH_1(s) = 180 + \omega\tau_d$$

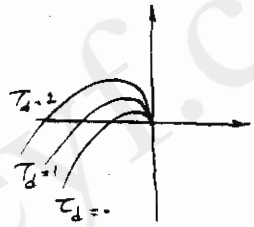
این مسئله باعث میشود استفاده از مکان ریشه مشکل باشد.

- نایکوئیست :

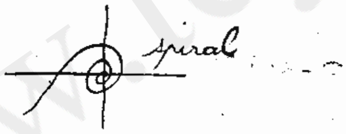
$$|GH(s)| = |GH_1(s)|$$

$$|e^{-j\omega\tau_d}| = 1$$

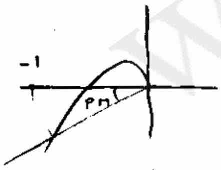
$$\measuredangle GH(j\omega) = \measuredangle GH_1(j\omega) - \omega\tau_d$$



برای ω های بزرگ :



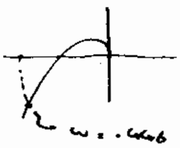
حداکثر تأخیری که سیستم میتواند داشته باشد به اندازه PM است.



مثال:

$$GH(s) = \frac{e^{-\tau_d s}}{s(s+1)(s+2)}$$

$$GH_1(j\omega) = \frac{e^{-\tau_d j\omega}}{(j\omega)(j\omega+1)(j\omega+2)} \qquad \omega = 0 \rightarrow \begin{cases} |G| = \infty \\ \phi = -90 \end{cases} \qquad \omega = \infty \rightarrow \begin{cases} |G| = 0 \\ \phi = -270 \end{cases}$$



$$\omega_c = .446 \text{ rad/s} \rightarrow PM = 53.4$$

$$\omega_c\tau_d = 53.4 \times \frac{\pi}{180} \longrightarrow \tau_d = \frac{53.4 \times \pi/180}{.446} = 2.09$$ ثانیه

www.tejf.com