پایداری:

پایداری یکی از مهمترین پارامترهای سیستم کنترل است.

پایداری
- مطلق : یعنی اینکه پایدار است یا خیر
- نسبی : یعنی سیستم چقدر در نزدیکی مرز پایداری است. یعنی سیستم پایدار چگونه ناپایدار می‌شود و یا سیستم ناپایدار چگونه پایدار می‌شود

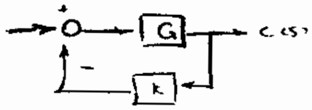
پایداری
- BIBO : هر ورودی محدود، خروجی محدود، نتیجه می‌دهد.
- Internal Stability (پایداری داخلی) : تمام سیگنالهای سیستم باید محدود باشند.

شرط پایداری
- BIBO : قطبهای سیستم اکیداً سمت چپ محور $j\omega$ باشند.
- داخلی : مقادیر ویژه ماتریس A سمت چپ محور $j\omega$ باشند.

اگر حذف صفر-قطب سمت راست نداشته باشیم، پایداری داخلی و BIBO معادل یکدیگر هستند.

یعنی: در اینصورت مقادیر ویژه ماتریس A، همان قطبهای سیستم است.

• پایداری BIBO : همه قطبهای سیستم سمت چپ محور jω باشد.



$G=\frac{n_p}{d_p}$ $\quad H=\frac{n_h}{d_h}$ $\quad T(s)=\frac{G(s)}{1+H(s)G(s)}$

$$\rightarrow T(s)=\frac{\frac{n_p}{d_p}}{1+\frac{n_p}{d_p}\cdot\frac{n_h}{d_h}}=\frac{n_p\cdot d_h}{d_p d_h+n_p n_h} \qquad \Delta(s)=d_p\cdot d_h+n_p n_h=0$$

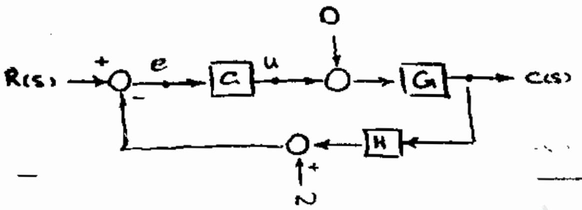
ریشه‌های معادله مشخصه، قطبهای سیستم CL (Closed loop) است.

* شرط پایداری داخلی: × سمت راست صفحه s

اگر حذف صفر و قطب در RHP در طول حلقه صورت نگرفته باشد ← این دو نوع پایداری یکی هستند.

یعنی باید ریشه‌های $\Delta(s)$ را بررسی کنیم.

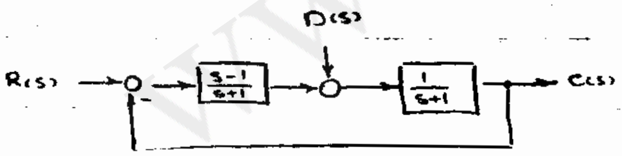
حالت کلی:



• برای پایداری داخلی: (۱) باید حذف صفر و قطب در RHP نداشته باشیم

(۲) ریشه‌های $\Delta(s)$ باید اکیداً سمت چپ محور jω باشند.

* کاربرد:



پایدار نیست: $\frac{C(s)}{D(s)}$ $\qquad$ $\frac{C(s)}{R(s)}$ پایدار است

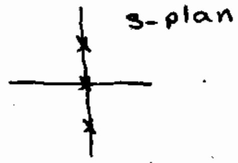
تذکر: چون در سیستمهای فیزیکی نویز، اغتشاش، (distortion) وجود دارد ← باید پایداری داخلی چک شود.

یعنی حالت حذف صفر و قطب در RHP را به عنوان راه فراری برای اثبات پایداری BIBO استفاده نمی‌کنیم

* پایداری مرزی:

پایداری مرزی یعنی قطبهای ساده روی محور jω هستند.

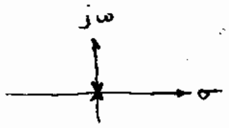
یعنی ناپایداری نمایی وجود ندارد.



یعنی با اندکی تغییر در پارامترها، یا دارد پایداری BIBO می‌شویم یا سیستم ناپایدار می‌شود.

بعضی از ورودیهای محدود در پایداری مرزی، می‌توانند سیستم را ناپایدار کنند.

مثال:



$R(s) = \frac{1}{s}$ $\longrightarrow C(s) = \frac{1}{s^2}$ (unbounded)

$G(s) = \frac{1}{s}$

مثال:

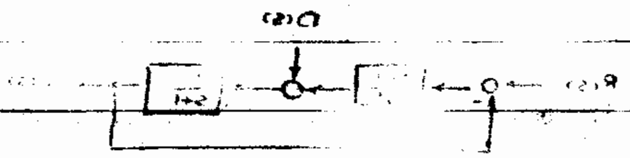
$R(s) = \frac{K}{s^2 + \omega^2}$

$\longrightarrow C(s) = \frac{K\omega}{(\omega^2 + s^2)^2} \longrightarrow \mathcal{L}^{-1} \longrightarrow c(t) = Kt \sin \omega t$ نامحدود

$G(s) = \frac{\omega}{\omega^2 + s^2}$

تذکر: اگر قطب تکرار روی محور jω باشد، سیستم ناپایدار است.

این ناپایداری به دلیل نمایی بودن نیست. به دلیل ایجاد عامل t است.



* جلسه چهاردهم :   سه‌شنبه : ۸۲/۲/۲

... ادامه مباحث پایداری:

* مثالها :

پایداری { BIBO : ریشه‌های معادله مشخصه، اکیداً سمت چپ ($\Delta(s)$)
Internal : No RHP Pole-Zero Cancellation $\rightarrow \Delta(s) \rightarrow$ }

در این جلسه می‌خواهیم بدون حل کردن معادله $\Delta(s)=0$ ، درمورد ریشه‌های آن بحث کنیم:

$$\Delta(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0=0$$

به شکل فاکتور r_i :

$i=1,2,\dots,n$

$$\Delta(s)=(s-r_1)(s-r_2)\dots(s-r_n)$$

$$\Delta(s)=s^n-(r_1+r_2+\dots+r_n)s^{n-1}+(r_1r_2+\dots+r_{n-1}r_n)s^{n-2}+\dots+(-1)^n(r_1r_2\dots r_n)$$

پایداری یعنی : مقادیر حقیقی r_i ها، باید منفی باشد.

شرط لازم (ولی ناکافی) : هر ضرایب $\Delta(s)$ مثبت باشد. ($a_i>0$) (هر ضرایب متحدالعلامت باشد)
هر ضرایب $\Delta(s)$ باید وجود داشته باشد.

* مثال:

$$\Delta(s)=s^3+s^2+2s+8$$

$$\rightarrow \Delta(s)=(s+2)(s^2-s+4)$$

$$=(s+2)(s-(\frac{1\pm\sqrt{15}j}{2}))$$

شرط لازم را دارد ولی 2 ریشه سمت راست دارد.

... بررسی شرایط لازم و کافی :

* معیار راث - هرویتز

این روش بر اساس تشکیل یک جدول یا ماتریس است.

و درایه‌های این ماتریس بطور مستقیم یا غیرمستقیم از ضرایب $\Delta(s)$ یافت می‌شود :

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0$$

* آرایه راث :

$$\begin{array}{c|cccc}
s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots \\
s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & \cdots \\
\vdots & c_1 & c_2 & c_3 & \cdots \\
s^1 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
s^0 = 1 & & & &
\end{array}$$

- دو سطر اول مستقیماً از $\Delta(s)$ بدست می‌آید.

- سطرهای بعدی از ضرایب دو سطر قبل یافت می‌شود به این صورت :

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}}{a_{n-1}} \qquad b_3 = \cdots$$

$$c_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_2 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-5} \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}}{b_1} \qquad c_3 = \cdots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

بعد از این که سطرهای جدول راث تکمیل شد، داریم :

* شرط لازم و کافی برای اینکه ریشه‌های $\Delta(s)$ همگی سمت چپ محور موهومی باشند، آنست که در ستون نخست جدول تغییر علامتی مشاهده نشود.

* تعداد ریشه‌های سمت راست = تعداد تغییر علامتها در ستون اول آرایه راث است.

- هنگام پرکردن آرایه‌های جدول راث سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد :

(۱) جدول بدون مشکل کامل شود (هیچ عنصری در ستون اول صفر نشود)

(۲) یکی از درایه‌های ستون اول صفر شود.

(۳) تمام درایه‌های یک سطر صفر شوند.

اکنون به بررسی این سه حالت می‌پردازیم:

حالت اول: جدول بطور ordinary پر شود

مثال: سیستم درجه ۲:

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

می‌دانیم در سیستم درجه ۲، اگر تمام ضرایب مثبت باشد، سیستم پایدار است

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & a_0 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} a_2>0 \\ a_1>0 \\ a_0>0 \end{array}\right\} \text{پایداری}$$

مثال: سیستم درجه ۳:

$$\Delta(s) = a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & a_3 & a_1 \\ s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_2} & 0 \\ s^0 & a_0 & \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} a_3, a_2, a_1, a_0 > 0 \\ a_2 a_1 > a_0 a_3 \end{array}\right\} \text{شرط پایداری}$$

مثال:

$$\Delta(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 24 \\ s^1 & -22 & 0 \\ s^0 & 24 & \end{array}$$

دو ریشه سمت راست داریم ← ناپایدار است

برای آنکه ریشه در صفر باشد، باید $a_0 = 0$ باشد.

چون معادله اخیر درجه ۳ بود و دو ریشه سمت راست داریم، ریشه‌ای که روی محور ... باشد نداریم. (چون اینکه ریشه‌ها باید مزدوج باشند) ولی در معادله درجه ۳ حداکثر ۳ ریشه داریم).

حالت دوم: یکی از درایه‌های ستون اول، صفر باشد:

- راه حل (۱): عنصر صفر را با ε جایگزین نموده و محاسبات را ادامه می‌دهیم (ε عدد مثبت کوچکی می‌باشد)

در پایان ε را به سمت صفر میل می‌دهیم و تغییر علامتها را بررسی می‌کنیم.

- راه حل (۲): در یک فاکتور $(s+\alpha_i)$ که $\alpha_i>0$ ضرب می‌کنیم (غالباً جواب می‌دهد).

مثال: $\Delta(s)=s^5+2s^4+2s^3+4s^2+11s+10$

s^5	1	2	11
s^4	2	4	10
s^3	$0 \to \varepsilon$	6	0
s^2	b_1	b_2	
s^1	c_1	0	
s^0	10		

$$b_1=\frac{4\varepsilon-12}{\varepsilon}=4-\frac{12}{\varepsilon}\simeq-\frac{12}{\varepsilon}$$

$$b_2=\frac{10\varepsilon-0}{\varepsilon}=10$$

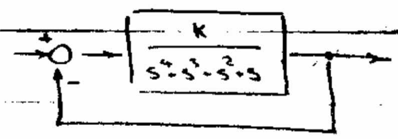
$$c_1=\frac{6b_1-10\varepsilon}{b_1}=6-\frac{10\varepsilon}{b_1}\simeq 6$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} b_1=-\frac{12}{\varepsilon}<0$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c_1=6>0$$

⇐ ۲ تغییر علامت دارد پس دو ریشه سمت راست دارد

مثال: $\Delta(s)=s^4+s^3+s^2+s+K$



s^4	1	1	K
s^3	1	1	0
s^2	$0\to\varepsilon$	K	0
s^1	$\frac{\varepsilon-K}{\varepsilon}$	0	
s^0	K		

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon-k}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}1-\frac{k}{\varepsilon}=\begin{cases}-\infty & ; k>0\\ +\infty & ; k<0\end{cases}$$

$k>0$ ← دو تغییر علامت ← دو ریشه سمت راست.

$k<0$ ← یک تغییر علامت ← یک ریشه سمت راست.

$k=0$ ← $\Delta(s)$ یک ریشه در مبداء دارد.

حالت سوم: وقتی همه ضرایب یک سطر صفر شوند:

(۱) یعنی فاکتور مشترک در تقسیمات متوالی وجود دارد. (اصولاً ضرایبی که بدست می‌آوریم از تقسیمات متوالی بدست آمده‌اند)

(۲) نشان‌دهنده ریشه‌های متقارن است.

مثال: $\Delta(s)=2s^4+4s^2+1$

همانطور که دیده می‌شود، ریشه متقارن خواهد بود.

$$\begin{array}{ll|lll} \Delta_1: & s^4 & 2 & 4 & 1\\ \Delta_2: & s^3 & 0 & 0 & 0\\ & s^2 & & & \end{array}$$

$\Delta(s)=\Delta_1(s)\cdot\Delta_2(s)$

(۳) معادله کمکی از سطر قبل تشکیل می‌دهیم. (که ریشه‌های آن متقارن است)

هرگز در سطر زوج، صفر نخواهد شد:

$$\begin{array}{l|lll} s^5 & 2 & 4 & 1\\ s^4 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$\Delta(s)=2s^2+4s^3+s=s(2s^4+4s^2+1)$ ؛ [illegible]

(۴) ریشه‌های معادله کمکی، ریشه‌های معادله اصلی نیز هستند.

(۵) معادله کمکی زوج است.

* در حالت سوم جدول را چگونه ادامه دهیم؟

– از سطر قبل، یک معادله کمکی تشکیل می‌دهیم: $\underset{\text{Auxilary}}{A(s)}$ ← { زوج ؛ ریشه‌های متقارن که ریشه‌های $\Delta(s)$ نیز هست.

- ضرایب مشتق $A(s)$ را به جای سطر کاملاً صفر قرار می‌دهیم: $P(s) = \frac{dA(s)}{ds}$

و جدول را ادامه می‌دهیم.

- الزاماً تعداد تغییر علامتها متناظر با تعداد ریشه‌های سمت راست خواهد بود.

• مثال: محدودهٔ پایداری: $\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & \frac{8-K}{2} & 0 \\ s^0 & K & \end{array}$$

شرط پایداری:

$$\left.\begin{array}{l} 8-K>0 \\ K>0 \end{array}\right\} \Rightarrow \underbrace{0<K<8}_{\text{Range پایداری}}$$

به ازای $K=8$ در مرز پایداری سیستم؛

اگر $K=8 \Rightarrow$ داریم؛

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & 8 \\ s^1 & 0 & 0 \\ s^0 & 8 & \end{array} \rightarrow \underbrace{A(s) = 2s^2+8}_{\text{معادله کمکی}} \rightarrow \underbrace{s = \pm 2j}_{\text{ریشه‌های متقارن}}$$

$$\frac{dA(s)}{ds} = 4s \quad (2) \rightarrow \begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & 8 \\ s^1 & 4 & 0 \\ s^0 & 8 & \end{array} \rightarrow$$

چون تغییر علامت نداریم پس ریشه سمت راست نداریم

از طرفی می‌دانیم به ازای $K=8$ ، ریشه سوم در سمت چپ است.

پس برای اینکه متقارن باشد، همه ریشه‌ها روی محور $j\omega$ هستند.

• مثال:

s^9 بقیه ریشه‌های $\Delta(s)$ را مشخص می‌کند

$A(s) \rightarrow s^8$

s^7 ، s^6 ، $\vdots$: تغییر علامت از اینجا به بعد ریشه‌های $A(s)$ را مشخص می‌کند

$$\begin{array}{c|cccc} s^9 & & & & \\ s^8 & & & & \\ s^7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s^6 & & & & \\ \vdots & & & & \end{array} \sim \begin{array}{c|c} s^9 & 2 \\ s^8 & 1 \\ s^7 & 2 \\ & -3 \\ \vdots & 3 \\ & 3 \end{array}$$

توضیحات :

چون ۲ تغییر علامت داریم ← ۲ ریشه سمت راست داریم.

به علت تقارن ریشه ها، دو ریشه هم در سمت چپ باید داشته باشیم

چون مجموعاً 8 ریشه مربوط به $A(s)$ است ← ۴ ریشه هم بر روی محور $j\omega$ خواهیم داشت.

و چون سیستم 9 ریشه دارد، 1 ریشه باقیمانده مربوط به $B(s)$ است که سمت چپ است.

(البته توجه کنید که از S^9 به S^8 تغییر علامت نداشته ایم)

نتیجه گیری : اطلاعاتی که به دست آورده ایم :

۱) تعداد ریشه های سمت راست

۲) تعداد ریشه های سمت چپ

۳) تعداد ریشه های روی محور $j\omega$

تذکر و یادآوری : اگر تعداد ریشه های سمت راست صفر باشد ولی روی $j\omega$ ریشه داشته باشیم، یا ناپایدار است و یا پایدار مرزی : که بستگی به تکرار بودن یا نبودن ریشه های روی محور $j\omega$ دارد.

اگر مکرر باشد، ناپایدار است و اگر ساده باشد، پایدار مرزی خواهد بود.

* جلسه پانزدهم : یکشنبه ۸۲/۲/۷

* مثال :

$$A(s) = s^5 + 4s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 7s + 4$$

s^5	1	8	7
s^4	4	8	4
s^3	6	6	0
s^2	4	4	0
s^1	$\cancel{0}\ \varepsilon \to 8$	0	0
s^0	4		

$$A(s) = 4s^2 + 4 \to s = \pm j$$

$$P(s) = \frac{dA(s)}{ds} = 8s$$

چون در کل جدول تغییر علامت نداریم به غیر از دو ریشه $A(s)$ که بر روی محور $j\omega$ قرار دارد، بقیه ریشه‌ها سمت چپ است

این سیستم در مرز پایداری است

* مثال :

$$A(s) = s^5 + s^4 + 4s^3 + 24s^2 + 3s + 63$$

s^5	1	4	3
s^4	1	24	63
s^3	-20	-60	0
s^2	21	63	0
s^1	$\cancel{0}\ \varepsilon \to 42$	0	0
s^0	63		

$$A(s) = 21s^2 + 63 \to s = \pm\sqrt{3}j$$

$$P(s) = A'(s) = 42s$$

این سیستم دو ریشه سمت راست محور $j\omega$ دارد.

دو ریشه متقارن روی محور $j\omega$ دارد. و باقیمانده ریشه‌ها سمت چپ خواهد بود.

$$\begin{cases} 2 : RHP \\ 2 : j\omega \\ 1 : LHP \end{cases}$$

* مثال : ریشه‌های تکرار روی محور $j\omega$:

$$A(s) = s^5 + s^4 + 2s^3 + 2s^2 + s + 1$$

s^5	1	2	1
s^4	1	2	1
s^3	$\cancel{0}\ 4$	$\cancel{0}\ 4$	0
s^2	1	1	
s^1	$\cancel{0}\ 2$	0	
s^0	1		

$$A_1(s) = s^4 + 2s^2 + 1 = (s^2+1)^2$$

$$P_1(s) = 4s^3 + 4s = \underbrace{2s(s^2+1)}_{\text{جز جمله‌ای متقارن}}$$

$$A_2(s) = s^2 + 1 \qquad P_2(s) = 2s$$

* وقتیکه ریشه تکرار روی محور $j\omega$ داشته باشیم، بیش از یک سطر صفر خواهد شد. به هر تعداد ریشه تکرار داشته باشیم، به همان تعداد سطر صفر خواهیم داشت.

سیستم مثال اخیر ناپایدار است (نه پایدار مرزی) چون روی محور $j\omega$ ریشه تکراری دارد.

* مثال: (موتور DC)

- حذف قطبهای غیر مسلط:

ثابت زمانی الکتریکی

$$\begin{cases} \tau_a = 0.0003\ S \qquad L_a = 0.003H \\ \tau_m = 0.01333\ S \end{cases}$$

ثابت زمانی مکانیکی

$$G(s) = \frac{4500K}{S(S+361.2)} \Rightarrow T = \frac{G}{1+G}$$

$$T = \frac{4500K}{S^2+361.2S+4500K} \qquad \Delta(s) = S^2+361.2S+4500K$$

این سیستم ساده شده به ازای هر K پایدار است.

البته نمی توان گفت سیستم واقعی هم این شرط پایدار است چون درجه ۳ خواهد بود:

$$G(s) = \frac{1.5\times10^7 K}{S(S+400.26)(S+3008)} \Rightarrow T(s) = \frac{1.5\times10^7 K}{S(S+400.26)(S+3008)+1.5\times10^7 K}$$

$\Delta(s)$

$$\Delta(s) = S^3 + 3408.3\,S^2 + 1{,}204{,}000S + 1.5\times10^7 K$$

S^3	1	1204000
S^2	3408.3	$1.5\times10^7 K$
S^1	b_1	0
S^0	$1.5\times10^7 K$	

$$b_1 = \frac{3408.3\times1204000 - 1.5\times10^7 K}{3408.3}$$

شرط پایداری:

$$K>0 \qquad b>0 \Rightarrow K < \frac{3408.3\times1204000}{1.5\times10^7}$$

$$\Rightarrow 0 < K < 273.57$$

← پس حذف قطب غیر مسلط ما را به تعبیر درستی در مورد پایداری سیستم واقعی نمی رساند.

* پایداری نسبی: فاصله ریشه‌ها تا محور $j\omega$ چقدر است؟

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

معیار راث تعداد ریشه‌های سمت چپ $j\omega$ را به ما می‌دهد.

حال اگر محور $j\omega$ را به سمت چپ شیفت بدهیم (مثلاً روی خط $\sigma = k$) و معیار راث را پیاده کنیم،

تعداد ریشه‌های سمت چپ و راست این خط جدید یافته می‌شود.

$$S_n = S + \alpha \qquad \alpha > 0$$

• معیار راث را اعمال می‌کنیم:

- اگر تعداد تغییر علامت داشت، ← ریشه‌ها سمت راست α هستند ← α را کوچکتر می‌کنیم

- اگر تغییر علامت نداشت ← ریشه‌ها سمت چپ α هستند ← α را بزرگتر می‌کنیم.

- ریشه‌ها روی خط α قرار گیرد.