هوالعلیم

The Concept of Velocity in Mechanics of Fluids

By: Amin Moosaie, Farzaneh Samsami

مفهوم سرعت در مکانیک سیالات

نویسندگان: امین موسائی، فرزانه صمصامی
aminmoosaie@mail.iust.ac.ir

منظور از میدان سرعت یک سیال چیست؟ آیا همان تصوری که از سرعت ذرات و اجسام صلب داریم، به مکانیک سیالات قابل تعمیم است؟

بیائید نگاهی مجدد به این ترکیب بیندازیم: "میدان سرعت سیال" که متشکل از سه مفهوم میدان، سرعت و سیال می باشد. ابتدا هریک از این واژه ها را به تنهایی تعریف می کنیم و در انتها ترکیب آنها را که هدف اصلی ما در این مقاله می باشد مورد بررسی قرار می دهیم. "میدان"، طبق تعریف، توزیع پیوسته ای از یک کمیت اسکالر، برداری و یا تانسوری است که با توابع پیوسته‌ای از مختصات فضا و زمان بیان شود. برای نمونه می‌توان دمای تمام نقاط یک جسم را در هر لحظه با میدان اسکالر $T(x,y,z,t)$ بیان نمود. یک میدان برداری، مانند میدان سرعت را می‌توان بصورت ریاضی $\mathbf{V}(x,y,z,t)$ نشان داد. در مکانیک سیالات یک محیط پیوسته، کمیاتی مانند چگالی، دما، انرژی داخلی و آزاد، انتروپی، سرعت، تنش و . . . به سیال نسبت داده می‌شوند. فرض می‌شود که این کمیات، توابع پیوسته و همواری(مشتق پذیری) از متغیرهای فضایی و در گذر زمان می‌باشند. یعنی این کمیات میدان‌ها هستند. از طرف دیگر فرض پیوستگی برای این توابع به همراه فرض هموار بودن به این معناست که تابع مورد نظر به تعداد بارهای دلخواه (معمولاً از نگاه کاربردی 2 تا 3 بار کافی است) برحسب تمام متغیرهای مستقل (3 متغیر فضایی و 1 متغیر زمان در کلی‌ترین حالت) قابل مشتق‌گیری است.

چون دانش مکانیک سیالات با کمیات توزیع شده سروکار دارد، در آن فرصت‌های زیادی برای استفادهٔ سودمندانه از روش میدان وجود دارد. علاوه براین، میدان‌های اسکالر، برداری و تانسوری در مطالعهٔ جنبه‌های گوناگون پدیده های سیالات ظاهر می شوند.

تا اینجا اولین واژه از ترکیب فوق را شناختیم. حالا نوبت دومین واژه یعنی "سرعت" و پس از آن سیال می‌باشد. در دینامیک تحلیلی ذرات آموختیم که چگونه کمیتی به نام سرعت را با مشتق‌گیری از تغییر مکان یک ذرهٔمتحرک نسبت به زمان، به آن ذره نسبت دهیم. همچنین به اجسام صلب علاوه بر سرعت خطی یا همان مشتق تغییر مکان ذره نسبت به زمان، یک سرعت زاویه‌ای (دورانی) نسبت داده می‌شود که به عنوان مشتق زمانی تغییر زاویهٔ جسم در فضا تعریف می‌گردد. آیا منظور از سرعت در یک سیال، یا به عبارت دیگر سرعت یک پیوستار سیالی هم می‌تواند چنین باشد؟

www.mme.persianblog.com ©
اولین وبلاگ تخصصی در مکانیک سیالات
آزمایشگاه هیدرودینامیک کاربردی دانشگاه علم وصنعت ایران

همان‌طور که می دانید از دینامیک سیالات به عنوان دینامیک محیط پیوسته دارای تغییر فرم یاد می‌شود. در دینامیک کلاسیک ذرات و اجسام صلب، معادلات برای ذرات نوشته می‌شدند. اما در دینامیک سیالات، معادلات بیلان برای المان‌های سیال نوشته می‌شوند. به یک المان کوچک از سیال، یک ذرهٔ هیدرودینامیکی و یا یک ذرهٔ محیط پیوسته گفته می‌شود. می‌توان یک سیال را به تعداد بسیار زیادی المان تبدیل کرد و برای هر المان تعدادی درجهٔ آزادی در نظر گرفته و معادلات بیلان را برای آن نوشته و حل کرد. آیا به راستی هیچ گونه محدودیتی در تعریف المان به عنوان ذرهٔ معرف سیال وجود ندارد و حتی اگر دوست داشتیم می‌توانیم یک مولکول را هم به عنوان یک المان در نظر بگیریم؟ آیا منظور از سرعت ماکروسکوپیک (= میدان سرعت در تئوری مکانیک محیط پیوسته) همین سرعتی است که به تک تک مولکول‌های المان نسبت داده می‌شود یا سرعتی است که به المان سیال نسبت داده می‌شود یا چیز دیگریست؟ یا مثلاً می‌توان به نوعی دیگر رفتار کرد و کل سیال مورد بررسی را به عنوان یک المان در نظر گرفت؟ آیا با انتخاب هریک از این دو نوع نگاه، یک میزان سرعت برای سیال بدست می‌آید یا اینکه تعریف سرعت سیال کاملاً بستگی دارد به اینکه کدام یک از این دو نوع نگاه را برگزینیم؟

در پاسخ باید گفت که یک سیال از تعداد بسیار زیادی ذرات میکروسکوپیک که مولکول‌ها یا اتم‌های آن سیال (مثلاً برای آب مولکول‌های آب و برای هلیم اتمهای هلیم) هستند، تشکیل شده‌است. به هر ذرهٔ میکروسکوپی دقیقاً همانند دینامیک کلاسیک ذرات می‌توان یک سرعت نسبت داد. ولی منظور از ذرهٔ هیدرودینامیکی یک ذرهٔ میکروسکوپی کوچک نیست. یک ذرهٔ هیدرودینامیکی، یک المان کوچک از سیال می‌باشد. این ذره با ذراتی که در مکانیک کلاسیک پیش می‌آیند کاملاً متفاوت است. در مورد المان سیال دو بحث مطرح است. اولین بحث که در بالا به آن اشاره شد حاکی از اینست که هرچند المان سیال مفهومی تصوری است اما هر اندازه‌ای نمی‌تواند داشته باشد و در کران بالا و پایین خود دارای محدودیت می‌باشد. کران بالای این المان سیال باید آنقدر کوچک باشد که بتوان از این المان در محاسبات دیفرانسیلی استفاده کرد و از طرف دیگر در کران پایین، المان باید به قدری بزرگ باشد که با افزایش و یا کاهش تعدادی از ذرات که کسر قابل ملاحظه‌ای از تعداد کل ذرات نباشند، نتایج بدست آمده در مورد آن دستخوش تغییرات چندانی نشود. بحث دومی که در مورد المان سیال مطرح است اینست که المان سیال مجموعه‌ای از ذرات ریز است که گرچه همانند آنچه در دینامیک گازهای بسیار رقیق پیش می‌آید (مثلاً در مسائل مربوط به سفینه‌ها در حاشیهٔ خارجی اتمسفر)، آزادی عمل کامل ندارند ولی ارتباط آنها مانند ارتباط میان ذرات تشکیل دهندهٔ یک جسم صلب هم مستحکم نیست و اینجا کار کمی مشکل می‌گردد. این ریز ذرات تا چه حدی آزادی عمل دارند؟ پاسخ بستگی شدیدی به نوع سیال و ترمومکانیکی که تجربه می‌کند دارد. در ادامه دوباره به این پرسش مهم بر می‌گردیم و به آن پاسخ خواهیم داد.

اما در مورد سرعت، باید قائل به دو مفهوم مجزا باشیم:

1. مفهوم سینماتیکی که بطور کلاسیک با آن آشنا هستیم و به عنوان مشتق زمانی تغییر مکان و یا تغییر زاویه تعریف می‌شود که کاربرد این تعریف در دینامیک اجسام صلب و ذرات می باشد.

www.mme.persianblog.com ©
اولین وبلاگ تخصصی در مکانیک سیالات
آزمایشگاه هیدرودینامیک کاربردی دانشگاه علم وصنعت ایران

2. مفهوم دینامیکی (سینتیکی) که سرعت در آن به عنوان ممنتوم (ایمپالس) مخصوص (ممنتوم بر واحد جرم) تعریف می‌گردد. البته در حالت کلی این امکان وجود دارد که برای شتاب هم تعریف دینامیکی نیرویی که ناظر لخت مشاهده می‌کند بر واحد جرم را پیش کشید.

تا اینجا مفاهیم میدان، سیال و سرعت توضیح داده شد و مبنا بر این بود که پس از بررسی تک تک واژه‌ها به تعریف ترکیب این واژه‌ها بپردازیم. حال با این اوصاف ببینیم که چگونه میدان سرعت یک سیال تعریف می‌شود. برای تعریف سرعت ماکروسکوپی سیال از مفهوم دینامیکی سرعت استفاده می‌کنیم نه مفهوم سینماتیکی آن که این یکی از اساسی‌ترین تفاوت‌های سینماتیک سیالات با سینماتیک ذرات و اجسام صلب است. بنابراین برای اندازه‌گیری سرعت در یک المان سیال نیاز داریم که ممنتوم تک تک ذرات و نیز جرم کل المان را بدانیم. برای اینکه ببینید چگونه میدان سرعت یک سیال تعریف می‌شود فرض کنید که یک ذرهٔ هیدرودینامیکی (همان المان سیال) شامل n ذره بوده و نیز ذرهٔ kام دارای جرم لختی m_k می‌باشد. بنابراین ممنتومی که توسط هر ذرهٔ هیدرودینامیکی (المان سیال) و به دلیل حرکتش حمل می‌شود، برابر است با $m_k v_k$ که در آن v_k بردار سرعت ذرهٔ kام است. کل ممنتومی که توسط المان سیال حمل می‌شود، برابر است با $\sum_{k=1}^{n} m_k v_k$. از آنجا که می‌خواهیم از این سرعت در معادلات حاکم بر حرکت المان سیال و کل سیال استفاده کرده و مثلاً در بررسی‌های نیرویی که در حالت سیالات نیوتنی به معادلات ناویر- استوکس منجر می‌شد برسیم، خواسته می‌شود که سرعت نسبت داده شده به المان سیال به اندازه و در جهتی باشد که میزان کل ممنتوم تغییر نکند. ممنتوم المان سیال عبارتست از mv که در آن m جرم کل المان و برابر با $\sum_{k=1}^{n} m_k$ است و v سرعتی است که به المان سیال نسبت داده می‌شود. بنابراین داریم

$$mv = \left(\sum_{k=1}^{n} m_k\right) v = \sum_{k=1}^{n} m_k v_k \quad \Rightarrow \quad v = \frac{\sum_{k=1}^{n} m_k v_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k}. \qquad (1)$$

اکنون اندازه و جهت بردار سرعت نسبت داده شده به المان را می دانیم اما این اطلاعات برای تعریف میدان سرعت کافی نیستند. در تئوری میدان‌ها، سرعت برای یک نقطه از فضای اقلیدسی تعریف می‌شود، حال اینکه ما یک المان که ناحیه‌ای از فضای اقلیدسی را اشغال کرده است، در نظر گرفتیم. مسأله‌ای که در اینجا با آن مواجه می‌شویم این است که میزان و جهت بردار سرعت را می‌دانیم، اما نمی‌دانیم این بردار سرعت به چه نقطه‌ای تعلق داشته و به آن نسبت داده می شود؟ پاسخ این مسأله چندان هم مشکل نیست؛ سرعت به مرکز جرم المان نسبت داده می‌شود. پس ما یک مقدار متوسط سینماتیکی در یک ناحیه از فضای اقلیدسی تشکیل داده و آن را به عنوان سرعت ماکروسکوپیک سیال در نقطه‌ای که مرکز جرم این المان است در نظر می‌گیریم. این مفهوم بیانگر مهمترین ایدهٔ مکانیک محیط‌های پیوسته است که همان طرح میانگین‌گیری (Averaging Scheme) می‌باشد. این نوع متوسط‌گیری با مقادیری که ابزارهای اندازه‌گیری به دست می‌دهند قابل مقایسه بوده و

www.mme.persianblog.com
اولین وبلاگ تخصصی در مکانیک سیالات
آزمایشگاه هیدرودینامیک کاربردی دانشگاه علم وصنعت ایران

همخوانی دارد؛ مثلاً وقتی یک دماسنج را در مکانی از سیال قرار می‌دهیم و دمای آن مکان را خوانده، به عنوان دمای آن نقطه گزارش می‌کنیم، باز هم چنین متوسطی را خوانده‌ایم. زیرا سر دماسنج یک نقطه نبوده بلکه دارای اندازهٔ محدودی است و دمایی که در اختیار می‌گذارد در واقع معدل دما در ناحیه‌ای از فضای اقلیدسی است که سر دماسنج اشغال کرده است.

تا اینجا هدف تعریف میدان سرعت سیال بود و بر این اساس سرعت المان سیال را بر حسب سرعت ذرات سیال تعریف کردیم. از طرف دیگر گفتیم که در دینامیک اجسام صلب و ذرات به هر ذره یک میدان سرعت به مفهوم سینماتیکی آن، قابل نسبت دادن است. دوباره همان پرسش مطرح می شود که با توجه به این موضوع، برای تشریح کامل رفتار سینماتیک مجموعه ذرات سیال یا همان المان سیال چند سرعت مستقل باید به سیال نسبت داد(سرعت خطی، زاویه ای و . . .)؟

پاسخ این سؤال بستگی دارد به اینکه رابطهٔ بین ذرات سیال در یک المان چگونه است یعنی همان پرسش دومی که در بالا مطرح شد در مورد اینکه ذرات تشکیل دهنده المان سیال، که ذرات میکروسکوپی تشکیل دهندهٔ محیط پیوسته (سیال) می باشند تا چه حد به هم وابسته‌اند؟ پیش از این گفتیم که پاسخ این سؤال به نوع سیال و ترمومکانیکی که سیال تجربه می‌کند مربوط است. آنچه در واقعیت مشاهده می‌کنیم این است که ذرات سیال در المان نه همانند جامدات هستند که کاملاً نسبت به هم مقید هستند و نه اینکه هیچ تأثیری بر روی هم نداشته باشند و در عمل حالتی بین اینهاست. اما آنچه در نتایج مدلسازی ریاضی این سیالات مشاهده می‌کنیم بر می‌گردد به اینکه چند درجهٔ آزادی برای توصیف سینماتیک سیال در نظر بگیریم و در هر یک از تئوری‌های مختلف یک فرضی در نظر گرفته شده است و بر مبنای آن روابطی برای سرعت سیال بدست آمده است. مثلاً ایدهٔ بنیادین تئوری الاستیسیته اینست که وابستگی زیادی بین ذرات وجود داشته و فرض می‌شود که یک میدان برداری سینماتیکی یعنی میدان جابجایی $u(r,t)$ بطور دقیق سینماتیک محیط الاستیک را توصیف می‌کند. در این حالت اگر فقط یک درجهٔ آزادی برداری (یا سه درجهٔ آزادی اسکالر) یعنی میدان سرعت $v(r,t)$ را مطابق فوق در نظر بگیریم، برای توصیف حرکت و سرعت سیال کفایت می‌کند. به دلیل وجود وابستگی‌های شدید بین ذرات در محیط‌های جامد (به عنوان مثال جامدات برخلاف سیالات هندسهٔ ذاتی دارند و شکل ظرف را به خود نمی‌گیرند) شاید این ایده تا حد زیادی درست باشد، ولی در محیط های سیال ممکن است این ایده درست نباشد.

در یک سیال می‌توان به تعداد دلخواه مقادیر متوسط سینماتیکی مستقل تشکیل و به المان سیال نسبت داد. به زبان مکانیک محیط‌های پیوسته می‌توان سرعت‌های مختلف و از مراتب مختلف به تعداد دلخواه تعریف کرد که تابع یکدیگر نباشند. این را تئوری عمومی محیط‌های پیوستهٔ از مرتبهٔ m می‌نامند که m تعداد درجات آزادی یا تعداد میدان‌های سرعت برداری یا تانسوری است که به المان سیال نسبت داده می‌شود و در حقیقت تفاوت تئوری‌های مختلف در تعریف سرعت سیال هم از تفاوتی که آنها در تعریف مرتبهٔ m قائل می‌شوند ناشی می‌گردد. اگر این تئوری محدود شود به یک درجهٔ آزادی میدان برداری سرعت $v(r,t)$، در این صورت به تئوری مکانیک سیالات کلاسیک یا مکانیک محیط‌های پیوستهٔ کلاسیک می‌رسیم. در این حالت سرعت زاویه‌ای تابع

www.mme.persianblog.com
اولین وبلاگ تخصصی در مکانیک سیالات
آزمایشگاه هیدرودینامیک کاربردی دانشگاه علم وصنعت ایران

سرعت خطی بوده و رابطهٔ $\boldsymbol{\omega}=\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ برقرار است. حال اگر میزان m را افزایش دهیم و تئوری را محدود کنیم به دو درجهٔ آزادی برداری، یعنی علاوه بر میدان برداری سرعت خطی، میدان برداری سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{r},t)$ را هم بطور مستقل در نظر بگیریم ($\boldsymbol{\omega}\neq\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$)، به محیطی می‌رسیم که محیط چرخشی یا محیط Cosserat نامیده می‌شود. با توجه به ممنتوم زاویه‌ای که توسط المان سیال حمل می‌شود و با متوسط گیری از ممنتوم‌های زاویه‌ای به مفهوم دینامیکی متوسط گیری، به طریقی مشابه رابطهٔ (1)، برآیند میدان سرعت زاویه‌ای تک تک ذرات موجود در المان به عنوان سرعت زاویه‌ای المان سیال تعریف می‌شود. رابطهٔ میدان برداری سرعت زاویه‌ای به قرار زیر است.

$$\boldsymbol{\omega}=\frac{\sum_{k=1}^{n} m_k\,\Delta\mathbf{r}_k\times\mathbf{v}_k}{\sum_{k=1}^{n} m_k\left(\Delta\mathbf{r}_k\cdot\Delta\mathbf{r}_k\,\mathbf{E}-\Delta\mathbf{r}_k\circ\Delta\mathbf{r}_k\right)}, \tag{2}$$

که در آن صورت کسر ممنتوم زاویه‌ای کل المان و مخرج نیز ممان اینرسی المان است و ممنتوم زاویه‌ای کل تقسیم بر ممان اینرسی، سرعت زاویه‌ای را بدست می‌دهد.

البته علاوه بر مرتبهٔ محیط پیوسته، درجهٔ مواد هم باید تعیین شود و این به بیان ساده یعنی چند تا گرادیان از میدان‌های برداری و تانسوری سینماتیکی در توابع مواد باید در نظر گرفته شوند. در حالت عمومی برای توان استهلاک (توان اصطکاک) یک محیط سیال از مرتبهٔ m و از درجهٔ n داریم

$$\begin{aligned}\dot{\mathrm{D}}\triangleq\mathfrak{z}<\wp,\nabla\circ\wp,\ldots>\triangleq<&\nabla\circ\mathbf{v},\nabla\circ\nabla\circ\mathbf{v},\ldots,\overbrace{\nabla\circ\cdots\circ\nabla}^{n-\text{tuple}}\circ\mathbf{v},\\ &\nabla\circ\boldsymbol{\omega},\nabla\circ\nabla\circ\boldsymbol{\omega},\ldots,\overbrace{\nabla\circ\cdots\circ\nabla}^{n-\text{tuple}}\circ\boldsymbol{\omega},\\ &\nabla\circ\overset{<2>}{\mathbf{V}}_{\mathrm{S}},\nabla\circ\nabla\circ\overset{<2>}{\mathbf{V}}_{\mathrm{S}},\ldots,\overbrace{\nabla\circ\cdots\circ\nabla}^{n-\text{tuple}}\circ\overset{<2>}{\mathbf{V}}_{\mathrm{S}}\\ &\nabla\circ\overset{<m>}{\mathbf{V}},\nabla\circ\nabla\circ\overset{<m>}{\mathbf{V}},\ldots,\overbrace{\nabla\circ\cdots\circ\nabla}^{n-\text{tuple}}\circ\overset{<m>}{\mathbf{V}}>.\end{aligned} \tag{3}$$

از طریق این توان اصطکاک، پتانسیل توان اصطکاک بدست آمده و با مشتق‌گیری از آن هم میدان‌های تنش از مراتب مختلف به عنوان توابعی از وضعیت سینماتیکی بدست می‌آیند که همان معادلات مواد محیط‌های متکامل است. در اینجا بحث مکانیک سیالات متکامل پیش می‌آید که توسط Trostel آغاز شد و توسط عاطفی، Silber، Alexandru و دیگران تکامل یافت.

www.mme.persianblog.com
اولین وبلاگ تخصصی در مکانیک سیالات
آزمایشگاه هیدرودینامیک کاربردی دانشگاه علم و صنعت ایران

منابع و مراجع :

[1] Rudolf Trostel, *Gedanken zur konstruktion mechanischer Theorien II*, Technische Universität Berlin-Forschungsberichte Nr. 7, Berlin, 1988.

[2] Amin Moosaie, *A Treatise on Continuum Mechanical Modelling of Turbulence*, B.Sc. Thesis, Advised by Dr.-Ing. Atefi, Department of Mechanical Engineering, Iran University of Science and Technology, 2005.

[3] مکانیک سیالات، ایروینگ اچ.شیمز-ترجمه مهندس علیرضا انتظاری-چاپ هفتم
[4] جلسه آزمایشگاه هیدرودینامیک، مورخ 1384/5/9

***** بازنشر الکترونیکی مطلب فوق با ذکر نام وبلاگ بلامانع است.**
***** بازنشر مکتوب مطالب منوط به اجازه از مدیر وبلاگ می باشد.**

www.fluid.persianblog.com ○
اولین وبلاگ تخصصی در مکانیک سیالات
آزمایشگاه هیدرودینامیک کاربردی دانشگاه علم وصنعت ایران