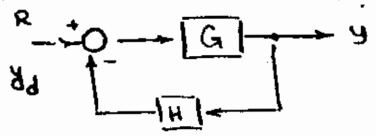
. مشخصات سیستم کنترل فیدبک :



مفاهیمی که در این بخش بحث خواهد شد :

- مفهوم سیگنال خطا (در حالت حلقه باز هیچ حسی (sens) از خروجی داریم آنرا با خروجی مطلوب مقایسه کنیم)
- تعیین پاسخ حالت گذرا
- حساسیت سیستم به تغییر پارامترها
- اثر سیگنال اغتشاش
- هزینه فیدبک

(A) سیگنال خطا :

هدف این است که U مناسب را بیابیم که y به y_d (خروجی مطلوب) نزدیک شود:

Find U s.t. $y \to y_d$ desired

خطای تعقیب : Tracking Error : $e = y_d(t) - y(t)$

خطای عملگر : Actuator Error: $e_a(t) = y_d(t) - Hy(t)$

اگر سیستم فیدبک واحد باشد $(H=1)$ ← $e(t) = e_a(t)$

$E(s) = \mathcal{L}\{e(t)\}$

$$\frac{E_a(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+GH} \qquad H=1 \Rightarrow \frac{E_a(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G}$$

واضح است که برای کاهش E ، باید GH بزرگ باشد .

GH : گین حلقه (loop gain)

تذکر: البته برای کاهش خطا، G را تا بینهایت نمی‌توانیم بزرگ کنیم : به دو دلیل، (۱) الزامات عملی و ساخت

(۲) زیاد کردن G ممکن است موجب ناپایداری شود .

(B) حساسیت سیستم کنترل به تغییر پارامترها :

$$\frac{Y(s)}{R(s)}=\frac{G}{1+GH} \Rightarrow Y(s)=\frac{G}{1+GH}\cdot R(s)$$

$$Y(s)\approx\frac{1}{H(s)}\cdot R(s) \leftarrow GH\gg 1$$

که در این حالت پارامترهای سیستم هیچ تأثیری ندارند (G تأثیری ندارد)

← برای فراهم آوردن حساسیت کمتر به تغییر پارامترها ، باید G بزرگ باشد .

اکنون به بررسی کمی حساسیت می پردازیم :

با فرض $G(s)$ تغییراتی به شکل ΔG دارد :

حلقه باز : $R(s)\rightarrow\boxed{G}\rightarrow Y(s)$

$$\Rightarrow Y(s)=R(s)\cdot[G(s)+\Delta G(s)]=G(s)R(s)+\Delta G(s)R(s)$$

$$\Rightarrow \Delta Y(s)=\Delta G(s)\cdot R(s)$$

حلقه بسته :

$$Y(s)+\Delta Y(s)=\frac{G+\Delta G}{1+H(s)(G(s)+\Delta G(s))}\cdot R(s)$$

$$\Delta Y(s)=\left(\frac{G+\Delta G}{1+(G+\Delta G)H}-\frac{G}{\underbrace{1+GH}}\right)\cdot R(s)$$

$$\Delta(s)=1+GH$$

$$\Rightarrow \Delta Y(s)=\left[\frac{G+\Delta G}{\Delta(s)+\Delta G\cdot H(s)}-\frac{G}{\Delta(s)}\right]\cdot R(s)=\frac{\Delta(s)G(s)+\Delta(s)\Delta G(s)-[\Delta(s)+\Delta G\cdot H]G}{[\Delta(s)+\Delta G\cdot H(s)]\Delta(s)}\cdot R(s)$$

$$\Rightarrow \Delta Y(s)=\frac{\Delta(s)\Delta G-\Delta G\cdot H\cdot G}{[\Delta(s)+\Delta GH]\Delta} \Rightarrow \Delta Y(s)=\frac{\Delta G}{[\Delta(s)+\Delta GH(s)][1+GH(s)]}$$

$(\Delta=1+GH)$

با فرض : $H(s)\cdot G(s)\gg\Delta GH(s) \leftarrow$

$$\Delta Y(s)=\frac{\Delta G}{(1+GH(s))^2}\cdot R(s)$$

← با افزایش گین حلقه ← $\Delta Y(s)$ کم می شود .

* تعریف کلی حساسیت:

حساسیت: درصد تغییرات سیستم حلقه بسته به درصد تغییرات در سیستم حلقه باز

$T(s)$: سیستم حلقه بسته $G(s)$: سیستم حلقه باز

$$S_G^T = \frac{\Delta T/T}{\Delta G/G}$$

در حالت حدی: $\Delta G \to 0 \Rightarrow S_G^T = \frac{\partial T/T}{\partial G/G} = \frac{\partial \ln T}{\partial \ln G} = \frac{\partial T}{\partial G}\cdot\frac{G}{T}$

تابع تبدیل حساسیت سیستم: $T = \frac{G}{1+GH} \to S_G^T = \frac{\partial T}{\partial G}\cdot\frac{G}{T} = \frac{(1+GH)-GH}{(1+GH)^2} \to S_G^T(s) = \frac{1}{1+G(s)H(s)}$

در سیستم حلقه باز: $T=G$ ← حساسیت $=1$

* حساسیت نسبت به المان فیدبک:

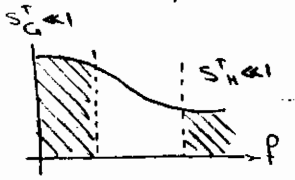
$$T = \frac{G}{1+GH} \qquad S_H^T = \frac{\partial T}{\partial H}\cdot\frac{H}{T} \to$$

تابع تبدیل مکمل حساسیت سیستم: $S_H^T = \frac{-G^2}{(1+GH)^2}\cdot H\cdot\frac{(1+GH)}{G} \to S_H^T = \frac{-GH}{1+GH}$

* به این دلیل مکمل گوئیم که: $S_G^T - S_H^T = 1$

$S_H^T = -1$ ← $GH \gg 1$

(با کم شدن GH، S_H^T کم می‌شود) $S_H^T = -GH \lll 1$ ← $GH \ll 1$



* جلسه نهم: سه شنبه: ۸۲/۱/۱۹

یادآوری:

$e = y_d - y \qquad \frac{e}{y_d} = \frac{1}{1+GH} \qquad S^T_G = \frac{1}{1+GH} \qquad S^T_H = \frac{-GH}{1+GH}$

$S^T_G - S^T_H = 1$

د) تنظیم پاسخ حالت گذرا:

Find u s.t $y \to y_d$

$\lim_{t \to t_f} y = y_d \qquad t_f \neq \infty$

$u \to \boxed{G} \to y$

$y = Gu \qquad u = y_d$

$\Leftarrow \; y = G y_d$

⇐ به G بستگی دارد که چگونه y به y_d نزدیک شود

مثال:

$G(s) = \frac{s^2+3s+1}{s^2+2s+4}$

در نهایت y به $\frac{1}{4}$ می رسد (dc gain سیستم $\frac{1}{4}$ است)

در سیستم Open loop، برای رسیدن به y_d (خروجی مطلوب)، G در اختیار ما نیست و نمی توانیم آن را تغییر دهیم

یک روش Invers dynamic است:

$u = C(s) \cdot y_d \qquad y_d \to \boxed{C(s)} \xrightarrow{u} \boxed{G} \to y$

$C(s) = G^{-1}(s)$

* اشکالات این روش:

(۱) $G(s)$ دقیقاً شناخته شده نیست.

(۲) $G(s)$ تغییر می کند.

(۳) ممکن است معکوس سیستم G، ناپایدار باشد (G دارای صفر ناپایدار باشد)

(۴) ممکن است درجه صورت G از مخرج آن کمتر باشد (متناوی باشد) (G اکیداً سره باشد: Strictly Proper)

به غیر از تنها بعضی کنترلهای شیمیایی، کنترل Open loop کاربردی ندارد ← اکثر کنترل حلقه بسته صورت می گیرد.

* مثال: موتور dc با کنترل آرمیچر:

فرض: L_a کوچک است:

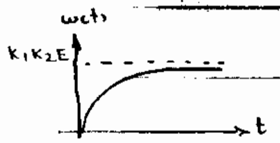
$$G(s)=\frac{\omega(s)}{V_a(s)}=\frac{K_1}{1+\tau_1 s}$$

$$K_1=\frac{K_m}{R_a f+K_b K_m} \quad ; \quad \tau_1=\frac{R_a J}{R_a f+K_b K_m}$$

به فرض V_a دلتای پله است:

$$V_a=\frac{K_2 E}{S}$$

$$\Rightarrow \omega(t)=K_1K_2E(1-e^{-t/\tau_1})$$

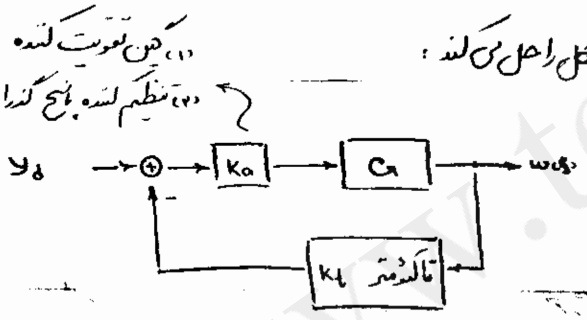


فرض می خواهیم این نمودار را تغییر دهیم: مثلاً تندتر به مقدار نهایی برسد:

تنها اهرم ما τ_1 است: $\tau_1=\frac{R_a J}{R_a f+K_b K_m}$ اما پارامتر را در اختیار نیست که تغییر دهیم. و تیز

(J ممان اینرسی بار) بیشترین تأثیر را روی τ_1 می گذارد.

الان مشاهده می کنیم که سیستم حلقه بسته چگونه مشکل را حل می کند:



کنترل فیدبک سرعت:

الان قصد داریم پاسخ زمانی این سیستم را با هم (برای ω) ببینیم چه پارامترهایی در اختیار ماست تا کمک آنها پاسخ گذرا را تغییر دهیم:

$$\frac{\omega(s)}{y_d(s)}=\frac{K_aG}{1+K_aK_tG}=\frac{\frac{K_aK_1}{1+\tau_1 s}}{1+\frac{K_aK_tK_1}{1+\tau_1 s}}=\frac{K_aK_1}{1+\tau_1 s+K_aK_tK_1}=\frac{\overbrace{\frac{K_aK_1}{1+K_aK_tK_1}}^{K_2}}{1+\frac{\tau_1 s}{1+K_aK_tK_1}}$$

$$\tau_c=\frac{\tau_1}{1+K_aK_tK_1}$$

Closed Loop

واضح است که $\tau_1>\tau_c$

و از طرفی اهرم K_a در اختیار ماست که می توانیم ثابت زمانی سیستم را تغییر دهیم.

به فرض: $y_d = \frac{k_2 E}{S}$ ← $\omega(t) = k_c \cdot k_2 \cdot E(1-e^{-t/\tau_c})$

تذکر: k_t بر روی مقدار τ_c اثر دارد اما از آن استفاده نمی‌کنیم: چون:

$$\frac{\omega(s)}{y_d(s)} = \frac{\frac{k_a k_1}{1+k_a k_1 k_t}}{1+\frac{\tau_1 s}{1+k_a k_t k_1}}$$

← افزایش k_t، گین را کم می‌کند.

اما k_a (چون هم در مخرج است و هم در صورت) اثری بر گین ندارد.

تذکر: $P_c = -\frac{1+k_a k_t k_1}{\tau_1}$

تذکر: k_a را خیلی نمی‌توان زیاد کرد که τ_c کم شود چون:

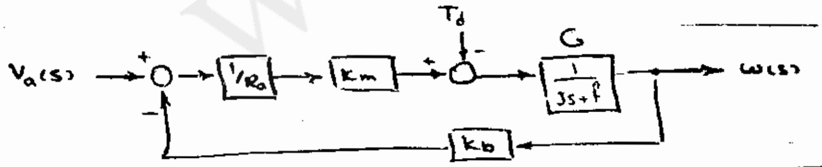
(۱) هزینه بالا می‌رود

(۲) افزایش k_a ⇐ افزایش v_a ← ممکن سیستم زود به ناحیه اشباع برود

معمولاً با این روش، تا 100 برابر حلقه باز، سیستم را بهبود می‌بخشیم.

(D) اثر سیگنالهای اغتشاش بر سیستم فیدبک:

در اینجا هم از همان موتور dc با فرض کوچک بودن L_a استفاده می‌کنیم:



می‌خواهیم اثر T_d را ببینیم: چون سیستم LTI است ← از جمع آثار کمک می‌گیریم:

$V_a(s)=0$ تا فقط اثر T_d را ببینیم. فرض $T_L(s) = \frac{D}{S}$ (ورودی پله‌ای)

$$\frac{\omega}{T_d} = \frac{-G}{1+\frac{K_m K_b}{R_a}\cdot G} = \frac{-\frac{1}{Js+f}}{1+\frac{K_b K_m}{R_a}\cdot\frac{1}{Js+f}} = \frac{-1}{Js+f+\frac{K_b K_m}{R_a}}$$

$$\to w(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{-D}{Js+f+\frac{K_bK_m}{R_a}} = \frac{1}{s}\cdot\frac{-DR_a}{(Js+f)R_a+K_bK_m}$$

به کمک قضیه مقدار نهایی داریم :

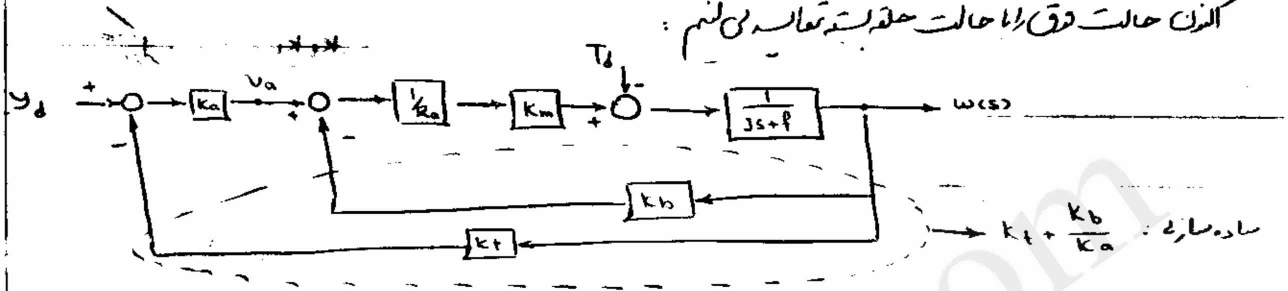
$$w_{ss} = w(t)\big|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s\,w(s) = \frac{-DR_a}{fR_a+K_bK_m}$$

هنگامیکه از قضیه مقدار نهایی استفاده می کنیم، باید از پایداری سیستم مطمئن باشیم.

ما در اینجا مطمئن بودیم، چون تمام المان های سیستم فرکانسی اند، و یک ریشه داریم و آن هم چپ ω است ← پایدار است

$$e_{ss} = V_a(s) - w(s) = \frac{DR_a}{fR_a+K_bK_m}$$

الان حالت فوق را با حالت حلقه بسته مقایسه می کنیم :



$$V_a = 0 \qquad T_L = \frac{D}{s} \quad \to \frac{w}{T_d} = \frac{-\frac{1}{Js+f}}{1+\frac{K_aK_m}{R_a}\left(K_t+\frac{K_b}{K_a}\right)\cdot\frac{1}{Js+f}} = \frac{-1}{Js+f+K_aK_t\frac{K_m}{R_a}+\frac{K_mK_b}{R_a}} = \frac{-1}{Js+f+\frac{K_m}{R_a}(K_aK_t+K_b)}$$

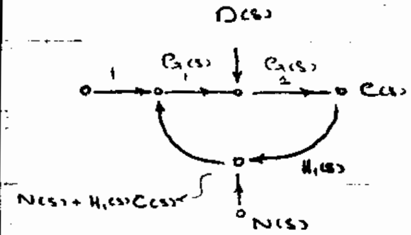
$$w(s) = \frac{1}{s}\cdot\frac{-DR_a}{(Js+f)R_a+K_m(K_aK_t+K_b)}$$

$$w_{ss} = \lim_{s\to 0} s\,w(s) = \frac{-DR_a}{fR_a+K_m(K_aK_t+K_b)}$$

- با افزایش K_a این کسر کوچک می شود، اثر سیگنال اغتشاش کم می شود.

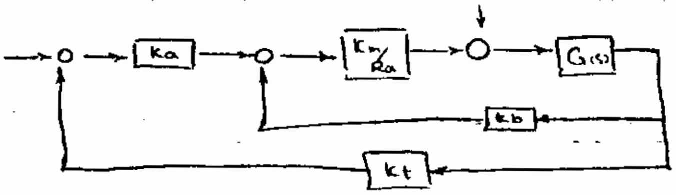
تذکر: افزایش گین حلقه فیدبک، تمام مشخصات سیستم را بهبود می بخشد به جز Sensitivity.

* جلسه دهم : یکشنبه : ۸۲,۱,۲۴



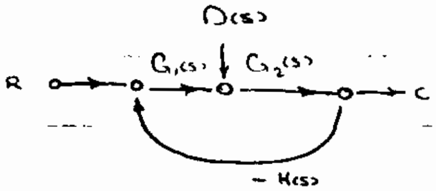
نویز : سیگنال سنسور (sensor)

موتور dc :



(I)

سیستم استاندارد تک حلقه ای :



$$(I) \to \begin{cases} G_2(s) = G(s) \\ G_1(s) = \dfrac{K_a K_m}{R_a} \\ H(s) = k_t + \dfrac{K_b}{K_a} \end{cases}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = \frac{-G_1G_2H_2}{1+G_1G_2H_1H_2}$$

$$\frac{C(s)}{N(s)} = -\frac{1}{H_1} \quad \leftarrow \quad G_1G_2H_1H_2 \gg 1$$

برای کاهش نویز ، H_1 باید بزرگ باشد.

نسبت سیگنال به نویز سنسور

$$\begin{cases} S_H^T & H \gg 1 \\ \text{نویز} \end{cases}$$

$$\begin{cases} S_G^T \\ D(s) \end{cases}$$

$$S_{G_2}^T = \frac{\partial T}{\partial G_2} \cdot \frac{G_2}{T} \Rightarrow S_{G_2}^T = \frac{G_1(1+G_1G_2H) - G_1HG_2}{(1+G_1G_2H)^2}$$

$$T = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H} , \qquad S_{G_2}^T = \frac{1}{1+G_1G_2H}$$

$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_2}{1+G_1G_2H} \qquad G_1G_2H \gg 1 \Rightarrow \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{G_1H}$$

$$\begin{cases} \frac{C(s)}{D(s)} \simeq \frac{1}{G_1H} \\ S^T_{G_2} \simeq \frac{1}{G_1G_2H} \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{C(s)}{N(s)} \simeq \frac{-1}{H_1} \\ S^T_H \simeq -\frac{1}{H} \end{cases}$$

G_2 گین حلقه را افزایش می دهد ولی اغتشاش را تیز زیاد می کنند. بنابراین G_1 را انتخاب می کنیم برای افزایش گین حلقه.

در مسیر feed forward هر تابع تبدیلی که دیده نمی شود (در صورت نمی آید) را افزایش می دهیم. (برای کاهش حساسیت)

خطای حالت دائم:

برای سیستم نوسانی، transcient هیچگاه از بین نمی رود، خطای حالت دائم ندارد.

سیستم باید به حالت پایدار برسد که خطای حالت دائم را بتوان برای آن تعریف کرد.

خطای تعقیب: $e(t) = r(t) - c(t)$

$E(s) = R(s) - C(s)$

با فرض پایداری سیگنال $e(t)$:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s)$$

a) سیستم حلقه باز:

$C(s) = G(s)\cdot R(s)$ $\qquad R(s) \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow C(s)$

$\longrightarrow E(s) = (1-G(s))R(s)$

با فرض $R(s) = \frac{1}{s}$ $\leftarrow$

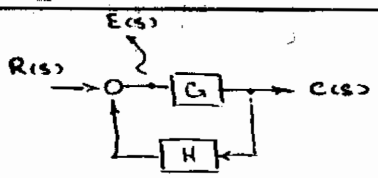
$E(s) = (1-G(s)).\frac{1}{s}$

با فرض پایداری G:

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} sE(s) = 1 - G(0)$$

$\leftarrow$ خطای حالت دائم وابسته به DC gain سیستم است. $\rightarrow$ dc گین

د) سیستم حلقه بسته :



$E(s)=R(s)-C(s)$ $\qquad$ $C(s)=T(s)\cdot R(s)$

$$\Rightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0} s(1-T(s))\cdot\frac{1}{s}=1-T(0)$$

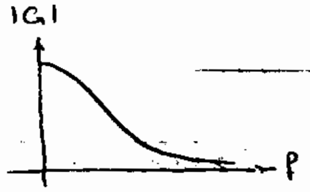
گین dc سیستم حلقه بسته ←

$E(s)=\frac{1}{1+G}\cdot R(s)$ $\qquad$ $H(s)=1$ $\qquad$ $R(s)=\frac{1}{s}$

$$\Rightarrow e_{ss}=\lim_{s\to 0} sE(s)=\frac{1}{1+G(0)}$$

(یادآوری پایداری سیستم حلقه بسته : $T=\frac{1}{1+G}$)

سیستمهای فیزیکی غالباً پایین گذر هستند ، بنابراین حالت حلقه بسته بهتر است .



$$\begin{cases} e_c=0 \Rightarrow G(0)\to\infty \\ e_o=0 \Rightarrow G(0)=1 \end{cases}$$

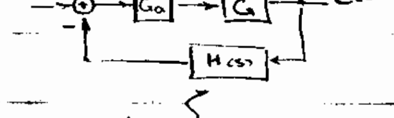
* مثال :

$$\begin{cases} G(s)=\frac{K}{1+\tau s} \\ H(s)=\frac{1}{1+\tau s} \end{cases} \qquad e_{ss}=?$$

[illegible]

* هزینه فیدبک :

هزینه‌های مادی:
- افزایش پیچیدگی (Instrumentation)
- افزایش قیمت



سنسور

Sensor

هزینه‌های معنوی:
- کاهش بهره (Gain) : قابل قبول
- امکان ناپایداری : قابل قبول نیست : باید از این بترسیم

آنچه برای ما مهم است، ریشه‌های $G+1$ است. ممکن است G پایدار باشد ولی $G+1$ خیر.

مثال:

$$G(s) = \frac{s-1}{s+0.5}$$

$$k=1$$

$$T = \frac{\frac{s-1}{s+0.5}}{1 + k\cdot\frac{s-1}{s+0.5}} = \frac{s-1}{s+0.5+s-1}$$

$$\rightarrow \quad T(s) = \frac{s-1}{2s-0.5}$$

مشخص است که ناپایدار است. درصورتیکه G پایدار بود.

در این مثال اگر بصورت حلقه باز کنترل می‌کردیم، پایدار می‌شد.