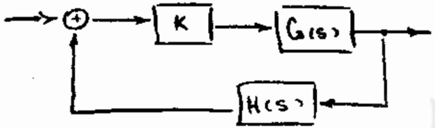
* مکان هندسی ریشه‌ها : فصل ۷ :

هدف : بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه در اثر پارامتر خاص مثل پایداری

بررسی تغییرات ریشه‌های معادله مشخصه نسبت به تغییرات یک پارامتر خاص (که لزوماً K نیست)



$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$$

$$T(s) = \frac{KG(s)}{1 + KGH(s)}$$

$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0 \quad \rightarrow \quad KGH(s) = -1$$

$$\begin{cases} |KGH(s)| = 1 & \text{شرط اندازه} \\ \measuredangle GH(s) = \pm 180(2q+1) \quad \text{و} \quad q = 0, 1, \ldots & \text{شرط زاویه} \end{cases}$$

مضارب فرد 180°

مکان هندسی یعنی تغییر ریشه‌های $\Delta(s)$ به ازای تغییرات K

اگر نقطه S^* در $GH(s)$ قرار داده شود و فاز $\measuredangle GH(s^*)$ مضارب فرد 180 باشد

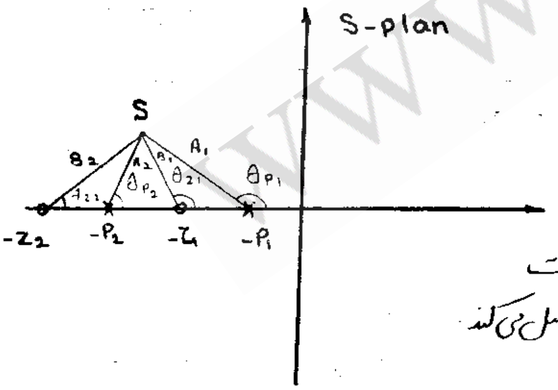
این به ازاء یک گین خاص جزو ریشه‌های معادله مشخصه خواهد بود. به ازای چه گینی؟ گینی که شرط اندازه را تحقق کند.

$$GH(s) = \frac{(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)}$$

برای سیستمهای فیزیکی $n \ge m$

برای حالت $m > n$ حداقل یک قطب در بینهایت خواهیم داشت.

- دیاگرام قطب × و صفر ∘ در صفحه S:

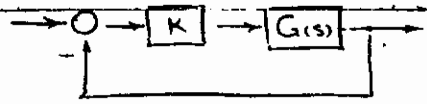


$$\left.\begin{matrix} S+z_i = (S-(-z_i)) \\ S+p_i \end{matrix}\right\}$$ نشاندهنده بردارهایی است که z_i (یا p_i) را به S وصل می‌کند

$$\measuredangle GH(s) = \sum_{i=1}^{m} \measuredangle (s+z_i) - \sum_{i=1}^{n} \measuredangle (s+p_i)$$

$$\begin{cases} \measuredangle GH(s) = \theta_{z_1} + \theta_{z_2} - (\theta_{p_1} + \theta_{p_2}) \\ |GH(s)| = \dfrac{B_1 B_2}{A_1 A_2} \end{cases}$$

* مثال:



$A(s) = 1 + KG(s)$

$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

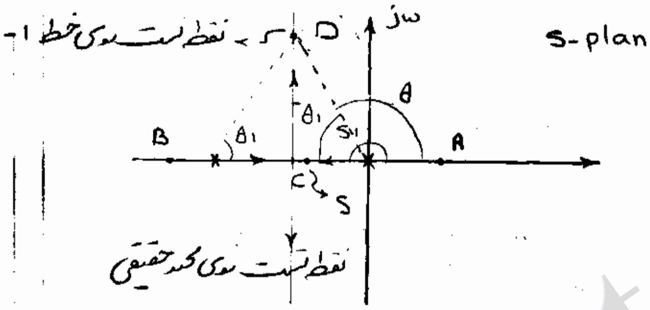
$A(s)=0 \to s(s+2)+K=0 \to s^2+2s+K=0 \to s_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-K}$

$\begin{cases} s_1 = -1+\sqrt{1-K} \\ s_2 = -1-\sqrt{1-K} \end{cases}$ $\qquad K=0 \to \begin{cases} s_1 = 0 \\ s_2 = -2 \end{cases}$

$0<K<1 \to$ { s_1 منفی‌تر ، s_2 مثبت‌تر

$K=1 \to s_1 = s_2 = -1$

$K>1 \to s_{1,2} = -1 \pm j\sqrt{K-1} \to$ اندازه ثابت و فاز تغییر می‌کند



s-plan

$G(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

نقاط حقیقی: نقاط روی محور حقیقی بین ۰ و ۲-

$\measuredangle s_1 = 180$, $\measuredangle s_2 = 0$ } نقطه C

$\measuredangle GH(s) = -(\measuredangle s_1 + \measuredangle s_2) = -180 \leftarrow$

که جزء مکان هست

نقطه D { $\theta = 180 - \theta_1$

$\measuredangle GH = -(180-\theta_1+\theta_1) = -180 \to$

شرط زاویه ارضا می‌شود ← جزء مکان هست.

نقطه A: $\measuredangle GH = 0$

نقطه B: $\measuredangle GH = -360$

} ← شرط زاویه ارضا نمی‌شود ← جزء مکان نیستند.

* مراحل یافتن (1) تابع تبدیل حلقه باز را بصورت فاکتورگیری شده می‌نویسیم.

$GH(s) = \frac{(s+z_1)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)\cdots(s+p_n)}$

۲) دیاگرام قطب، صفر تابع تبدیل حلقه باز را رسم می کنیم.

تعداد شاخه های مکان:

شاخه یعنی مسیری که یک قطب با تغییرات پارامتر طی می کند ($0 < K < \infty$) که برابر n می باشد،

(تعداد قطبهای سیستم حلقه باز)

۳) تقارن نسبت به محور حقیقی:

مکان نسبت به محور حقیقی متقارن است.

چون اگر ریشه مختلط، مزدوج آن نیز جزء مکان است.

۴) نقاط شروع و انتها:

ریشه های $\Delta(s)$ به ازاء $K=0$ کجا هستند؟ با قطبهای $GH(s)$ برابر هستند.

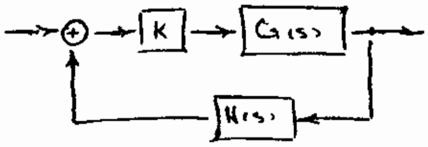
ریشه های $\Delta(s)$ به ازای $K=\infty$ کجا هستند؟ با صفرهای $GH(s)$ برابر هستند.

$$GH(s)=\frac{N_{gh}}{D_{gh}}$$

$$1+KGH(s)=0 \Rightarrow K=\frac{-1}{GH(s)} \Rightarrow \begin{cases} K=0 \Rightarrow GH(s)=\infty \rightsquigarrow \text{قطبهای } GH(s) \\ K=\infty \Rightarrow GH(s)=0 \rightsquigarrow \text{صفرهای } GH(s) \end{cases}$$

اگر K به سمت صفر میل کند (بسیار کوچک باشد):

سیستم حلقه باز و حلقه بسته مانند هم عمل می کنند.



* جلسه شانزدهم : سه شنبه : ۸۲,۲,۹

* مکان هندسی ریشه ها :

بررسی رفتار سیستم حلقه بسته با تغییرات یک یا چند پارامتر خاص

رفتار سیستم توسط قطبها مشخص می شود و قطبها ریشه های معادله مشخصه هستند.

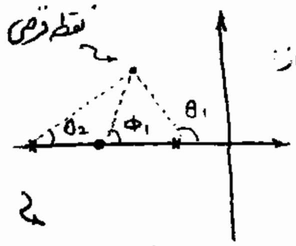
و هدف ، یافتن رفتار سیستم حلقه بسته از روی مشخصات سیستم حلقه باز است ، بدون حل معادله مشخصه.

(با داشتن تابع تبدیل سیستم حلقه باز (داشتن صفرها و قطبهای آن))

$$\Delta(s) = 1 + KGH(s) = 0$$

$$\Delta(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 \rightarrow \Delta(s) = 1 + \frac{a_{n-1}s^{n-1}}{s^n + a_{n-2}s^{n-2} + \dots + a_0}$$

$0 < K < \infty \qquad KGH(s) = -1 \quad \Rightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \measuredangle KGH(s) = (2q+1)180^\circ , \; q = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$



نمودار قطب صفر سیستم حلقه باز : $GH(s)$

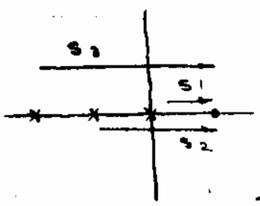
$$GH(s) = \frac{(s+z_1)\dots(s+z_n)}{(s+p_1)\dots(s+p_n)}$$

$$\measuredangle GH(s) = \phi_1 - \theta_1 - \theta_2$$

- ترسیم دیاگرام صفر و قطب
- تعداد شاخه ها : n
- تقارن نسبت به محور حقیقی
- نقاط شروع و انتها : $K = 0 \quad K = \infty$

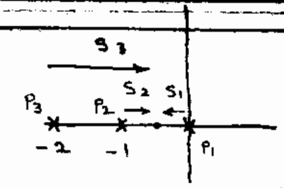
. نقاط روی محور حقیقی عضو مکان :

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$



$\measuredangle s_1 = \measuredangle s_2 + \measuredangle s_3 = 0 \rightarrow$

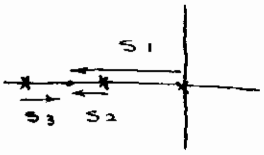
$\measuredangle GH(s) = 0 \Rightarrow$ شرط زاویه ارضا نمی شود



← نقاط سمت راست همگی حذف می‌شوند (جزو مکان نیستند)

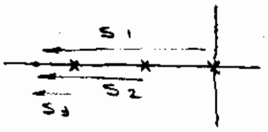
$\angle s_1 = 180$
$\angle s_2 = \angle s_3 = 0$ → $\angle GH(s) = -180$ → OK →

نقاط میان P_1 و P_2 عضو مکان هستند.



$\angle GH(s) = -(180+180+0) = -360^\circ$ → Cancel →

نقاط میان P_2 و P_3 عضو مکان نیستند.

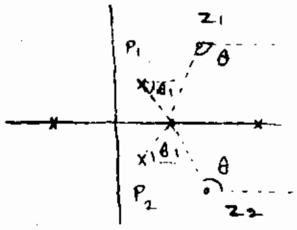


$\angle GH(s) = -(3\times 180) = -540^\circ$ → OK →

نقاط سمت چپ P_3 جزو مکان هستند.

نتیجه‌گیری: نقاط سمت چپ تعداد فرد صفر و قطب روی محور حقیقی جزو مکان هستند.

اکنون قطبهای مختلط را بررسی می‌کنیم:



$\angle z_1 = 360-\theta$
$\angle z_2 = \theta$ → $\angle z_1 + \angle z_2 = 360^\circ$ → تاثیری روی فاز ندارد.

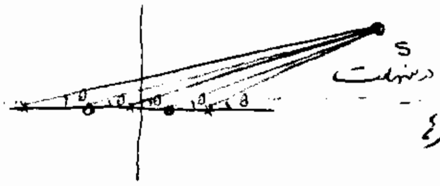
$\angle P_1 = 360-\theta_1$
$\angle P_2 = \theta_1$ → $\angle P_1 + \angle P_2 = 360^\circ$ → تاثیری در فاز ندارد

← قطب و صفرهای مختلط تاثیری در قانون اخیر ندارند.

رفتار در بینهایت: (مجانبها):

مکان از قطبهای سیستم حلقه باز شروع می‌شود و به صفرهای سیستم حلقه باز ختم می‌شود.

$$GH(s) = \frac{1}{s^3+3s^2+2s} \longrightarrow s\to\infty \to GH(s) \simeq \frac{1}{s^3}$$



$$(m-n)\theta = (2q+1)180^\circ \to \theta = \frac{2q+1}{m-n}\cdot 180^\circ$$

که تعداد صفرها

تعداد قطبها

اکنون باید دنبال خطوطی هستیم که ریشه‌ها در $s\to\infty$ روی این خط قرار می‌گیرند. (خطوط مجانب)

$$GH(s)=\frac{s^m+b_{m-1}s^{m-1}+\dots+b_1s+b_0}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0}$$

$$\Delta(s)=1+K\cdot\frac{s^m+\dots+b_0}{s^n+\dots+a_0}\quad (I) \Rightarrow \text{تقریب در بینهایت}:\ \Delta(s)\cong 1+K\cdot\frac{1}{(s-\sigma)^{n-m}}$$

$$\Delta(s)=1+\frac{K}{(s-\sigma)^{n-m}}=0 \Rightarrow \quad (II)$$

(۱) نشان می‌دهیم، s هایی که رابطهٔ (II) را ارضاء می‌کنند روی یک خط قرار دارند.

(۲) نشان می‌دهیم چگونه در $s\to\infty$ ، رابطه II از رابطه I بدست می‌آید.

بررسی (۱):

$$1+\frac{K}{(s-\sigma_0)^N}=0 \Leftarrow n-m=N$$

$$\Rightarrow \frac{K}{(s-\sigma_0)^N}=-1 \Rightarrow (s-\sigma_0)^N=-K \Rightarrow s-\sigma_0=(-K)^{1/N}$$

$$-1=e^{j\pi} \Rightarrow (-1)^N=e^{j\pi N} \qquad \Rightarrow s-\sigma_0=(+K)^{1/N}\cdot e^{j\cdot\frac{2q+1}{N}\cdot\pi}$$

$$s=\sigma+j\omega \Rightarrow \qquad \sigma+j\omega-\sigma_0=(K)^{1/N}\cdot e^{j\cdot\frac{2q+1}{N}\cdot\pi}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma-\sigma_0=|K|^{1/N}\cos\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right) & (III)\\ \omega=|K|^{1/N}\cdot\sin\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right) & (IV)\end{cases}$$

اکنون رابطهٔ III را بر IV تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\omega}{\sigma-\sigma_0}=\overbrace{tg\left(\frac{2q+1}{N}\cdot\pi\right)}^{m}$$

$$\Rightarrow \omega=m(\sigma-\sigma_0)$$

$\Leftarrow$ قسمت حقیقی و موهومی s هایی که رابطه II را ارضاء می‌کنند، روی خط با شیب m و مرکز σ_0 قرار دارند.

می دانیم: $\quad b_{n-1} = \sum$ همه صفرها $\quad . \quad a_{n-1} = \sum$ همه قطبها

صورت و مخرج رابطه (I) را بر $s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0$ تقسیم می کنیم ⟵

$$\Delta = 1 + \frac{K}{\dfrac{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0}{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_0}} \xrightarrow{\text{در نظر گرفتن دو جمله نخست}} \Delta = 1 + \frac{K}{s^{n-m} + (a_{n-1} - b_{m-1})s^{n-m-1} + \dots} = 0 \qquad (V)$$

الان تقسیم معادله II را نیز با در نظر گرفتن دو جمله انجام می دهیم:

$$1 + \frac{K}{(s-\sigma_0)^{n-m}} = 0 \rightarrow \quad 1 + \frac{K}{s^{n-m} - (n-m)\sigma_0 s^{n-m-1} + \dots} = 0 \qquad (VI)$$

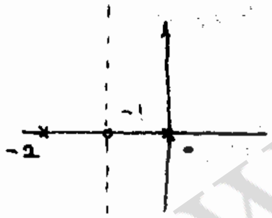
با مساوی قرار دادن روابط V و VI داریم:

$$-(n-m)\sigma_0 = a_{n-1} - b_{m-1}$$

$$\sigma_0 = \frac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Phi_A = \dfrac{2q+1}{n-m} \cdot 180 \quad : q = 0, 1, 2 \dots & \text{زاویه مجانب ها} \\ \sigma_A = \dfrac{\sum \text{قطبها} - \sum \text{صفرها}}{n-m} & \text{مرکز مجانب ها} \end{array} \right.$$

* مثال:



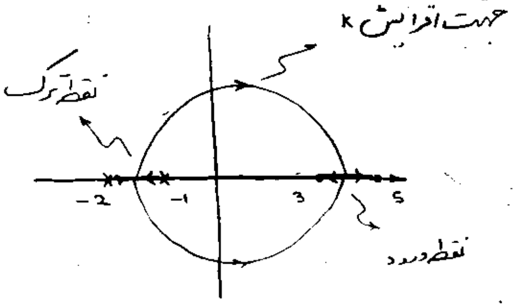
$\sigma_A = -2 - 0 - (-1) = -1$

$n = 2$

. نقاط ترک و ورود به محور حقیقی :

مثال:

$$GH(s)=\frac{(s-3)(s-5)}{(s+1)(s+2)}$$



مکان از قطبها شروع شده و به صفرها ختم می گردد.

مجانب نداریم $\quad n=2,\ m=2 \rightarrow n-m=0 \rightarrow$

سپس نقاط روی محور حقیقی را مشخص می کنیم

الان می خواهیم نقاط ترک و ورود را بیابیم:

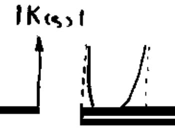
راه سوم : از اینکه ریشه در نقاط ترک یا ورود مکرر است ، کمک می‌گیریم:

ریشه مکرر یعنی : $\Delta(s_0)=0$ و $\dfrac{d\Delta(s_0)}{ds}=0$

اثبات : در نقاط ترک یا ورود:

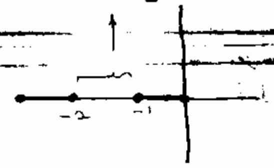
$$\frac{dKGH(s)}{ds}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$

$$K=\frac{-1}{GH(s)} \rightarrow \frac{dK}{ds}=\frac{\frac{dGH(s)}{ds}}{(GH(s))^2}=0 \rightarrow \frac{dGH(s)}{ds}=0$$



باز می‌گردیم به حل مثال :

این ناحیه جزء مکان نیست.



$-1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزء مکان نیست ← نقطه ترک هم نیست

ولی نقطه $-1+\frac{\sqrt{3}}{3}$ جزء مکان می‌باشد.

$$\sigma_b = -1+\frac{\sqrt{3}}{3}$$

• نقطه قطع محور $j\omega$:

چرا باید بدانیم که مکان محور $j\omega$ را قطع می‌کند یا خیر؟

[illegible] ناپایدار است.

بررسی نقطه قطع روی محور $j\omega$:

دو راه داریم : (۱) $s = j\omega \;\rightarrow\; \Delta(j\omega) = 0 \;\leftarrow$

$$\Delta(j\omega) = Real(\omega) + j\,Im(\omega)$$

$$Re(\omega) = 0$$

(۲) معیار راث :

یک سطر صفر (نشان‌دهنده دو ریشه متقارن) ← احتمال اینکه ریشه روی $j\omega$ باشد وجود دارد

* مثال :

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)}$$

به ازای $K=6$ صفر می‌شود: ← معادله کمکی $3s^2+6=0 \to$

$3(s^2+2)=0 \to s=\pm j\sqrt{2} \to$ محل قطع مکان با محور j

روش دوم: $\Delta(s)\Big|_{s=j\omega}=0$ $\quad Re(\omega)+j\,Im(\omega)=0$

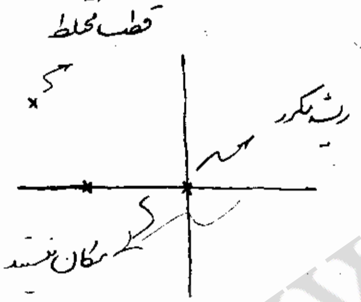
$\to (j\omega)^3+3(j\omega)^2+2(j\omega)+K=0 \to$

$-j\omega^3-3\omega^2+2j\omega+K=0 \to$

$\underbrace{(K-3\omega^2)}_{Re(\omega)}+j\underbrace{(2\omega-\omega^3)}_{Im(\omega)}=0 \to Im(\omega)=0 \to 2\omega-\omega^3=0 \to \begin{cases}\omega=0\\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} Re(\omega)=0 \to K-3\omega^2 \to K=3\omega^2 \\ \omega=\pm\sqrt{2}\end{array}\right\} \to K=6$

* زاویه خروج از قطب (مختلط) یا زاویه ورود به صفر (مختلط):

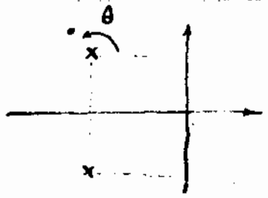


مثال: $G(s)=\dfrac{1}{s^2(s+1)}$

- یک نقطه در همسایگی قطب مورد نظر انتخاب می‌کنیم.

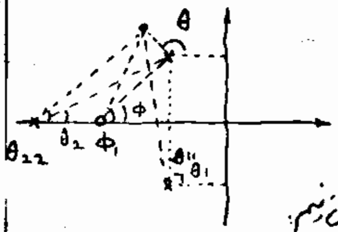
- زاویه این نقطه با قطب مورد نظر را θ می‌نامیم (θ مجهول است)

- این نقطه اگر جزء مکان باشد باید شرط زاویه برای آن محقق شود



خلاصه مبحث هم: سه‌شنبه: ۸۲/۲/۱۶

... زاویه خروج (ورود) از (به) قطب (صفر):



زاویه تست با قطب مورد نظر را θ می‌نامیم مجهول فرض می‌کنیم:

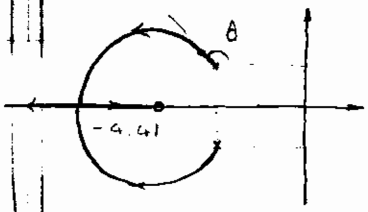
زاویه بقیه صفر و قطبهای GH(s) با نقطه تست را با زاویه قطب و صفر مربوطه تقریب می‌زنیم:

$$\left.\begin{array}{l} \phi_1 - \theta_{11} - \theta_{22} - \theta = 180 \\ \phi_1 \simeq \phi \quad \theta_{11} \simeq \theta_1 \quad \theta_{22} \simeq \theta_2 \end{array}\right\} \to$$

θ بدست می‌آید

مثال:

$$GH(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+5} \to \begin{cases} z = -3 \\ P_1, P_2 = -2 \pm j1 \end{cases}$$



گام (۱): رسم دیاگرام صفر و قطب

گام (۲): یافتن نقاط حقیقی روی محور

گام (۳): مجانبها (تعداد، زاویه و مرکز آنها):

- تعداد: $n-m=1$

- زاویه: $\phi_A = \frac{2q+1}{n-m}\pi \,, \quad q=0,1,2,\ldots \quad \to \phi_A = +180^\circ$

- مرکز: $\sigma_A = \frac{\sum \text{قطب} - \sum \text{صفر}}{n-m} = 1$

گام (۴): نقاط ترک و ورود به محور حقیقی:

$$\frac{dk}{ds} = 0 \,, \quad \frac{dGH(s)}{ds} = 0$$

$$K = -\frac{1}{GH(s)} = -\left[\frac{s^2+4s+5}{s+3}\right]$$

$$\frac{dk}{ds} = 0 \to \frac{(2s+4)(s+3) - (s^2+4s+5)(1)}{(s+3)^2} = 0$$

$\to (2s^2+10s+12)-(s^2+4s+5)=0 \rightsquigarrow s^2+6s+7=0 \to s=-3\pm\sqrt{9-7} \to$

$s=-3\pm\sqrt{2} \to s=\begin{cases} -3-\sqrt{2} \rightsquigarrow \text{جزو مکان مثبت} \\ -3+\sqrt{2} \rightsquigarrow \text{جزو مکان منفی} \end{cases}$ $\quad -3-\sqrt{2}=4.41$

$$K=\frac{-1}{GH(-4.41)}=4.84$$

گام نهایی: یافتن زاویه خروج:

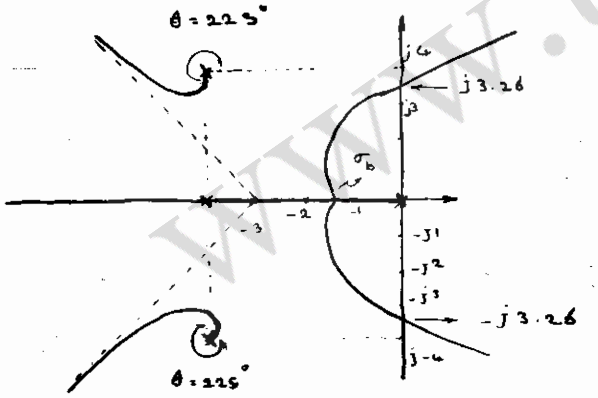
$$\phi-\theta_1-\theta=180 \to \underbrace{-90}_{\theta_1}+\underbrace{45}_{\phi}-\theta=180 \to \theta=-225^\circ=135^\circ$$

یادآوری: مکان نسبت به محور حقیقی متقارن است.

* مثال:

$$GH(s)=\frac{1}{s^4+12s^3+64s^2+128s}$$

رسم دیاگرام صفر و قطب:



$P_1=0$

$P_2=-4$

$P_3=-4+j4$

$P_4=-4-j4$

نقاط روی محور حقیقی OK

مجانب ها:

(۵) تعداد:

تعداد مجانبها برابر اختلاف درجه صورت و مخرج است ← ۴ مجانب دارد.

توضیح دیگر: این سیستم ۴ صفر در بینهایت دارد. مکان از قطبها شروع شده، در صفرها ختم میشود ← ۴ مجانب دارد.

- زوایا:

$$\phi_A = \frac{2q+1}{n-m}\pi \rightarrow \phi_A = \frac{2q+1}{4}\cdot 180 \rightarrow \phi_A = \begin{cases} 45 \\ -45 \\ 135 \\ -135 \end{cases}$$

$$q = 0, 1, 2, \dots$$

- مرکز مجانب:

$$\sigma_A = \frac{\sum P - \sum Z}{n-m} = \frac{(0-4-4-4)-0}{4} = -3$$

- تذکر: برای آنکه بفهمیم مکان از پایین به مجانب نزدیک می‌شود یا از بالا، باید نقطه قطع محور $j\omega$ را بیابیم.

- نقطه ترک محور حقیقی:

$$\frac{dGH(s)}{ds} = 0 \quad \text{or} \quad \frac{dK}{ds} = 0 \qquad K = \frac{-1}{GH(s)}$$

$$\frac{dK}{ds} = -(4s^3 + 36s^2 + 128s + 128) = 0$$

چون ماشین حساب نداریم (!) ⇐ باید از روش عددی کمک بگیریم:

می‌خواهیم $\frac{dK}{ds} = 0$ باشد ⇐ $K(s)$ باید ماکسیمم باشد: نتایج ⇐ $K(s) = \frac{-1}{GH(s)}$ عددی دهیم

s	0	-1	-1.5	-2	-2.5	-3	-4
K	0	75	85	80	68.5	51	0

$$\underbrace{}_{Max}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \sigma_b = -1.5 \\ K_b = 85 \end{cases} \quad \text{b: Brake Away (!?)}$$

- نقطه قطع محور $j\omega$:

(۱) معیار راث

(۲) از رابطه $\Delta(s)$ در $s = j\omega$

$$\Delta(s) = s^4 + 12s^3 + 64s^2 + 128s + K$$

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 64 & K \\ s^3 & 12 & 128 & 0 \\ s^2 & b_1 & K & \\ s^1 & c_1 & 0 & \\ s^0 & K & & \end{array}$$

$$b_1 = \frac{12 \times 64 - 128}{12} = 53.33$$

$$c_1 = \frac{128 b_1 - 12K}{b_1}$$

(سطر فرد باید صفر باشد):

$$c_1 = 0 \rightarrow K = \frac{53.33 \times 128}{12} = 568.85$$

برای K بدست آمده اخیر، سیستم در مرز پایداری خواهد بود.

معادله کمکی

$$\to A(s) = 53.33\, s^2 + 568.85 = 0$$

$$\to s = \pm j\sqrt{\frac{568.85}{53.33}} \to s_{1,2} = \pm j\,3.26$$

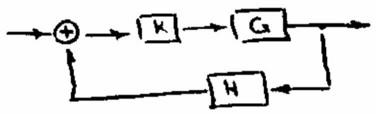
نقاط تقاطع با محور

- زاویه خروج از قطب مختلط:

$$-135 - 90 - 90 - \theta = 180 \to$$

$$\theta = -135^\circ - 360^\circ = -135^\circ \to 225^\circ$$

کوییز: برای فیدبک مثبت، قوانین مکان چگونه اصلاح می‌شود؟



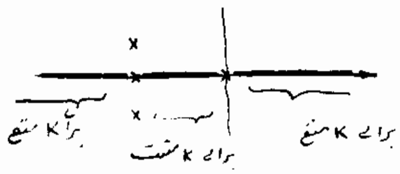
تذکر: فیدبک مثبت با K مثبت = فیدبک منفی با K منفی

- قوانین اصلاح شده برای فیدبک مثبت:

$$KGH(s) = 1 \Rightarrow \begin{cases} |KGH(s)| = 1 \\ \angle GH(s) = 2k\pi \qquad k = 0, \pm 1, \dots \end{cases}$$

(۱) تقارن نسبت به محور حقیقی برقرار است

(۲) نقاط روی محور حقیقی: سمت چپ تعداد زوج صفر و قطب



نتیجه: اگر K را در بازه $(-\infty, +\infty)$ در نظر بگیریم ← کل محور حقیقی جزء مکان خواهد بود.

(۳) نقطه ترک محور حقیقی، تفاوتی نمی کند (چون ارتباطی با زاویه ندارد)

(۴) مجانبها: - تعداد: قانون آن تفاوتی نمی کند.

- مرکز: عوض نمی شود.

- زاویه: عوض می شود: $\phi_A = \frac{2q\pi}{n-m}, \quad q=0,1,\dots$

(۵) زاویه ورود و خروج: تغییر می کند: برای مضارب زوج 180° نوشته می شود: $2q\pi$

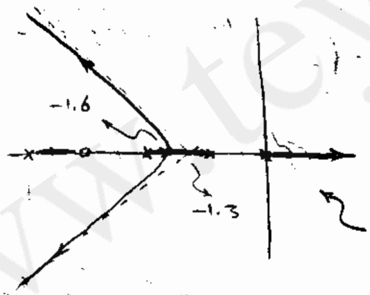
(۶) نقطه تقاطع محور ها: قانون تغییر نمی کند: معیار ... یا بررسی $\Delta(s)$ به ازای $s=j\omega$

* مثال: با فرض فیدبک مثبت:

$$GH(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)(s+4)}$$

$$\begin{cases} Z=-3 \\ P_1=0 \\ P_2=-1 \\ P_3=-2 \\ P_4=-4 \end{cases}$$

رسم دیاگرام مکان قطب:



فیدبک مثبت، ذاتاً ناپایدار است

مجانبها: - اختلاف درجه صورت و مخرج: ۳

$$\phi_A = \frac{2K}{3} \cdot 180 \Rightarrow 0, 120, -120$$

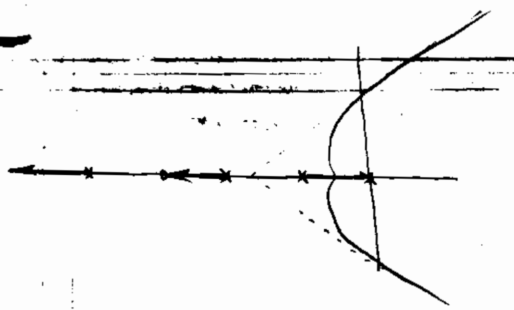
$$\sigma_A = \frac{\sum p - \sum z}{n-m} = \frac{-4}{3} = -1.3$$

تذکر: در سیستم های مرتبه پایین عموماً، مجانبها وسط مکان قطع نمی شوند.

نقطه ترک:

$$\frac{dK}{ds} = 0 \rightarrow \sigma_b = -1.6$$

تذکر: اگر فیدبک منفی (و تیر $K<0$) باشد، مکان بصورت زیر در می آید:



Matlab Code: Rlocus(n,d)

* تأثیر اضافه کردن قطب و صفر روی مکان:

اگر تنها، هدف رسم مکان بود، از pc کمک می گرفتیم. اما مکان هندسی ریشه ها برای طراحی و تنظیم پارامترهای سیستم برای دستیابی به پاسخ مطلوب کاربرد دارد.

طراحی: - تنظیم پاسخ به صورت پاسخ مطلوب، کمک تغییر پارامترهای سیستم.

- آیا می توان پاسخ مطلوب را گرفت؟

- اگر نمی توان، چگونه عمل کنیم؟

همین مثال اخیر را بررسی می کنیم: (شمای که مکان هندسی ریشه های آن در بالای صفحه رسم شده است)

- شاخه های مسلط، شاخه های نزدیک محور ها هستند.

مثلاً: $\left\{ \begin{array}{l} T_s < 4(s) \\ P.O < 10\% \end{array} \right. \rightarrow \Big\}$ [illegible] ? $\leftarrow$ $s_{1,2} = \underbrace{0.5 \pm j1}$

S_d: ریشه مطلوب.

اکنون باید ببینیم این ریشه جزء مکان هست یا خیر؟

اگر هست $\rightarrow$ $K = \frac{-1}{GH(s_d)}$

اگر نیست $\rightarrow$ باید شکل مکان را به گونه ای تغییر دهیم که از نقطه مطلوب عبور کند.

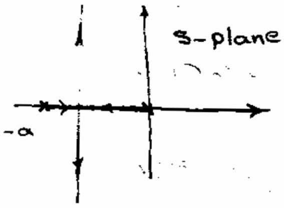
... پس از این نقطه در جلسه آینده این بحث دنبال خواهد شد ...

* جلسهٔ نوزدهم :
یکشنبه : ۸۲,۲,۲۱

... در واقع، هدف، شکل دهی مکان برای عبور از یک نقطه (نقاط) خاص است.

* مثال : تأثیر قطب :

$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)}$, $a>0$



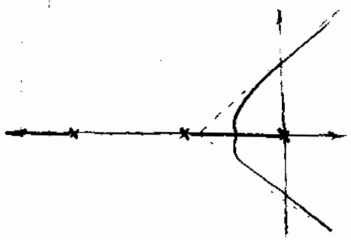
→ پایدار

$\Phi_A = \pm 90$

$$\begin{cases} s_{1,2} = -0.5 \pm j\omega_1 \\ s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta \\ T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} = 8\ (s) \end{cases}$$

$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)}$, $|a|<|b|$

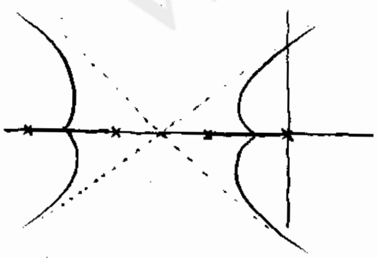
$a>0 \quad b>0$



$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{3} \cdot 180 = 60, -60, 180 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b)}{3} \end{cases}$$

اثر: ناپایداری ـ خم شدن مکان بسمت راست

$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$



$n-m=4$

$$\begin{cases} \Phi_A = \frac{2q+1}{4} \times 180 = \pm 45, \pm 135 \\ \sigma_A = \frac{-(a+b+c)}{4} \end{cases}$$

← مکان بیشتر به سمت راست می رود ←

« قطب به پایداری کمک نمی کند و سیستم را به سمت ناپایداری می برد. »

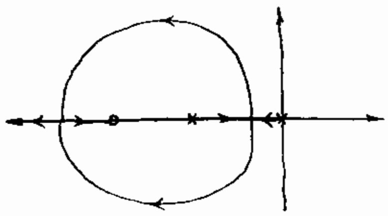
* مثال: تاثیر صفر:

$$GH(s) = \frac{1}{s(s+a)}$$

$$\rightarrow GH(s) = \frac{(s+b)}{s(s+a)}$$

$n-m=1$

$$\Phi_A = \frac{2q+1}{1} \cdot 180 = 180$$



مکان به سمت چپ منحرف می شود.

صفر اثر پایدارکننده (پایدارسازی) دارد.

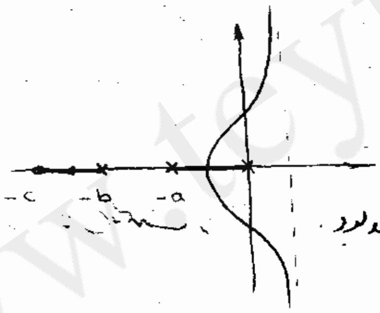
تذکر: صفر راست باعث ناپایداری می شود.

* مثال:

$$GH(s) = \frac{s+c}{s(s+a)(s+b)}$$

$n-m=2$

$$\begin{cases} \Phi_A = \dfrac{2q+1}{2} \cdot 180 = \pm 90 \\ \sigma_A = \dfrac{c-(a+b)}{2} \end{cases}$$



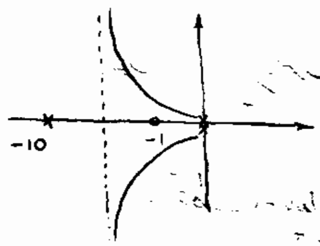
به ازای $c<a+b$ سیستم همواره پایدار خواهد بود

تاثیر موقعیت قطب روی مکان ریشه ها:

$$GH(s) = \frac{s+1}{s^2(s+a)}$$

فرض: $a=10$

$$\begin{cases} \Phi_A = \pm 90 \\ \sigma_A = \dfrac{-a+1}{2} \end{cases}$$



شکل را نمی توانیم بطور دقیق رسم کنیم مگر اینکه نقطه قطع محور حقیقی را پیدا کنیم.

$$\frac{dGH(s)}{ds} = \frac{(3s^2+2as)(s-1) - s^3 - as^2}{(s^2(s+a))^2} = 0$$

$\Rightarrow 2s^3+(a+3)s^2+2as=0 \Rightarrow s(2s^2+(a+3)s+2a)=0$

که همواره $s=0$ یک نقطه ترک است.

$$s=\frac{-(a+3)\pm\sqrt{(a+3)^2-16a}}{4}$$

زیر رادیکال نمی‌تواند منفی باشد، چون سیستم درجه ۳ است. که سیستم درجه ۲ می‌تواند.

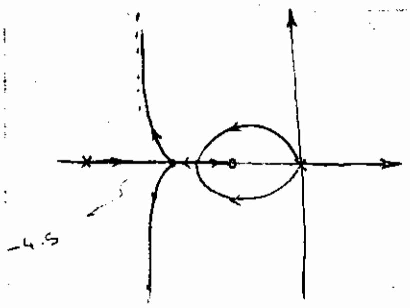
$$\left.\begin{array}{l}(a+3)^2-16a>0\\ a^2-10a+9=0\\ (a-1)(a-9)=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c}a\geq 9\\ \text{or}\\ a\leq 1\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta\geq 0$$

$a=10 \Rightarrow s=-4\,,\,-2.5$

بازای $a=1$ و $a=9$ نقطه ترک تکرار داریم.

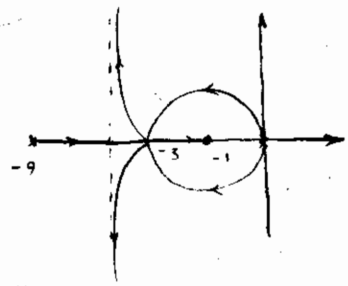
بازای $a<1$ و $a>9$ نقطه قطع و ورود داریم.

بازای $1<a<9$ نقطه قطع و ورود نداریم.

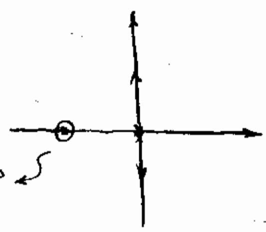


$a=9 \Rightarrow s_{2,3}=-3$

نقطه قطع تکرار (هم ترک هم ورود)

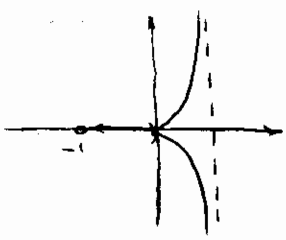


$a=1 \Rightarrow GH(s)=\frac{s+1}{s^2(s+1)}=\frac{1}{s^2}$



که هم قطب و هم صفر (از ۱- خارج شده و بر آن وارد می‌شوند)

$a<1 \Rightarrow$



* تعمیم مکان هندسی ریشه‌ها:

$$1+KGH(s)=0$$

$$\Delta(s)=s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_1s+a_0=0$$

تغییرات ریشه‌های $\Delta(s)$ مثلاً با تغییرات a_1:

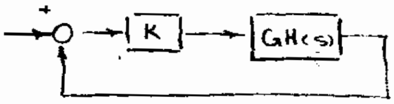
مثلاً به شکل $1+a_1GH(s)$ درمیاوریم

بر جملات فاقد a_1 تقسیم می‌کنیم:

$$1+\frac{a_1 s}{s^n+a_{n-1}s^{n-1}+\dots+a_2s^2+a_0}$$

* مثال:

$$K=10 \qquad G(s)=\frac{1}{(s+2)(s+P)}$$

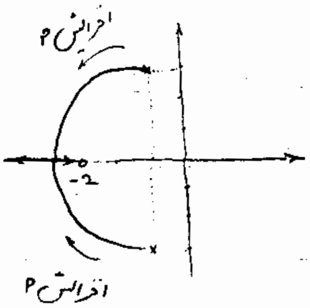


$$\Delta(s)=1+KGH(s)=1+\frac{K}{(s+2)(s+P)}=0$$

$$\Rightarrow (s+2)(s+P)+K=0 \rightarrow s^2+(P+2)s+2P+10=0 \rightarrow s^2+2s+P(s+2)+10=0$$

$$\rightarrow \quad 1+\frac{P(s+2)}{s^2+2s+10}=0$$

$$GH(s)_{\text{جدید}}=\frac{s+2}{s^2+2s+10} \rightarrow$$



$$n-m=1 \qquad \phi_A=180$$

اینکه در P خیلی بزرگ به سمت 2- می‌رود را که $G(s)$ هم می‌توان ترسیم بیابیم: با بزرگ شدن P می‌توان از ترم $(s+P)$ در مقابل $(s+2)$ صرفنظر کرد.

سطوح ریشه:

$$K_1K_2=K$$

$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$$

ابتدا K_2 را برابر صفر قرار می‌دهیم

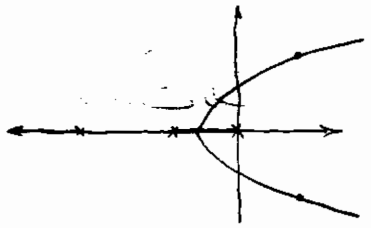
$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)$$

مکان را برای K_1 ترسیم می‌کنیم:

بر P تقسیم می‌کنیم:

$$1+K_1\cdot\frac{Q_1(s)}{P(s)}=0$$

$$\rightarrow 1+K_1 G_1H_1(s)=0$$



K_1 را Fix می‌کنیم:

معادله مشخصه را می‌نویسیم:

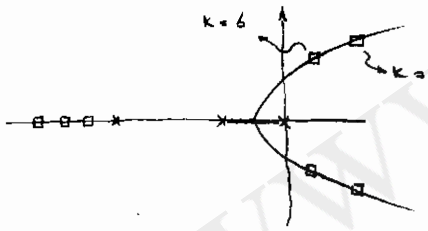
$$\Delta(s)=P(s)+K_1Q_1(s)+K_2Q_2(s)$$

ـ مکان را نسبت به K_2 رسم می‌کنیم:

ـ $\Delta(s)$ را بر $P(s)+K_1Q_1(s)$ تقسیم می‌کنیم:

قطبهای GH_2 همان ریشه‌های $P(s)+K_1Q_1(s)$

$$\Delta(s)=1+\frac{K_2\overbrace{Q_2(s)}^{GH_2(s)}}{P(s)+K_1Q_1(s)}=1+K_2G_2H_2(s)$$



نمایانگر یک سطح

* مثال:

$$GH(s)=\frac{K(1+Ts)}{s(s+1)(s+2)}$$

$K_1=K$

$K_2=KT$

$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K(1+Ts)$$

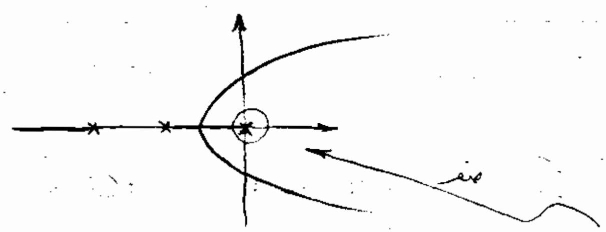
$$T=0 \Rightarrow \Delta(s)=\underbrace{s^3+3s^2+2s}_{P(s)}+K \rightarrow \Delta(s)=1+\frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

ـ K را Fix می‌کنیم.

ـ مکان را برحسب T می‌نویسیم:

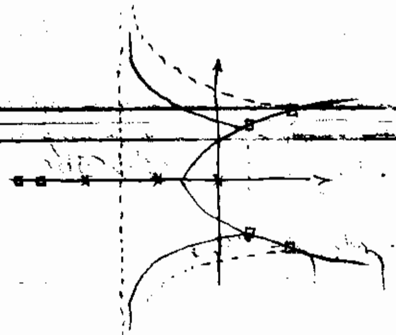
$n-m=2$

$\phi_A=\pm 90$



$$\Delta(s)=s(s+1)(s+2)+K+KTs \rightarrow \Delta(s)=1+\frac{KTs}{s(s+1)(s+2)+K}$$

$\rightarrow$ مجموع ریشه‌ها = مجموع قطبها $=-3 \rightarrow \sigma_A=\frac{-3}{2}$



* جلسه بیستم، سه شنبه: ۸۲،۲،۲۳

حساسیت ریشه‌ها: (هرچقدر کمتر باشد بهتر است)

تا قبلاً داشتیم: $S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\cdot\frac{G}{T}$

اکنون: $S_K^s = \frac{\partial s}{\partial K}\cdot\frac{K}{s}$

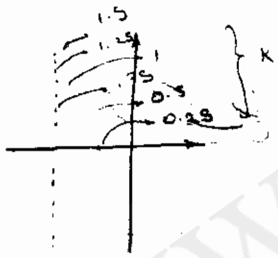
نقاط تقاطع محور حقیقی:

$$\frac{\partial K}{\partial s}=0 \to \frac{\partial s}{\partial K}=\infty \Rightarrow S_K^s \to \infty$$

* مثال:

$$\Delta(s)=s(s+1)+K=0$$

تغییرات K از ۰ تا 20 با گام 0.25 (Matlab)



حل تحلیلی:

$$\Delta(s)=s^2+s+K=0 \Rightarrow K=-s(s+1)$$

$$\Rightarrow 2s\cdot\frac{\partial s}{\partial K}+\frac{\partial s}{\partial K}+1=0$$

$$\frac{\partial s}{\partial K}\cdot(2s+1)=-1 \Rightarrow \frac{\partial s}{\partial K}=\frac{-1}{2s+1} \Rightarrow S_K^s=\frac{-1}{2s+1}\cdot\frac{K}{s}$$

$$S_K^s=\frac{s+1}{2s+1}$$

$2s+1=0 \to s=-1/2 \Rightarrow$ در $s=-0.5$ حساسیت بی‌نهایت است.

* تمرین: با Matlab گام K را چنان بیابید که حساسیت سیستم واضح باشد.

$$\Delta(s)=s^2(s+1)^2+K(s+2)=0$$

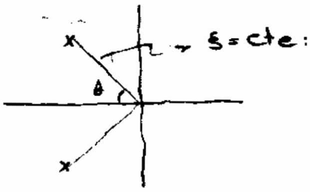
Rlocus (num, den, K)

ضرایب صورت ، ضرایب مخرج

* یافتن تقاطع خط $\zeta = cte$ با مکان هندسی ریشه‌های سیستم:

$$\begin{cases} s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\beta \\ \theta = \cos^{-1}\zeta \end{cases}$$

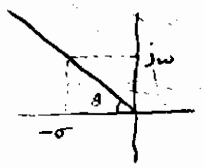
For Example: $\begin{cases} \zeta = .707 \\ \theta = \cos^{-1} .707 = 45^\circ \end{cases}$



اهمیت مطلب در اینجاست که overshoot را فقط ζ تعیین می‌کند.

For example: $P.O < 10\% \Rightarrow \zeta > 0.45$

Matlab: ginput



$$\begin{cases} \text{خط } \zeta = \cos\theta = \text{ثابت} \\ \Delta(s) = s^n + \dots + a_1 s + a_0 \end{cases}$$

$$s = -\sigma + j\omega$$

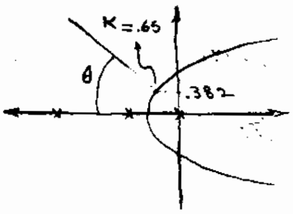
$$tg\,\theta = \frac{\omega}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{\omega}{tg\,\theta} \Rightarrow s = -\frac{\omega}{tg\,\theta} + j\omega \Rightarrow s = \omega\left(\frac{-1}{tg\,\theta} + j1\right)$$

$\theta = 45^\circ$; مثلا $\Rightarrow s = \omega(-1+j)$

* مثال: تقاطع خط $\zeta = 0.707$ را با مکان هندسی ریشه‌های سیستم پیدا کنید.

$$\Delta(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s+2)} = 0$$



$$\theta = \cos^{-1}\zeta = 45^\circ \Rightarrow tg\,\theta = 1$$

$$\Rightarrow s = \omega(-1+j)$$

در $\Delta(s)$ جایگزین می‌کنیم:

$$s^2 = \omega^2(-1+j)^2 = -2j\omega^2$$

$$s^3 = -2j\omega^3(-1+j) = 2\omega^3(1+j)$$

$$\Rightarrow 2\omega^3(1+j) - 6j\omega^2 + 2\omega(-1+j) + K = 0$$

$$Re:\ K - 2\omega + 2\omega^3 = 0$$

$$Im:\ 2\omega^3 - 6\omega^2 + 2\omega = 0 \Rightarrow 2\omega(\omega^2 - 3\omega + 1) = 0$$

$$\begin{cases} \omega = 0 \\ \omega = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = 0.382 \\ \rightsquigarrow Re \text{ بکمک } : K = 0.65 \end{cases}$$

ریشه دیگر به ازای K منفی رخ می دهد.

* راه حل سعی و خطا (گرافیکی) : (چندان مطلوب نیست فقط به درد امتحان می خورد)

یک نقطه به طول r روی خط $\xi = cte$ انتخاب می کنیم (از روی شکل کیفی مکان)

سپس شرط مکان را تست می کنیم. اگر ارضا شد، یعنی همان نقطه جزء مکان هست.

اگر نه طول r را بسته به نوع جواب زاویه کم یا زیاد می کنیم :