

حل سینماتیک مستقیم مکانیزم 3RPR با تبدیل آن به دو چهار میله ای

دانشکده مهندسی مکانیک

دانشگاه صنعتی شریف

vakil_mohamad@hotmail.com

چکیده

در طی این مقاله سینماتیک مستقیم مکانیزم صفحه ای 3RPR مورد بررسی قرار می گیرد. برای حل سینماتیک مستقیم، مکانیزم مربوطه به دو چهار میله ای جدا از هم تفکیک شده است و سپس شرط لازم برای آنکه ترکیب دو مکانیزم چهار میله ای، مکانیزم 3RPR را بسازد اعمال می گردد. تنها شرط مکانیزم 3RPR مورد بررسی آن است که سه نقطه محل اتصال مکانیزم به زمین به روی خطی راست قرار دارند. در حالت کلی جوابها از حل، چند جمله ای درجه شش بدست می آید و در صورتیکه سه نقطه متصل کننده پایه ها به سکوی متحرک هم بر روی یک خط راست باشند، جواب از حل یک معادله درجه سه بدست می آید.

واژه‌های کلیدی: مکانیزم موازی صفحه ای - سینماتیک مستقیم - راه حل بسته .

۱- مقدمه

در دهه های اخیر مکانیزمهای موازی بطور قابل توجهی نظر محققین و دانشمندان را به خود جذب کرده است . مکانیزمهای موازی در مقایسه با مکانیزمهای سری از سختی، سرعت و دقت عمل بالاتری برخوردار هستند علاوه بر آن، در مکانیزمهای موازی امکان قرار دادن فعال سازها بر روی زمین وجود دارد در حالی که وقوع چنین امری برای مکانیزمهای سری تقریباً غیرممکن می باشد . هنگامی که فعال سازها بر روی زمین قرار داده می شوند، اینرسی اجرام متحرک بطور قابل ملاحظه ای کاهش یافته و لذا رسی دن به شتابهای بالا آسانتر می گردد.

در کنار مزایای ارائه شده، مکانیزمهای موازی دارای فضای کاری محدودتری در مقایسه با مکانیزمهای سری می باشند و شاید این بارزترین عیب آنها در مقایسه با مکانیزم های سری باشد. مقایسه ای دقیق تر بین این دو دسته مکانیزم توسط Tesar, Cox انجام شده است [1].

مکانیزمهای موازی را می توان در حالت کلی به دو دسته فضایی و صفحه ای تقسیم کرد. معروفترین مکانیزم موازی فضایی، مکانیزم شش درجه آزادی ارائه شده توسط استوارت می باشد [2]، که خود به عنوان پایه برای بسیاری از مکانیزمهای فضایی دیگر محسوب می گردد [3-5]. در کنار مکانیزمهای موازی فضایی، مکانیزمهای موازی صفحه ای متعددی وجود دارند که دارای کاربردهای فراوانی می باشند. بعنوان مثال می توان به خانواده مکانیزمهای موازی معرفی شده توسط Gosselin ، Merlet, Lemivz اشاره کرد [6]. از جمله کارهای دیگر انجام شده به روی مکانیزمهای صفحه ای می توان به تحقیق صورت گرفته توسط Angels , Chablat , Slutski اشاره کرد [7].

در بررسی یک مکانیزم، چه فضایی و چه صفحه ای، سینماتیک مستقیم و معکوس آن جز اولین مسایل هستند که باید مورد تجزیه و تحلیل قرار گیرند. حل سینماتیک معکوس در مکانیزمهای موازی در اکثر موارد بسیار آسان می باشد درحالیکه حل سینماتیک مستقیم در بسیاری از موارد به راحتی سینماتیک معکوس نمی باشد [8].

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد

۲- استاد دانشکده مهندسی مکانیک

هر پایه را امکان پذیر می سازد. باید توجه داشت که در این مکانیزم فعال سازها به روی مفاصل کشویی قرار دارند و در نتیجه اندازه پایه ها را مشخص می نمایند. اما مکانیزم مورد بررسی در طی این مقاله حالت ساده شده مکانیزم شکل ۱ می باشد که بگونه ای که نقطه E روی خط متصل کننده نقاط A, B قرار دارد (شکل ۲).

همانطور که مشاهده می شود می توان مکانیزم بالا را متشکل از دو چهار میله ای EFCD, ABEF دانست اما این دو چهار میله ای به نحوی هستند که در آنها پایه مشترک (EF) زوایای مکمل با خط AC ساخته و خطوط ED, BE نیز با یکدیگر زاویه α را بسازند.

سینماتیک مستقیم ۳RPR در یک نگاه

در سینماتیک مستقیم ۳RPR با داشتن طولهای AB, DC, FE, BD باید موقعیت BD کاملاً مشخص شود. شکل ۳ را در نظر بگیرید که در آن دو چهارمیله ای که از طرف یکی از پایه ها به یکدیگر متصل شده اند، نشان داده شده است. برای آنکه ترکیب دو چهار میله ای، مکانیزم ۳RPR را به وجود آورد، باید دو شرط زیر برقرار باشد.

$$\begin{cases} \theta_2 + \theta_4 = \pi - \alpha \\ |BD| = S \end{cases} \quad (1)$$

معادله دوم دستگاه بالا با معلوم بودن L_1, L_3 تابعی از دو مجهول θ_1, θ_3 می باشد. در ادامه نشان داده می شود که می توان $\cos \theta_2$ را به صورت خطی بر حسب $\cos \theta_1$ و $\cos \theta_4$ را نیز به طور خطی بر حسب $\cos \theta_3$ بیان کرد. لذا معادله اول را نیز می توان بر حسب θ_1, θ_3 نوشت. بنابراین بدست آوردن θ_1, θ_3 منوط به حل دستگاه دو معادله، دو مجهول (۱) بر حسب θ_1, θ_3 می گردد. همچنین نشان داده می شود که اگر نقاط متصل کننده پایه ها به مجری نهایی به روی یک خط راست باشند راه حل بسته برای سینماتیک مستقیم وجود دارد. در ادامه مقاله از قرارداد زیر استفاده خواهد شد:

$$s\theta_i = \sin(\theta_i), \quad c\theta_i = \cos(\theta_i)$$

بسیاری از محققین بعثت پیچیدگی های موجود در راه حل های سینماتیکی مستقیم مکانیزمهای موازی از روشهای عددی استفاده می کردند [9]. اما متأسفانه روشهای عددی بسیار کند بوده و همچنین قادر به تعیین تعداد جوابها نمی باشد و نیز به شدت وابسته به شرایط اولیه می باشد. لذا بسیاری از محققین درصدد بدست آوردن جوابی بسته برای سینماتیک مستقیم بر آمدند [10].

در طی این مقاله راه حلی چند جمله ای برای سینماتیک مستقیم مکانیزم صفحه ای ۳RPR ارائه میگردد. تنها شرط مکانیزم ۳RPR مورد بررسی آن است که سه نقطه محل اتصال مکانیزم به زمین بر روی خطی راست هستند. این مکانیزم بطور کامل توسط Gosselin, Angels مورد بررسی قرار گرفته است [11]. همچنین در [12] به راه حلی چند جمله ای برای سینماتیک مستقیم مکانیزم مورد نظر اشاره شده است.

باید توجه داشت که در طی این مقاله با دیدگاهی کاملاً متفاوت مسئله مورد بررسی قرار می گیرد. جواب بدست آمده از این روش کاملاً منطبق با کارهای قبلی می باشد. در نهایت نشان داده می شود که برای مجموعه ای از ورودی ها، جواب مکانیزم مورد بررسی به حل عددی معادله ای درجه شش می انجامد و در حالت خاص آن که نقاط متصل کننده پایه ها به سکوی متحرک به روی خط راست قرار دارند، به حل معادله ای درجه سه می رسد.

در ادامه ابتدا مکانیزم مورد نظر معرفی می گردد. سپس سینماتیک مستقیم آن مورد بررسی قرار گرفته و راه حل مربوطه با توجه به روش مورد نظر ارائه می گردد. سپس چگونگی به دست آوردن موقعیت سکوی متحرک ارائه می گردد. در نهایت نتایج عددی برای معادلات به دست آمده ارائه شده و جمع بندی کلی پایان بخش این تحقیق خواهد بود.

معرفی مکانیزم

مکانیزم مورد بررسی در حالت کلی، در شکل ۱ نشان داده شده است. در این مکانیزم پایه ها توسط مفاصل دورانی به زمین و مجری نهایی (مثلث BDE) متصل می گردند. در بین مفصل دورانی متصل کننده هر پایه به زمین و مجری نهایی یک مفصل کشویی قرار دارد که تغییر طول

$$\frac{L_1 + L_3 + h^2 - S^2}{2L_1L_3} - \frac{h}{L_3}c\theta_1 + \frac{h}{L_1}c\theta_3 - c\theta_1c\theta_3 = s\theta_1s\theta_3 \quad (۸)$$

با مربع کردن دو طرف معادله (۸) و جاگزینی $s^2\theta$ بر مبنای $c^2\theta$ نتیجه می شود:

$$F_1c^2\theta_1 + F_2c^2\theta_3 + F_3c\theta_1c\theta_3 + F_4c\theta_1 + F_5c\theta_3 + F_6c^2\theta_1c\theta_3 + F_7c\theta_1c^2\theta_3 + F_8 = 0 \quad (۹)$$

که در آن:

$$F_1 = \left(\frac{h}{L_3}\right)^2 + 1, \quad F_2 = \left(\frac{h}{L_1}\right)^2 + 1$$

$$F_3 = -\frac{(L_1^2 + L_3^2 + h^2 - S^2)h}{L_1L_3} - \frac{2h^2}{L_1L_3}$$

$$F_4 = -\frac{(L_1^2 + L_3^2 + h^2 - S^2)h}{L_1L_3^2}$$

$$F_5 = -\frac{(L_1^2 + L_3^2 + h^2 - S^2)h}{L_1^2L_3}$$

$$F_6 = \frac{2h}{L_3}, \quad F_7 = -\frac{2h}{L_1}$$

$$F_8 = \left(\frac{L_1^2 + L_3^2 + h^2 - S^2}{2L_1L_3}\right)^2 - 1$$

برای بدست آوردن معادله دوم از دو طرف معادله اول دستگاه (۱) کسینوس گرفته می شود:

$$c\theta_2c\theta_4 + c\alpha = s\theta_2s\theta_4 \quad (۱۰)$$

با مربع کردن دو طرف معادله (۱۰) و جاگزینی $s^2\theta$ بر مبنای $c^2\theta$ نتیجه می شود:

$$c^2\theta_2 + c^2\theta_4 - s^2\theta_2 + 2c\alpha c\theta_2 c\theta_4 = 0 \quad (۱۱)$$

با استفاده از روابط (۴) و (۵) و جایگزینی θ_2, θ_4 بر اساس θ_1, θ_3 نتیجه می شود:

$$Z_1c^2\theta_1 + Z_2c^2\theta_3 + Z_3c\theta_1 + Z_4c\theta_3 + Z_5c\theta_1c\theta_3 + Z_6 = 0 \quad (۱۲)$$

$$Z_1 = \left(\frac{L_1q}{L_2p}\right)^2, \quad Z_2 = \left(\frac{L_3b}{L_2q}\right)^2$$

$$Z_3 = \frac{(L_2^2 - L_1^2 + p^2 - a^2)L_1a}{L_2^2p^2}$$

$$+ \frac{(L_2^2 - L_3^2 + q^2 - b^2)L_1a}{L_2^2pq}c\alpha$$

رابطه خطی زوایا در مکانیزم چهار میله ای

در ادامه نشان داده می شود که رابطه ای خطی بین زوایای مقابل در یک مکانیزم چهار میله ای وجود دارد. در چهار میله ای ABFE (شکل ۳) قطر BF ضلع مشترک مثلثهای ABF, BEF می باشد. اندازه BF در صورتی که متعلق به مثلث ABF فرض شود برابر است با:

$$(BF)^2 = L_1^2 + a^2 - 2aL_1c\theta_1 \quad (۲)$$

از طرف دیگر طول BF در صورتی که متعلق به مثلث BEF فرض شود برابر است با:

$$(BF)^2 = L_2^2 + p^2 - 2pL_2c\theta_2 \quad (۳)$$

با مساوی قرار دادن معادلات ۲ و ۳ رابطه زیر بین کسینوس زوایای θ_2, θ_1 به دست می آید:

$$c\theta_2 = \frac{L_2^2 - L_1^2 + p^2 - a^2}{2pL_2} + \frac{L_1a}{L_2p}c\theta_1 \quad (۴)$$

با انجام اعمالی مشابه و در نظر گرفتن چهارمیله ای FEDC نشان داده می شود که رابطه خطی زیر بین θ_3, θ_4 برقرار است.

$$c\theta_4 = \frac{L_2^2 - L_3^2 + q^2 - b^2}{2qL_2} - \frac{L_3b}{L_2q}c\theta_3 \quad (۵)$$

تحلیل سینماتیک مستقیم مکانیزم ۲RPR

با در نظر گرفتن شکل ۳ و قراردادن دستگاه محورهای مختصات مرجع به روی نقطه A به نحوی که امتداد محور x از نقطه C عبور نماید و با فرض اینکه اندازه AB برابر با L_1 ، اندازه EF برابر با L_2 و اندازه CD برابر با L_3 باشد، می توان مختصات نقاط D, B را بصورت زیر نوشت:

$$B = \begin{pmatrix} L_1c\theta_1 \\ L_1s\theta_1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} h + L_3c\theta_3 \\ L_3s\theta_3 \end{pmatrix} \quad (۶)$$

حال معادله دوم دستگاه (۱) با توجه به رابطه (۶) به صورت زیر بیان می گردد:

$$|BD|^2 = S^2 \Rightarrow (L_1 \cos \theta_1 - h - L_3 \cos \theta_2)^2 + (L_1 \sin \theta_1 - L_3 \sin \theta_2)^2 = S^2 \quad (۷)$$

با ساده کردن معادله (۷) و استفاده از روابط مثلثاتی نتیجه می شود:

$$m_2 = p_4(2F_6p_2 + F_7)^2 + 2p_3(2p_2F_1 + F_3 + 2F_6p_1)(2F_6p_2 + F_7) - 2(F_2 + F_3p_2 + 2F_6p_1p_2 + F_1(p_2^2 + p_3) + F_6p_4 + F_7)(F_6p_3 + F_6p_2^2)$$

$$m_3 = p_5(2F_6p_2 + F_7)^2 + 2p_4(2p_2F_1 + F_3 + 2F_6p_1)(2F_6p_2 + F_7) + p_3(2(2p_1 + F_1 + F_4)(2F_6p_2 + F_7) + (2p_2F_1 + F_3 + 2F_6p_1)^2 - 2(F_1(p_4 + 2p_1p_2) + F_4p_2 + F_3p_1 + F_6p_1^2 + F_5 + F_6F_5)(F_6p_3 + F_6p_2^2) - (F_2 + F_3p_2 + 2F_6p_1p_2 + F_1(p_2^2 + p_3) + F_6p_4 + F_7)^2$$

$$m_4 = -2(F_1(p_1^2 + p_5) + F_8 + F_4p_1)(F_6p_3 + F_6p_2^2) - 2(F_1(p_4 + 2p_1p_2) + F_4p_2 + F_3p_1 + F_6p_1^2 + F_5 + F_6p_5)(F_2 + F_3p_2 + 2F_6p_1p_2 + F_1(p_2^2 + p_3) + F_6p_4 + F_7) + 2p_5(2p_2F_1 + F_3 + 2F_6p_1)(2F_6p_2 + F_7) + p_4(2(2p_1F_1 + F_4)(2F_6p_2 + F_7) + (2p_2F_1 + F_3 + 2F_6p_1)^2 + 2p_3(2p_1F_1 + F_4)(2p_2F_1 + F_3 + 2F_6p_1)$$

$$m_5 = p_5(2(2p_1F_1 + F_4)(2F_6p_2 + F_7) + (2p_2F_1 + F_3 + 2F_6p_1)^2 + 2p_4(2p_1F_1 + F_4)(2p_2F_1 + F_3 + 2F_6p_1) + p_3(2p_1F_1 + F_4)^2 - 2(F_1(p_1^2 + p_5) + F_8 + F_4p_1)(F_2 + F_3p_2 + 2F_6p_1p_2 + F_1(p_2^2 + p_3) + F_6p_4 + F_7) - (F_1(p_4 + 2p_1p_2) + F_4p_2 + F_3p_1 + F_6p_1^2 + F_5 + F_6p_5)^2$$

$$Z_4 = -\frac{(L_2^2 - L_3^2 + q^2 - b^2)L_3b}{L_2^2q^2} - \frac{(L_2^2 - L_1^2 + p^2 - a^2)L_3b}{L_2^2pq}c\alpha$$

$$Z_5 = -2c\alpha \frac{L_1L_3ab}{L_2^2pq}$$

$$Z_6 = \left(\frac{L_2^2 - L_1^2 + p^2 - a^2}{2pL_2}\right)^2 + \left(\frac{L_2^2 - L_3^2 + q^2 - b^2}{2qL_2}\right)^2 - s^2\alpha +$$

$$2c\alpha \left[\frac{(L_2^2 - L_1^2 + p^2 - a^2)(L_2^2 - L_3^2 + q^2 - b^2)}{4pqL_2^2} \right]$$

با در نظر گرفتن $c\theta_1 = x, c\theta_3 = y$ معادلات ۹ و ۱۲ به صورت زیر در خواهند آمد :

$$F_1x^2 + F_2y^2 + F_3xy + F_4x + F_5y + F_6x^2y + F_7xy^2 + F_8 = 0 \quad (۱۳)$$

$$Z_1x^2 + Z_2y^2 + Z_3x + Z_4y + Z_5xy + Z_6 = 0 \quad (۱۴)$$

از معادله (۱۴) $(c\theta_1)x$ را بر حسب $(c\theta_3)y$ بدست آورده می شود که به صورت زیر خواهد بود :

$$x = a \pm \sqrt{b} \quad (۱۵)$$

$$a = -\frac{Z_3 + Z_5y}{2Z_1} = p_1 + p_2y$$

$$b = \frac{Z_5^2 - 4Z_1Z_2}{4Z_1^2}y^2 + \frac{2Z_3Z_5 - 4Z_1Z_4}{4Z_1^2} +$$

$$\frac{Z_3^2 - 4Z_1Z_6}{4Z_1^2} = p_3y^2 + p_4y + p_5$$

با جایگزینی x از معادله (۱۵) در (۱۳) و سپس مربع کردن دو طرف تساوی و یکسری ساده سازی معادله درجه شش مقابل بر حسب y بدست می آید:

$$m_1y^6 + m_2y^5 + m_3y^4 + m_4y^3 + m_5y^2 + m_6y + m_7 = 0 \quad (۱۶)$$

که در آن :

$$m_1 = p_3(2F_6p_2 + F_7)^2 - (F_6p_3 + F_6p_2^2)^2$$

$$\begin{cases} \theta_1 = -\text{Arc cos}(cte1) \\ \theta_3 = -\text{Arc cos}(cte2) \end{cases}$$

باید توجه داشت که از مجموعه اول و دوم تنها یکی می‌تواند به عنوان جواب قابل قبول باشد زیرا معادله ۷ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(L_1 \sin \theta_1 - L_3 \sin \theta_3)^2 = S^2 - (L_1 \cos \theta_1 - h - L_3 \cos \theta_3)^2$$

سمت راست معادله بالا برای هر دو دسته جواب یک و دو مقداری یکسان است، در حالیکه سمت چپ آن برای دسته جواب یک و دو نمی‌تواند با هم برابر باشند. لذا از دو دسته جواب یک و دو تنها یکی می‌تواند به عنوان جواب قابل قبول باشد. به همین ترتیب می‌توان اثبات کرد که از دو دسته جواب سه و چهار نیز تنها یکی می‌تواند قابل قبول باشد. در نتیجه برای هر جواب معادله ۱۶ دو دسته که برائشان جوابهایی که نسبت به زمین قرینه‌ی کدیگر هستند بدست می‌آید.

تحلیل سینماتیک مستقیم مکانیزم ۳RPR در حالت خاص

در این حالت محل اتصال پایه‌ها به مجری نهایی بر روی خط راست است. در این حالت معادله اول دستگاه (۱) به فرم زیر است

$$\theta_2 + \theta_4 = \pi \quad (۱۹)$$

با توجه به این رابطه معادله (۱۰) به فرم ساده زیر تبدیل می‌شود:

$$c\theta_2 = -c\theta_4 \quad (۲۰)$$

با جایگزینی روابط (۴) و (۵) در معادله (۱۸) نتیجه به معادله ساده زیر بین $c\theta_1, c\theta_3$ به جای معادله (۱۲) خواهیم رسید:

$$c\theta_3 = Z'_1 + Z'_2 c\theta_1 \quad (۲۱)$$

$$Z'_1 = \frac{(L_2^2 - L_1^2 + p^2 - a^2)q}{2pL_3b} + \frac{(L_2^2 - L_3^2 + q^2 - b^2)}{2qL_3b}$$

$$Z'_2 = \frac{L_1aq}{L_3bp}$$

$$m_6 = 2p_5(2p_1F_1 + F_4)(2F_1p_2 + F_3 + 2F_6p_1) + p_4(2p_1F_1 + F_4)^2 - 2(F_1(p_1^2 + p_5) + F_8 F_4p_1)(F_1(p_4 + 2p_1p_2) + F_4p_2 + F_3p_1 + F_6p_1^2 + F_5 + F_6p_5)$$

$$m_7 = p_5(2p_1F_1 + F_4)^2 - (F_1(p_1^2 + p_5) + F_8 - F_4p_1)^2$$

معادله ۱۶ با معادله بدست آمده در مرجع [۱۲] کاملاً تطابق دارد. با بدست آوردن y از معادله (۱۶) می‌توان مقدار مربوطه x را به راحتی از معادله (۸) که به صورت زیر می‌گردد بدست آورد

$$hc\theta_1 + ps\theta_1 = k$$

معادله بالا دو جواب برای x می‌دهد. لذا به ازای هر مقدار y ، دو مقدار برای x وجود دارد و در نتیجه دو جفت جواب موجود است، اما هر جفت خود به دو دسته که در ادامه توضیح داده می‌شود، تقسیم می‌گردد.

یعنی:

$$\cos \theta_3 = cte2 \Rightarrow \cos \theta_1 = cte1$$

یا:

$$\cos \theta_1 = cte1 \Rightarrow \begin{cases} \theta_1 = \text{Arc cos}(cte1) \\ \theta_1 = -\text{Arc cos}(cte1) \end{cases} \quad (۱۷)$$

$$\cos \theta_3 = cte2 \Rightarrow \begin{cases} \theta_3 = \text{Arc cos}(cte2) \\ \theta_3 = -\text{Arc cos}(cte2) \end{cases} \quad (۱۸)$$

مجموعه معادلات (۱۷) و (۱۸) بالا مشخص کننده این حقیقت است که، چهار دسته جواب برای مجموعه θ_1 و θ_3 وجود دارد که به صورت زیر قابل بیان هستند. دسته جواب اول:

$$\begin{cases} \theta_1 = \text{Arc cos}(cte1) \\ \theta_3 = \text{Arc cos}(cte2) \end{cases}$$

دسته جواب دوم:

$$\begin{cases} \theta_1 = \text{Arc cos}(cte1) \\ \theta_3 = -\text{Arc cos}(cte2) \end{cases}$$

دسته جواب سوم:

$$\begin{cases} \theta_1 = -\text{Arc cos}(cte1) \\ \theta_3 = \text{Arc cos}(cte2) \end{cases}$$

دسته جواب چهارم:

$$\begin{cases} L_1 = 1 & A = (0,0) \\ L_2 = 2 & , F = (2,0) \\ L_3 = 2 & C = (1,0) \end{cases}, \quad h = 5$$

لازم به ذکر است که هر سه ریشه بدست آمده برای معادله (۲۳) قابل قبول نبوده و تنها دو ریشه از سه ریشه قابل قبول می باشند. جوابهای مربوط به وضعیت نقطه D و زاویه (ϕ) با توجه به معادلات (۲۴) و (۲۵) بدست آمده است و در جدول ۱ ارائه شده است.

نتیجه گیری

در طی این مقاله سینماتیک مستقیم مکانیزم 3RPR با تبدیل آن به دو چهارمیله ای مورد بررسی قرار گرفت. تنها شرطی که مکانیزم مورد بررسی دارد آن است که نقاط متصل کننده پایه ها به زمین به روی یک خط راست قرار دارند.

ابتدا رابطه ای خطی بین کسینوس زوایا در چهار میله ای بدست آمد و سپس شرط لازم برای آنکه ترکیب دو چهارمیله ای ساختار مکانیزم 3RPR را بوجود آورد اعمال گردید. در حالی که نقاط اتصال مکانیزم به مجری نهایی به روی یک خط راست قرار ندارند جواب مسئله از حل چند جمله ای درجه شش بدست می آید. اما هنگامیکه نقاط متصل کننده پایه ها به مجری نهایی به روی یک خط راست قرار دارند مسئله حل بسته داشته و پاسخها از حل معادله ای درجه سه بدست می آید.

مراجع

1. D.J.Cox and D.Tesar, The Dynamical Modeling and Command Signal Formulation for Parallel Multi-Parameter Robotic Devices, Univ.Florida, Gainesville, Internal Rep., CIMAR,Sept. 1981.
2. D.Stewart, A Platform with Six Degree of Freedom, in: Proceeding the institute of Mechanical Engineering, 180 (15) p. 371-386, 1965.
3. K.H.Hunt, Structural Kinematics of In-Parallel-Actuated Robot Arms, ASME Journal of Mechanisms,

دوباره با در نظر گرفتن $c\theta_1 = x, c\theta_3 = y$ معادله (۲۱) به فرم زیر تبدیل می گردد:

$$x = Z'_1 + Z'_2 y \quad (22)$$

با ترکیب معادلات (۲۲) و (۱۳)، معادله درجه سه زیر بر مبنای $y(c\theta_3)$ نتیجه می شود:

$$m'_1 y^3 + m'_2 y^2 + m'_3 y + m'_4 = 0 \quad (23)$$

که در آن:

$$\begin{aligned} m'_1 &= F_6 (Z'_2)^2 + F_7 Z'_2 \\ m'_2 &= F_2 + F_3 Z'_2 + F_1 (Z'_2)^2 + F_7 Z'_1 + 2F_6 Z'_1 Z'_2 \\ m'_3 &= F_4 Z'_2 + F_3 Z'_1 + F_6 (Z'_1)^2 + 2F_1 Z'_1 Z'_2 + F_5 \\ m'_4 &= F_1 (Z'_1)^2 + F_8 + F_4 Z'_1 \end{aligned}$$

معادله (۲۳) بیان کننده این حقیقت است که به ازای مجموعه ای از ورودی ها حداکثر تعداد جوابهای ممکن برای $c\theta_1$ برابر با سه می باشد. با داشتن $c\theta_1$ از معادله (۲۳) و سپس استفاده از معادله (۲۱) می توان مقدار $c\theta_3$ متناظر را نیز بدست آورد. دوباره مطابق معادلات (۱۷) و (۱۸) می توان نتیجه گرفت که به ازای هر مجموعه برای $c\theta_1$ و $c\theta_3$ دو ترکیب بندی متفاوت برای مکانیزم وجود دارد.

بدست آوردن وضعیت مجری نهایی

برای بدست آوردن وضعیت مجری نهایی (خط BD) باید موقعیت یک نقطه آن به همراه زاویه دوران آن بدست آید. با داشتن به معادلات (۱۷) و (۱۸) و سپس دسته جوابهای بدست آمده و داشتن مقادیر L_1, L_3 به کمک روابط زیر می توان موقعیت نقطه D و سپس زاویه دوران آن (ϕ) را طبق روابط زیر بدست آورد.

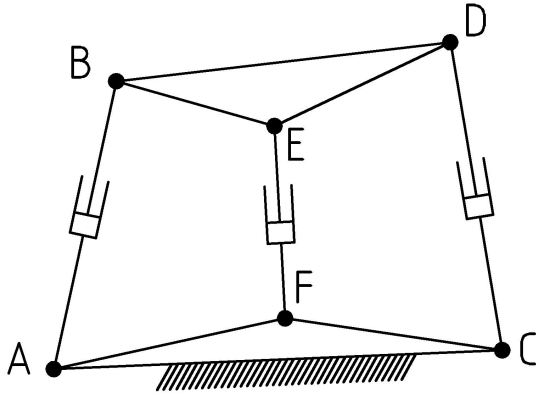
$$D = \begin{cases} h + L_3 c\theta_3 \\ L_3 s\theta_3 \end{cases} \quad (24)$$

$$\phi = \text{Arctg}(L_3 s\theta_3 - L_1 s\theta_1 / h + L_3 c\theta_3 - L_1 c\theta_1) \quad (25)$$

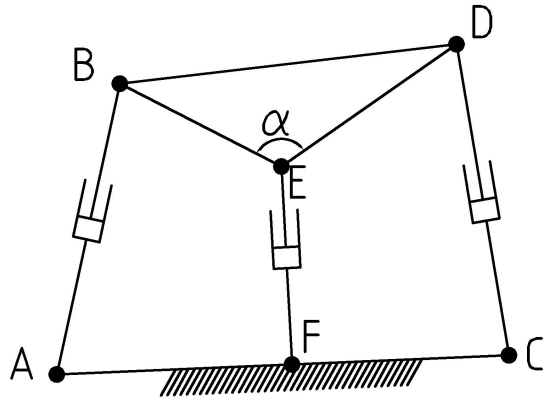
حل عددی

معادله بدست آمده در حالت خاص (۲۳) با توجه به مقادیر عددی مقابل حل شده است.

12. M. Clement and J. Seriou, Polynomial Solution for the Direct Kinematic Problem of Planar Three-Degree-of-Freedom Parallel Manipulators

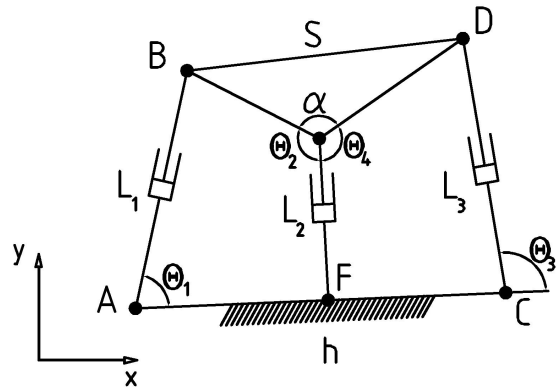


شکل ۱: شماتیک مکانیزم 3RPR



شکل ۲: شماتیک حالت خاص مکانیزم 3RPR

- Transmission and Automation in design, 105, p.705-712, 1983.
4. G.R.Dunlop and T.P. Jones, Position Analysis of a 3-DOF parallel manipulator, Mech and Mach Theory 32 (8) p.903-920, 1997.
 5. G.R.Dunlop and T.P. Jones, Position Analysis of a two DOF Parallel-Manipulator-the Canterbury tracker, Mech and Mach Theory 34 ,p.599-614, 1999.
 6. C. M . Gosselin, S.Lemieux and J.-P. Merelt, A New Architecture fo Planar Three-Degrees- of -Freedom Parallel Manipulator, in Proc. IEEE Int. Conf.On Robotics and Automation ,Minneapolis ,MN, p.3738-3743, 1999.
 7. L.Slutski, D. Chablat, and J. Angeles, The Kinematics of Manipulators Build from Closed Planar Mechanism, In Proc.IEEE/ASME Int.Conf. On Advanced Intelligent Mechatronics, GA, p.531-536, 1999.
 8. S.K.Agrawal, A Study of In-Parallel Manipulator System, Doctoral Dissertation, Dept. of Mechanical Engineering ,Stanford University, 1990
 9. J.E. Dieudonne, R.V. Parrish and R.E.Bardusch, An Actuator Extension Transformation for a Motion Simulator and An Inverse Transformation Applying Newton-Raphson's Method, NASA Technical Report TN D-7067, 1972 .
 10. P.Nanua and K.J.Wardron , Direct Kinematic Solution of a Stewart Platform , IEEE Transaction on Robotics and Automation ,Vol. 6, No.4, p.438-444,1990
 11. C. Gosselin and J.Angeles, The Optimum Kinematic Design of a Planar Three- Degree-of-Freedom Parallel Manipulator, ASME Journal of Mechanism , Transmission and Automation in Design, Vol.110, No.1 p.35-41, 1988.



شکل ۳: پارامترها و زوایا در مکانیزم 3RPR مورد بررسی

متصل کننده پایه ها به سکوی متحرک به روی خط راست باشند

i	$\phi(rad)$	x_D	y_D
1	.7227	2.75	3.3
2	-.7227	2.75	-3.3
3	1.3181	1	4.8
4	-1.3181	1	-4.8