* پاسخ فرکانسی :

- مزیتهای پاسخ فرکانسی بر حوزه لاپلاس :

(۱) مفهوم پهنای باند و فیلترینگ

(۲) تست ساده پاسخ فرکانسی بدون نیاز به پاسخ تبدیل

(۳) برخورد با سیستم های تأخیر دار

(کلاس خاص از سیستمهای غیر خطی)

- عیب :

. تحلیل پاسخ زمانی از روی پاسخ فرکانسی، به راحتی بدست نمی آید. مگر برای سیستم درجه ۲ استثنا دارد.

www.teyf.com

* ترسیم منحنی های پاسخ فرکانسی (تابع تبدیل Sin):

پاسخ فرکانسی، پاسخ سیستم به ورودی سینوسی است.

تابع تبدیل سینوسی $G(j\omega) \leftarrow G(s)$: تابع تبدیل لاپلاس

* پاسخ فرکانسی برای چه سیستمهایی می تواند بیان شود؟

برای سیستمهای علّی و سیستمهایی که محور $j\omega$ خود ناحیه همگرایی تبدیل لاپلاس آن باشد یعنی سیستم پایدار باشد.

$$G(j\omega) = G(s)\Big|_{s=j\omega}$$

- ناحیه همگرایی بسمت راست آخرین قطب ← آخرین قطب باید سمت چپ محور $j\omega$ باشد.

$$\frac{1}{s-2} \not\rightarrow \frac{1}{j\omega-2}$$

* نمایش $G(j\omega)$:

$$G(j\omega) = R(\omega) + jX(\omega)$$

$$\begin{cases} R(\omega) = Re\{G(j\omega)\} \\ X(\omega) = Im\{G(j\omega)\} \end{cases}$$

$$G(j\omega) = M(\omega) \cdot e^{j\phi(\omega)}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \sqrt{R^2(\omega) + X^2(\omega)} \\ \phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{X(\omega)}{R(\omega)}\right) \end{cases}$$

* منحنی های پاسخ فرکانسی:

(۱) منحنی قطبی یا نایکوئیست

خود موهومی و حقیقی در صفحه $G(j\omega)$

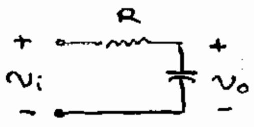
(۲) منحنی های بودی:

دامنه و فاز در دو منحنی جدا برحسب فرکانس (راحت تر است آنها را برای سیستمهای تو ام الف)

(۳) لگاریتم اندازه ـ فاز:

(بدست آوردن مشخصه حلقه بسته از روی حلقه باز)

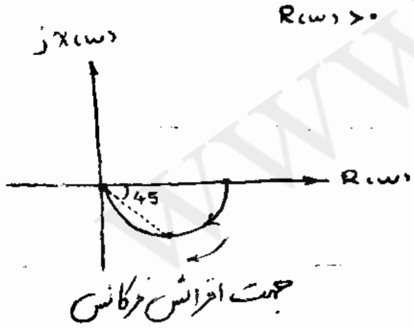
* منحنی های قطبی : Polar_Plot *



$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{\frac{1}{CS}}{R + \frac{1}{CS}} = \frac{1}{1+RCS}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} \qquad \left.\begin{array}{l}\tau = RC \\ \omega_1 = \frac{1}{RC}\end{array}\right\} \Rightarrow G(j\omega) = \frac{1}{1+j(\frac{\omega}{\omega_1})} = \frac{1-j(\frac{\omega}{\omega_1})}{1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2}$$

$$G(j\omega) = \underbrace{\frac{1}{1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2}}_{R(\omega)>0} + j\underbrace{\frac{-\frac{\omega}{\omega_1}}{1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2}}_{X(\omega)<0}$$



$$\Leftarrow \begin{cases} \omega = 0 \rightarrow R(\omega) = 1 , X(\omega) = 0 \\ \omega = \infty \rightarrow R(\omega) = 0 , X(\omega) = 0 \\ \omega = \omega_1 \rightarrow R(\omega) = 0.5 , X(\omega) = -0.5 \end{cases}$$

فاز و اندازه :

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{1}{(1+(\frac{\omega}{\omega_1})^2)^{1/2}} \\ \phi(\omega) = -tg^{-1}(\frac{\omega}{\omega_1}) \end{cases}$$

$$\omega = 0 \Rightarrow \begin{cases} M = 1 \\ \phi = 0 \end{cases}$$

$$\omega = \infty \Rightarrow \begin{cases} M = 0 \\ \phi = -90^\circ \end{cases}$$

* مثال:

$$G(s)=\frac{K}{s(1+\tau s)}$$

$$G(j\omega)=\frac{K}{j\omega(1+\tau j\omega)}=\frac{K}{(j\omega-\omega^2\tau)}$$

$$\begin{cases} M(\omega)=\dfrac{K}{((\omega^2\tau)^2+\omega^2)^{1/2}} \\ \phi(\omega)=-tg^{-1}\left(\dfrac{\omega}{-\omega^2\tau}\right)=-tg^{-1}\left(\dfrac{-1}{\omega\tau}\right) \end{cases}$$

- باید دقت کنیم کدام ربع مثلثاتی است.

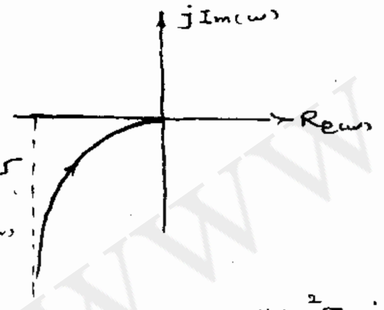
- بهتر است فاکتورها را جدا در نظر گرفته تا آنها را جمع کنیم:

$$\phi(\omega)=-(\phi(j\omega)+\phi(1+j\omega\tau))$$

$$\rightarrow \phi(\omega)=-90-tg^{-1}(\omega\tau)$$

$$\omega=0 \rightarrow \begin{cases} M=\infty \\ \phi=-90 \end{cases} \qquad \omega=\infty \rightarrow \begin{cases} M=0 \\ \phi=-180 \end{cases}$$

فاز نمی‌تواند از 180- بیشتر باشد و نیز نمی‌تواند مثبت‌تر از 90- باشد ← در ربع سوم قرار دارد.



که برای یافتن مجانب باید $Re(\omega)$ و $Im(\omega)$ را محاسبه کرد.

$$G(j\omega)=\frac{K}{-\omega^2\tau+j\omega}$$

$$G(j\omega)=\frac{-K(\omega^2\tau+j\omega)}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \rightarrow \begin{cases} Re=\dfrac{-K\omega^2\tau}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \\ Im=\dfrac{-K\omega}{\omega^4\tau^2+\omega^2} \end{cases}$$

$\omega=0$ مجانب: $R(0)=-K\tau$

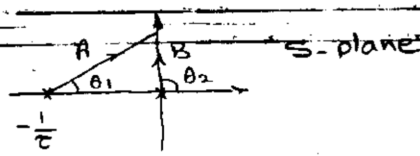
$X(0)=-\infty$

روش سوم: از روی دیاگرام قطب و صفر:

$$G(s)=\frac{K}{s(1+\tau s)}$$

$$G(s)=\frac{K/\tau}{s(s+\frac{1}{\tau})} \Rightarrow G(j\omega)=\frac{K/\tau}{j\omega(j\omega+\frac{1}{\tau})}$$

دیاگرام قطب و صفر:



برداری که از $-\frac{1}{\tau}$ به $j\omega$ وصل می‌شود $\longrightarrow$ $j\omega+\frac{1}{\tau}$

$$G(j\omega)=\frac{K/\tau}{j\omega(j\omega+\frac{1}{\tau})} \qquad \begin{cases} A=j\omega \\ B=j\omega+\frac{1}{\tau} \end{cases}$$

$$\begin{cases} M(\omega)=\dfrac{K(\tau)^{-1}}{|A||B|} \\ \phi(\omega)=-\theta_1-\theta_2 \end{cases}$$

$$\omega=0 \longrightarrow \begin{cases} |A|=\frac{1}{\tau} \quad |B|=0 \\ \theta_1=0 \ , \ \theta_2=+90 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M(\omega)=\infty \\ \phi(\omega)=-90 \end{cases}$$

$$\omega=\infty \longrightarrow \begin{cases} |A|=|B|=\infty \\ \theta_1=\theta_2=+90 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} M(\omega)=0 \\ \phi(\omega)=-180 \end{cases}$$

تذکر: قطبهای سمت راست را نیز با این Trick میتوان بررسی کرد.

* در منحنی پاسخ فرکانسی اضافه کردن هر فاکتور، منجر به انجام کلی محاسبات میشود.
و حذف فاکتور نیز دیده نمی‌شود.
و حل به بعد از لگاریتم استفاده می‌کنیم: $(\log: \times \rightarrow +)$

جلسه بیست دوم : یکشنبه : ۸۲/۲/۲۸

دیاگرام بودی : (Bode-diagram) :

در این دیاگرام منحنی اندازه و فاز برحسب ω رسم میشوند.

$20\log|G|$ — ω

$\phi(\omega)$ — ω

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega\tau} \to |G(j\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2\tau^2)^{1/2}} , \quad \phi(\omega) = -\tan^{-1}\omega\tau$$

برای ϕ بحثی فرق نکرده، ولی برای دامنه:

$$20\log|G(j\omega)| = -10\log(1+\omega^2\tau^2)$$

مهمترین کاربرد : یافتن مجانب ها:

$\omega \ll \frac{1}{\tau} \Rightarrow 20\log|G(j\omega)| = 0\ dB \to$ مجانب فرکانس پایین

$\omega = \frac{1}{\tau} \Rightarrow -10\log 2 = -3dB \to$ در مجانب بالا و پایین در $\frac{1}{\tau} = \omega$ بهم می رسند

← فرکانس گذر - فرکانس قطع

$\omega \gg \frac{1}{\tau} \Rightarrow -20\log(\omega\tau) \to$ مجانب فرکانس بالا

مجانب فرکانس بالا : $-20\log(\omega\tau) = -20\log\omega - \overbrace{20\log\tau}^{cte}$

← اگر محور افقی را بصورت لگاریتمی درج کنیم، تبدیل به یک خط میشود

تعریف : بازه $[\omega_1, \omega_2]$ یک decade (دهه) تلقی میشود اگر: $\omega_2 = 10\omega_1$

شیب مجانب فرکانس بالا : $-20\log\omega_1\tau - (-20\log\omega_2\tau) = -20\log\frac{\omega_1}{\omega_2} = +20\ dB/decade$

تعریف : بازه $[\omega_1, \omega_2]$ یک Octave (اکتاو) تلقی میشود اگر: $\omega_2 = 2\omega_1$

www.teyf.com

شیب مجانب در کاهش بالا : $-20\log\omega_1\tau + 20\log\omega_2\tau = -20\log\frac{\omega_1}{\omega_2} = -6\ dB/_{Octave}$

نکته مهم: بر فاکتور درجه 1 ، معادل شیب $20\ dB/decade$ است و فاز هم میتوان 90° از فاز کم کند.

ترسیم دیاگرام بودی : (Bode Plot) :

$$G(j\omega) = \frac{K_b \prod_{i}^{Q}(1+j\omega\tau_i)}{(j\omega)^N \prod_{m=1}^{M}(1+j\omega\tau_m) \prod_{k=1}^{R}\left(1+\left(\frac{2\zeta_k}{\omega_{nk}}\right)j\omega+\left(\frac{j\omega}{\omega_{nk}}\right)^2\right)}$$

$$\phi(\omega) = \angle G(j\omega) = \angle K_b + \sum_{i}^{Q} tg^{-1}\omega\tau_i - 90N - \sum_{m=1}^{M} tg^{-1}\omega\tau_m - \sum_{k=1}^{R} tg^{-1}\frac{2\zeta_k(\omega/\omega_{nk})}{1-(\omega/\omega_{nk})^2}$$

$$20\log|G(j\omega)| = +20\log|K_b| + \sum_{i}^{Q} 20\log|1+j\omega\tau_i| - 20N\log\omega - \sum_{m=1}^{M} 20\log|1+j\omega\tau_m| + \sum_{k=1}^{R} 20\log|\text{عبارت درجه ۲}|$$

* هدف از دیاگرام بودی این بود که فاکتورهایش را جدا جدا ببینیم.

(۱) فاکتور ثابت : K_b :

$G(j\omega) = K_b$

$20\log|G| = 20\log K_b$

$K_b > 0 \rightarrow \angle G(j\omega) = 0$

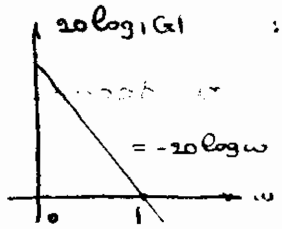
$K_b < 0 \rightarrow \angle G(j\omega) = 180$

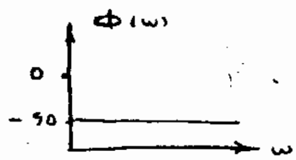
(۲) فاکتور صفر یا قطب در مبداء :

$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$

$20\log|G| = -20\log\omega \rightarrow$

$\angle G(j\omega) = -90$





که شیب خط : $-20\ dB/_{decade}$

* تأثیر فاکتور این است که فقط شیب منحنی دامنه را تغییر میدهد ولی روی فاز تأثیر ندارد یا اینکه 180° جهت را عوض میکند.

* اگر داشتیم:

$$G(jw) = \frac{1}{(jw)^N}$$

$$\rightarrow 20\log|G| = -20N\log w \sim 20N\ {}^{dB}/_{decade}$$ کاهش

$$\Phi(w) = -90N$$

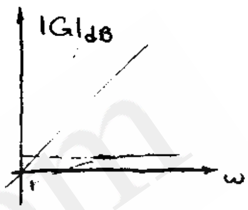
اگر صفر داشتیم (واقعاً سیستمهای فیزیکی در مبداء صفر ندارند) (چون سیستمهای فیزیکی غالباً پایین گذرند).

مثال:

$$G(jw) = (jw)^N$$

$$20\log|G| = 20N\cdot\log w \sim 20N\ {}^{dB}/_{decade}$$: افزایش

$$\Phi(w) = +90N$$



(۳) فاکتور صفر و قطب ساده:

۳-۱: قطب ساده:

$$G(jw) = \frac{1}{1+jw\tau}$$

$w \ll \frac{1}{\tau}$: مجانب فرکانس پایین $\rightarrow |G| = \frac{1}{[1+w^2\tau^2]^{1/2}} \rightarrow 20\log|G| = 0$

$w \gg \frac{1}{\tau}$: مجانب فرکانس بالا $\rightarrow 20\log|G| = -20\log(w\tau) \sim$ کاهش $20\ {}^{dB}/_{decade}$

فرکانس قطع : $w = \frac{1}{\tau} \rightarrow 20\log|G| = -3\,dB$ ↳ خطا Max

* خطا در یک اکتاو زیر فرکانس قطع:

$w\tau = 1/2$ خطا $|G|_{dB}^{Actual} - |G|_{dB}^{Asym}$ (مجانب) $\rightarrow$ مجانب صفر

اصلی $|G(jw)|_{dB} = -20\log(1+w^2\tau^2)^{1/2}$

$$= -20\log\sqrt{1+1/4} = -0.97\,dB$$

* خطای در یک اکتاو بالای فرکانس قطع:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20\log(1+\omega^2\tau^2)^{1/2} + 20\log(\omega\tau) = -20\log\frac{\sqrt{5}}{2} = -0.97\ dB$$

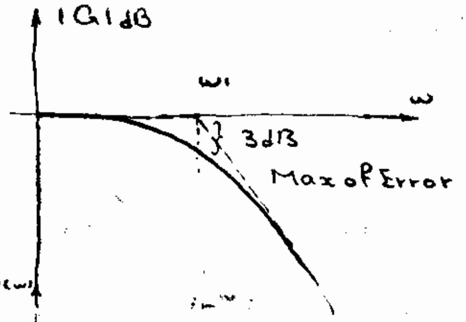
⇐ خطا متقارن است.

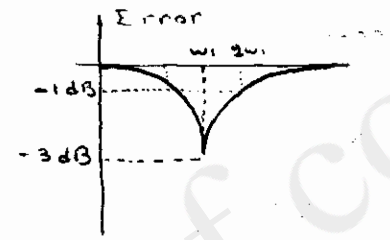
* حداکثر خطا را در فرکانس قطع داریم ($\omega_c\tau=1$) و برابر است با $-3dB$

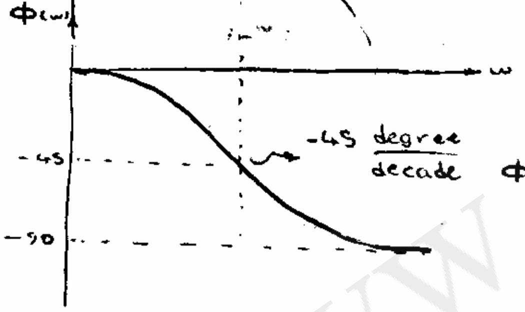
$\omega\tau = 0.1 \rightarrow$ یک دهه زیر فرکانس قطع : $\rightarrow -0.04\ dB$

$\omega\cdot\tau = 10 \rightarrow$ یک دهه بالای فرکانس قطع : $\rightarrow \mp 0.04\ dB$

← خطا در یک دهه پایین و بالای فرکانس قطع در حدود 0.04dB است.







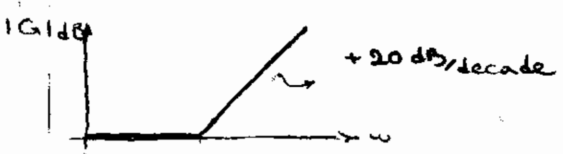
$\phi(\omega) = -tg^{-1}\omega\tau$

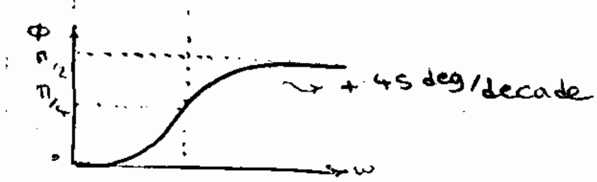
$\omega = \omega_1 = \frac{1}{\tau} \Rightarrow \phi = -\pi/4$

۲-۳-۱) صفر ساده:

$G(j\omega) = 1 + j\omega\tau$

عکس همان حالت:





(۴) دو قطب مختلط :

$$G(s)=\frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad , \quad 0<\xi<1$$

به صورت ثابت زمانی می‌نویسیم : $G(s)=\dfrac{1}{1+\dfrac{2\xi s}{\omega_n}+\dfrac{s^2}{\omega_n^2}}$ $\longrightarrow |G|=\dfrac{1}{\left[\left(1-\dfrac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\dfrac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{1/2}}$

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\xi j\cdot\frac{\omega}{\omega_n}+\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$20\log|G|=-10\log\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

مجانب فرکانس پایین : $\omega\ll\omega_n$: $20\log|G|=0\ dB$

مجانب فرکانس بالا : $\omega\gg\omega_n$ $\quad -40\log\frac{\omega}{\omega_n} \longrightarrow$ با شیب $40\ dB/dec$ افت می‌کند.

مشاهده می‌شود منحنی بستگی‌ای به ξ ندارند.

ولی سیستمهای دارای میرایی، پیکی دارند. اگر سیستمی را با فرکانس طبیعی‌اش تحریک کنیم، تشدید رخ می‌دهد.

$$u\triangleq\frac{\omega}{\omega_n}\longrightarrow |G|^2=\frac{1}{(1-u^2)^2+(2\xi u)^2}$$

$$dG/du=0 \longrightarrow \cdots \longrightarrow u=\sqrt{1-2\xi^2}$$

فرکانس تشدید $\omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$

resonance frequency

$$\begin{cases}\xi=0 \longrightarrow \omega_r=\omega_n\\ \xi>0 \longrightarrow \omega_r\le\omega_n\\ \xi>\frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \text{تشدید نداریم}\end{cases}$$

$$|G|^2_{u_r}=\frac{1}{(1-u^2)^2+4\xi^2u^2} \qquad u_r=\sqrt{1-2\xi^2}$$

$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)| \rightarrow \dots$

ماکزیمم پیک

$$M_{p\omega} = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

$M_{p\omega}$ تنها تابع میرایی سیستم است.

برای $\xi = 0$ ، این پیک پاسخ فرکانسی بی‌نهایت ∞ است در $\omega = \omega_n$ رخ می‌دهد.

www.teyf.com

هادی افشاری

* جلسه بیست و دوم: سه‌شنبه: ۸۲/۲/۳۰

Makeup Class tentative Next Thursday, Khordad: 8, 2PM

پاسخ فرکانسی:

$$G(j\omega)=\frac{1}{1+2\xi(\frac{j\omega}{\omega_n})+(\frac{j\omega}{\omega_n})^2} \qquad 0<\xi<1$$

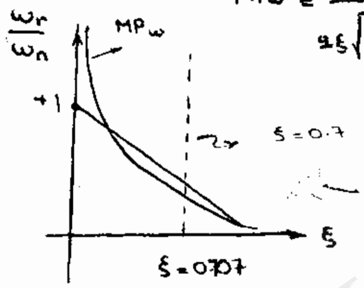
قطب جفت مختلط

منحنی لگاریتم اندازه و فاز برحسب فرکانس (منحنی های بودی) (Bode diagram

Mallab Code: nyquist(sys,w) : قطبی

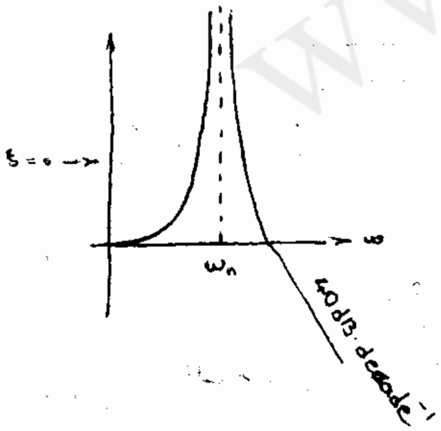
[meg,ph] = bode[sys,w] : بودی

$$|G|_{dB} \Rightarrow \begin{cases} \omega_r=\omega_n\sqrt{1-2\xi^2} \\ MP_\omega=\dfrac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \end{cases} \qquad \xi\uparrow \Rightarrow \begin{cases} \omega_r\downarrow \\ MP_\omega\downarrow \end{cases}$$

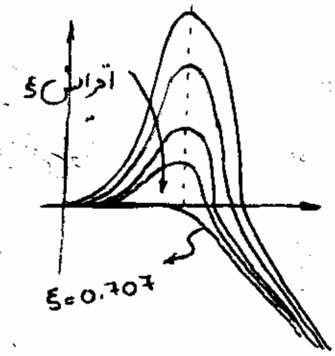


الان با در دست داشتن پاسخ فرکانسی، می‌خواهیم پارامترهای سیستم درجه ۲ را بیابیم:

به ازای ξ های مختلف، پاسخ فرکانسی را رسم می‌کنیم.



$\xi=0.5 \rightarrow$ کم می‌شود $MP_\omega, \omega_n \rightarrow$



بعد از $\xi>0.707$ دیگر تشدید نخواهیم داشت.

MP_ω تنها تابع پارامتر سیستم (ξ) است.

رسم منحنی فاز :

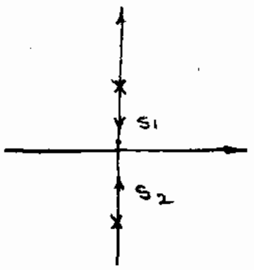
$$u = \frac{\omega}{\omega_n} \qquad G(j\omega) = \frac{1}{1-u^2+j2\xi u} \quad , \quad \phi(\omega) = \measuredangle G(j\omega)$$

$$\phi(\omega) = -tg^{-1}\left(\frac{2\xi u}{1-u^2}\right)$$

$$\begin{cases} u=0 \Rightarrow G(j\omega)=0 \\ u=\infty \Rightarrow \phi(\omega)=-180^\circ \\ u=1 \Rightarrow \phi(\omega)=-90^\circ \end{cases}$$

$u=1 \to \omega=\omega_n$

مقادیر دسته منحنی‌های فاز برای $u=0,1,\infty$ از مقادیر ثابتی (بدون وابستگی به ξ) عبور می‌کند. $\Leftarrow$



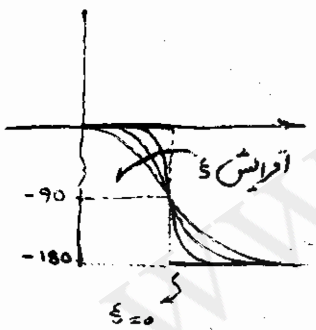
$$\xi=0 \Rightarrow G(j\omega)=\frac{1}{1+\frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$p_1, p_2 = \pm j\omega_n$$

$0<\omega<\omega_n \to \measuredangle s_1=-90 \quad \measuredangle s_2=+90 \to G(j\omega)=-(-90+90)=0$

$\omega_n<\omega \to \measuredangle s_1=+90 \quad \measuredangle s_2=+90 \to G(j\omega)=-(90+90)=-180$

برای $\xi=0$ منحنی فاز گسسته است :



* سیستمهای مینیمم فاز و نامینیمم فاز : (Minimum and Non-minimum Phase Systems)

سیستمهایی که صفر یا قطب سمت راست دارند، نامینیمم فاز هستند.

غلط مصطلح : سیستمهای دارای صفر سمت راست، نامینیمم فاز گویند

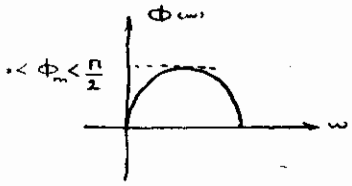
برای منحنی دامنه داده شده، فقط یک تابع تبدیل وجود دارد که منحنی فاز آن در مقایسه با بقیه توابع تبدیلی که دارای منحنی دامنه مشابه هستند، ولی فاز متفاوت دارند، مینیمم است، به آن تابع تبدیل مینیمم فاز اطلاق می‌شود و به بقیه سیستمهای نامینیمم فاز.

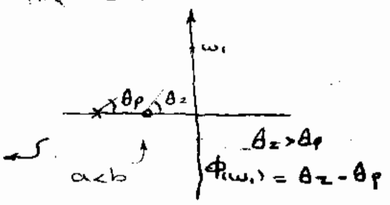
* مثال:

$$G_1(j\omega)=\frac{j\omega+a}{j\omega+b} \qquad G_2(j\omega)=\frac{j\omega-a}{j\omega+b}$$

$$\begin{cases}|G_1|=\dfrac{(a^2+\omega^2)^{1/2}}{(b^2+\omega^2)^{1/2}}\\[2ex] |G_2|=\dfrac{(a^2+\omega^2)^{1/2}}{(b^2+\omega^2)^{1/2}}\end{cases} \rightarrow |G_1|=|G_2|$$

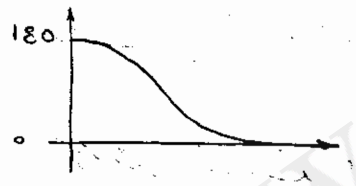
$$\measuredangle G_1=\Phi_1(\omega)=tg^{-1}\frac{\omega}{a}-tg^{-1}\frac{\omega}{b}$$





$$\measuredangle G_2=\Phi_2(\omega)$$

$$\begin{cases}\omega=0 \rightarrow \Phi_2(\omega)=180\\ \omega=\infty \rightarrow \Phi_2(\omega)=0\end{cases}$$



رنج سیستم قبلی 90 و 0 بود درحالیکه رنج سیستم دوم 180-0 است.

سیستم 1، سیستم مینیمم فاز بود.

G_1 و G_2 مشخصه دامنه یکسانی داشتند ← باید شباهتی با یکدیگر داشته باشند

$$G_2(j\omega)=\frac{j\omega-a}{j\omega+b}\times\frac{j\omega+a}{j\omega+a} \rightarrow G_2(j\omega)=\frac{j\omega+a}{j\omega+b}\cdot\frac{j\omega-a}{j\omega+a} \rightarrow$$

$$G_2(j\omega)=\underbrace{\frac{j\omega-a}{j\omega+a}}_{A(j\omega)}\cdot G_1(j\omega)$$

می‌خواهیم ببینیم چگونه تابع تبدیل سیستم ۲ را از تابع تبدیل سیستم ۱ بسازیم؟

$A(\omega) \Rightarrow \forall \omega : |A(\omega)| = 1 \rightarrow$ All Pass Filter

$A(\omega)$ تابع تبدیلی بصورت all-pass-filter است که تابع تبدیلی حقیقی گویا نیست و تمام صفرو قطبهایش نسبت به محور ها قرینه است.

* مثال: تابع تبدیل تأخیر انتقال تمام گذر است:

$$A(s) = e^{-\tau s}$$

$$\rightarrow A(j\omega) = e^{-j\omega\tau} \Rightarrow |A(j\omega)| = 1$$

$$\phi(\omega) = -\omega\tau$$

- تذکر: تابع تبدیل تأخیر انتقال حقیقی گویا نیست ولی در عمل وجود دارد.

* فالورهای all-pass که به سیستم اضافه می‌شود باعث می‌شوند که از یک فرکانس به بعد $|G| = 1$ شود. فالورهای all-pass روی منحنی اندازه بی اثرند و تنها روی منحنی فاز موثرند. به کمک منحنی فاز می‌توان به نوع فالوور all-pass پی برد.

نتیجه: اگر سیستم مینیمم فاز باشد، از روی مشخصه دامنه، مشخصه فاز را می‌توانیم بسازیم.

توضیح: برای سیستم مینیمم فاز $A(\omega) = 1$ است. اما در سیستم نامینیمم فاز است نمی‌دانیم چه تابع تمام گذری ضرب شده است ← بدون منحنی فاز نمی‌توانیم آن را تشخیص دهیم.
و چون تعداد نامحدود تابع all-pass وجود دارد که همان منحنی اندازه ولی منحنی فاز متفاوت را می‌دهد.

- صفر سمت راست دارای تأخیری باشد.

. قضیه بود: (Bode Theorem)

برای توابع تبدیل مینیمم فاز، فاز تابع تبدیل بطور یکتا، توسط منحنی اندازه می‌تواند بدست آید. در واقع در هر فرکانس، اندازه و گسترش توسط حقیقت تبدیل هیلبرت به هم مرتبط می‌شوند ولی برای توابع نامینیمم فاز درست نیست. زیرا ضرب یک تابع تمام گذر در توابع تبدیل، منحنی اندازه آن را تغییر نمی‌دهد ولی منحنی فاز را تغییر می‌دهد.

$$\measuredangle G(j\omega_0) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\,Ln|G|}{dv}\, Ln\, Cotg\frac{|v|}{2}\, dv + \measuredangle \prod_{i=1}^{K}\left(\frac{j\omega_0 + z_i}{j\omega_0 - z_i}\right) \quad , \quad v = Ln\frac{\omega}{\omega_0}$$

* تشخیص سیستم مینیمم فاز

$$G(s) = \frac{s^m + \cdots}{s^n + \cdots}$$

اگر بدانیم گین مثبت است

$$G(s) = \frac{1}{s^{n-m}} \quad : s \to \infty$$

$$\omega \to \infty \Rightarrow \measuredangle G(j\omega) = -90(n-m)$$

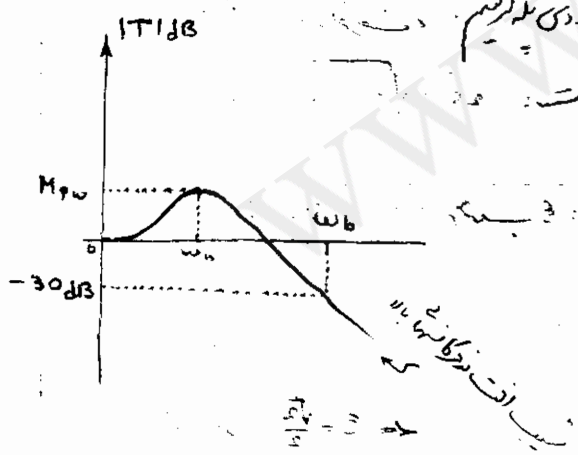
اگر سیستم مینیمم فاز باشد، در نهایت $\Phi(\omega) = -90(n-m)$

• تذکر: برای همه سیستمها در فرکانسهای بالا منحنی اندازه با شیب $-20(n-m)\,.\frac{dB}{decade}$ افت می‌کند.

* اندازه‌های عملکرد برحسب پاسخ فرکانسی:

به یاد دارید که برای سیستم زمانی، پاسخ زمانی سیستم درجه ۲ را مد نظر گرفتیم

در حیطهٔ فرکانس هم: پاسخ فرکانسی مطلوب، سیستم درجه ۲ است:



$T_r \downarrow \;, T_s \uparrow \;\leftarrow\; \xi \downarrow$

سرعت سیستم

• اندازه‌های عملکرد:

(۱) $M_{p\omega}$: پیک پاسخ فرکانسی

(۲) ω_b: پهنای باند

(۳) cut-off rate: شیب افت پاسخ فرکانسی در فرکانسهای بالا

تذکر: وقتی طراحی در حوزه فرکانس است (مثل طراحی فیلتر) ← اندازه های عملکرد در حوزه فرکانس در اختیار است.

اما وقتی می خواهیم سیستم زمانی طراحی کنیم، اما ابزاری که در اختیار داریم، فرکانسی است باید به معیارهای پایداری و سرعت توجه کنیم. و اکنون ارتباط این معیارها با حوزه فرکانس را بدانیم:

پایداری در زمان به PO بستگی دارد (چون PO فقط به ξ بستگی دارد و اگر ξ بیشتر باشد ← پایداری نسبی بیشتر است)
(چون از محور jω دور می شویم)

در حوزه فرکانس پایداری مربوط است به $M_{P\omega}$

← پیک پاسخ فرکانسی معیاری از پایداری است: M_P بالا یعنی پایداری نسبی کمتر زیرا ξ کوچکتر است.

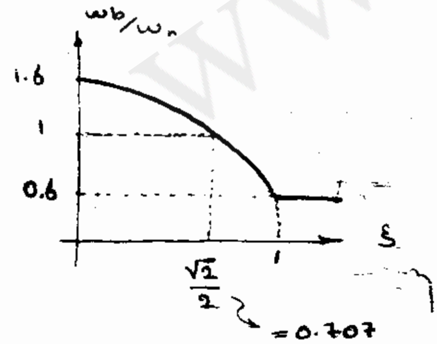
معیار سرعت در حوزه فرکانس، پهنای باند است.

پهنای باند معیاری است از سرعت، زیرا سیستمی با پهنای باند بیشتر می تواند فرکانسهای بالاتری عبور دهد ← سریعتر است.

تذکر: بنابه تعریف، ω_b فرکانسی است که در آن دامنه به $-3dB$ می رسد.

$$|T|_{dB}=-3\,dB \Rightarrow |T|=0.707 \Rightarrow \omega_b=\omega_n\left[1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2(1-\xi^2)}\right]$$

رسم نمودار $\frac{\omega_b}{\omega_n}$ برحسب ξ:



نتیجه: در $\xi=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ← $\omega_b=\omega_n$

* در ξ ثابت، با افزایش ω_b، ω_n هم زیاد می شود ← سرعت سیستم زیاد می شود ← درست است که پهنای باند معیاری از سرعت است.

* در ω_n ثابت، برای افزایش ω_b، باید ξ را کم کنیم.

www.teyf.com

* سرعت را نشان‌ساز با T_r و T_p تعریف می‌کنیم (نه T_s)

* جلسه بیست و سوم :

یکشنبه : ۸۲٫۳٫۴

پاسخ فرکانسی: منحنی‌های بودی:

از روی پاسخ فرکانسی می‌توان نوع سیستم را یافت:

تعداد انتگرالگیرهای حلقه

از روی دیاگرام اندازه پاسخ فرکانسی می‌توان نوع سیستم را یافت :

$$GH(s)=\frac{K(1+T_{z1}s)(1+T_{z2}s)\cdots(1+T_{zm}s)}{s^N(1+T_{p1}s)(T_{p2}s+1)\cdots(1+T_{pn}s)}$$

در فرکانسهای پایین، با ابتدای منحنی در حوالی فرکانس صفر می‌توان N را از روی مشخصه فرکانسی یافت .

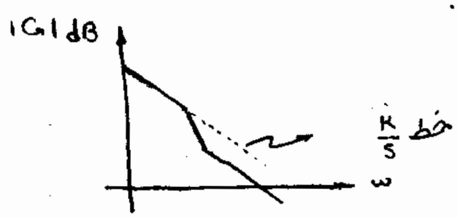
ثابت خطای موقعیت نیز با ابتدای منحنی اندازه در حوالی فرکانسهای صفر بدست می‌آید:

$$N=0 \rightarrow \lim_{s\to 0} GH(s)=K$$

برای هر سیستم نوع یک ثابت خطا غیر صفر و غیر بینهایت وجود دارد که از روی مشخصه اندازه پاسخ فرکانسی می‌توان یافت .

$$N=1 \rightarrow \lim_{s\to 0} GH(s)=\frac{K}{s} \quad \text{or} \quad \lim_{\omega\to 0} GH(j\omega)=\frac{K}{j\omega}$$

منحنی اندازه پاسخ فرکانسی (البته منحنی بودی آن) یک خط صاف با شیب $-20\,dB/decade$ است



باید بتوانیم ثابت خطای سرعت را بیابیم :

$$K_v=\lim_{s\to 0} sGH(s)$$

منحنی اندازه در فرکانسهای پائین را ادامه میدهیم تا خط 0dB (در $\omega=\omega_1$) :

$$20\log\frac{K}{\omega_1}=0 \rightarrow \underbrace{K=\omega_1}_{\text{ثابت خطای سرعت}}$$

[illegible] : ۲،۳،۲۸

برای N های بزرگتر به همین صورت عمل میکنیم.

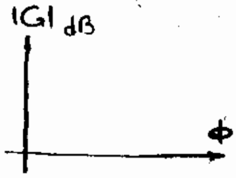
* دیاگرام لگاریتم اندازه - فاز :

تاکنون دو دسته منحنی داشتیم :

قطبی : $G(j\omega)$

بودی :
- لگاریتم اندازه - برحسب فرکانس
- لگاریتم فاز برحسب فرکانس

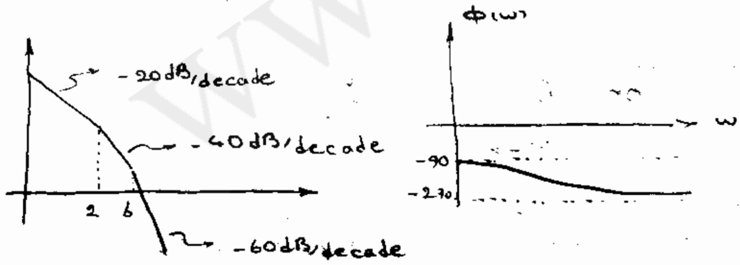
و اما دیاگرام لگاریتم اندازه - فاز :



- اطلاعات اندازه و فاز از روی دیاگرام بودی بدست می آید.

* مثال :

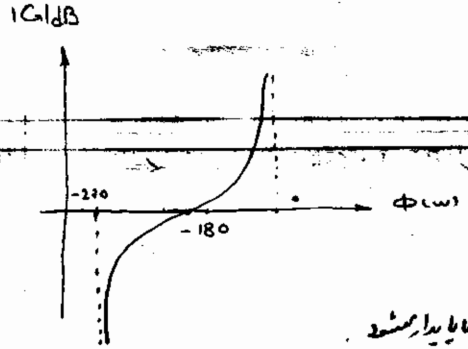
$$GH(j\omega)=\frac{5}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+\frac{j\omega}{6})}$$



توضیح : - در شروع منحنی |G| با شیب -20dB/decade افت میکند.

- اولین شکست در $1+0.5\omega=0 \rightarrow \omega_1=2$ می رسیم و شیب افت 40 میشود.

- برای منحنی فاز، $j\omega$ در مخرج یک فاز $\frac{\pi}{2}$ دائمی دارد. و هر ریشه درجه ۱ (قطب درجه ۱) حداکثر $\frac{\pi}{2}$ افت فاز دارد.



بررسی پایداری:

فرضا $T = \dfrac{1}{1+G}$ ⟸ اگر $\left\{\begin{array}{l} |G|=1 \\ \angle G = 180 \end{array}\right.$ ← T ناپایدار میشود.

$\left\{\begin{array}{l} |G|_{dB}=0 \\ \Phi=180 \end{array}\right.$ ← در بررسی پایداری باید دید که:

- در $\Phi=180$: منحنی اندازه چقدر با صفر فاصله دارد.

- در $|G|_{dB}=0$ ، منحنی فاز چقدر با 180 فاصله دارد

www.teyf.com