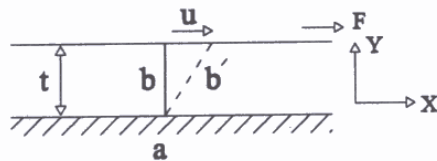


## با همکاری دانشجو ساغری فصل چهارم

### مکانیک سیالات

#### ۴-۱) مفاهیم پایه

سیال ماده ای است که هر گاه تحت تنش برشی قرار گیرد به طور پیوسته تغییر باید هر چند آن تنش برشی اندک باشد. در شکل (۴-۱) سیالی بین دو صفحه بسیار بزرگ موازی نزدیک به هم قرار گرفته است. صفحه زیرین ثابت و نیروی  $F$  بر صفحه فوقانی وارد می شود. مساحت صفحه فوقانی برابر  $A$  می باشد. قابل ذکر است که سیال در تماس مستقیم با مرز یک جسم سرعتی مساوی سرعت جسم فوق دارد. و یا به عبارتی در مرز تماس هیچ نوع لغزشی وجود ندارد. سرعت سیال کم باشد روابط زیر حاکم است:



$$F = \mu \frac{AU}{t} \Rightarrow \tau = \mu \frac{u}{t} \quad \text{و یا} \quad \tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (۴-۱)$$

ضریب تناسب  $\mu$  را لزجت سیال نامیده می شود و معادله (۴-۱) قانون لزجت نیوتن می باشد. اگر سیالی از روابط فوق تبعیت کند و  $\mu$  ثابت باشد سیال نیوتنی است و چنانچه رابطه بین  $\frac{du}{dy}$  و  $\tau$  غیر خطی باشد سیال غیر

نیوتنی نامیده می شود. لزجت خاصیتی از سیال می باشد که موجب آن سیال در برابر برش مقاومت می کند. لزجت یک گاز با افزایش دما، افزایش یافته ولی در مایعات با افزایش دما لزجت کاهش می یابد. در فشارهای معمولی لزجت مستقل از فشار است و تنها به دما بستگی دارد.

اغلب لزجت  $\mu$  به نام لزجت مطلق یا دینامیکی شناخته می شود. لزجت  $\mu$  دارای دیمانسیون  $FL^{-2}T$  و یا  $ML^{-1}T^{-1}$  است و واحد آن در SI نیوتن ثانیه بر متر مربع ( $N.S/m^2$ ) یا کیلوگرم بر متر ثانیه ( $kg/m.s$ ) و در سیستم انگلیسی ( $lb.s/ft^2$ ) است. لزجت سینماتیکی ( $\nu$ ) حاصل نسبت لزجت دینامیکی بر جرم مخصوص ( $\rho$ ) است و دیمانسیون آن  $L^2T^{-1}$  می باشد. واحد SI برای لزجت سینماتیکی  $m^2/s$  و واحد مرسوم انگلیسی آن  $ft^2/s$  است.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (۴-۲)$$

#### ۴-۲) استاتیک سیالات

علم استاتیک سیالات شامل دو قسمت می شود: مطالعه فشار و تغییرات آن در درون سیال و مطالعه نیروهای فشاری روی سطوح معین.

##### ۴-۲-۱) فشار

فشار متوسط با تقسیم کردن نیروهای عمومی وارد بر یک صفحه بر مساحت صفحه محاسبه می شود فشار در یک نقطه عبارتست از حد نسبت نیروی قائم به مساحت زمانی که مساحت به مقدار صفر میل کند. در یک نقطه که سیال بی حرکت باشد فشار در تمامی جهات یکسان است. اگر سیال در حال حرکت باشد فشار در یک نقطه به صورت متوسط تنشهای فشاری قائم در سه جهت اندازه گیری می شود ولی در یک سیال ایده آل حتی با فرض حرکت لایه ها قوانین استاتیک سیالات صادق است.

در مایعات چنانچه فشار در سطح آزاد  $P$  باشد برای هر نقطه ای که در عمق  $h$  از سطح آزاد قرار بگیرد فشار مطلق به صورت زیر محاسبه می شود:

$$P = P + \rho gh \quad (۴-۳)$$

فشار نسبت به هر مرجع مفروض اختیاری ممکن است بیان گردد. زمانی که یک فشار به صورت اختلاف آن با خلا" کامل شود فشار مطلق نامیده می

شود. و اگر بصورت اختلاف آن و فشار اتمسفر منطقه ملاحظه گردد به آن فشار نسبی اطلاق می گردد.

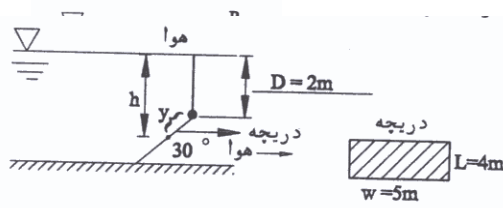
#### ۴-۲-۲) نیروی هیدرواستاتیکی وارد بر سطوح تخت و خمیده الف) سطوح تخت

مطابق شکل (۲) سطح A را که داخل سیال قرار گرفته در نظر می گیریم :  
نیروی عمودی وارد بر سطح A برابر است با :

$$F_R = \int_A PdA = P_0 A + \int_A \rho g h dA \quad (۴-۴)$$

در این حال باید مقدار دیفرانسیلی dA را بر حسب پارامترهای موجود نوشته و برای سطح مورد نظر انتگرال گیری کنیم.

مثال (۴-۱) نیروی عمودی وارد بر دریچه نشان داده شده در شکل (۴-۲) نیروی وارد بر دریچه را محاسبه کنید؟



$$F_R = \int_A PdA = P_0 A + \int_A \rho g h dA \quad (حل)$$

$$h = D + y \sin 30$$

مقدار  $P_0$  با  $P_0$  پائین دریچه خنثی می

$$F_R = \int_{y=0}^L \rho g (D + y \sin 30) w dy = 588 kN$$

#### ب) سطوح خمیده

نیروی هیدرواستاتیکی وارد بر سطوح خمیده را با دو مؤلفه x و y محاسبه کرده و در نهایت می توانیم نیروی برآیند را محاسبه کنیم. سطح خمیده A را در نظر می گیریم. تصویر A در راستای x را Ax و تصویر A در راستای y را Ay می نامیم (تغییرات y همان تغییرات در عمق سیال است). حال داریم :

$$F_x = \int_{A_x} PdA_x \quad (۵-۴)$$

هیدرواستاتیک

$$F_y = yV = \rho g V \quad (۶-۴)$$

هیدرواستاتیک

که در فرمول (۶-۴) V حجم آب بالای سطح آزاد می باشد.

#### ۴-۲-۳) نیروی شناوری

نیروی برآیند اعمال شده بر یک جسم توسط سیالی ایستا که جسم در آن غوطه ور و یا روی آن شناور می باشد نیروی شناوری نامیده می شود. نیروی شناوری همواره به سمت بالا می باشد. این نیرو برابر است با حاصلضرب حجم سیال جابجا شده در وزن مخصوص سیال (اگر جسم غوطه ور باشد به جای قسمتی از جسم کل آن در نظر گرفته می شود).

#### ۴-۲-۴) پایداری اجسام شناور و غوطه ور

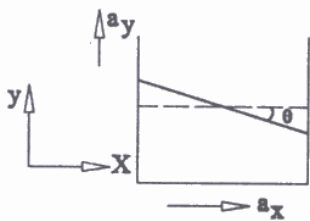
مرکز جرم قسمتی از جسم که در آب (سیال) فرو رفته به مرکز شناوری معروف است. هر جسم شناور که مرکز ثقل آن زیر مرکز شناوری آن باشد در حالت تعادل پایدار باقی می ماند. بعضی از اشیاء شناور خاص، زمانی که مرکز ثقل آنها بالای مرکز شناوری نیز می باشد در تعادل پایدار باقی می مانند. محل برخورد راستای نیروی شناوری با خط تقارن جسم را نقطه (متاسنتر) گویند. زمانی که متاسنتر بالای مرکز ثقل باشد جسم تعادل پایدار و زمانی که زیر مرکز ثقل باشد جسم تعادل ناپایدار دارد. هرگاه نقطه متاسنتر و مرکز ثقل به هم منطبق باشند تعادل به صورت خنثی است.

#### ۴-۲-۵) سکون نسبی

چنانچه سیال حرکت داشته باشد وی لایه های سیال روی یکدیگر نلغزند تنش برشی بین لایه ها صفر است و قوانین سیال ساکن حاکم می شود سکون نسبی در دو حالت زیر بررسی می شود :

### الف) حرکت مستقیم با شتاب ثابت

مطابق شکل (۳-۴) معادله (۷-۴) نشان دهنده سطح سیال در دستگاه مختصات و معادله (۸-۴) مشخص کننده زاویه سائل با افق،  $\theta$  و معادله (۹-۴) نشان دهنده فشار در هر نقطه



$$y = \frac{-a_x}{a_y + g} + \frac{P_0}{y(1 + a_y/g)} \quad (7-4)$$

$$\tan \theta = \frac{-a_x}{a_y + g}$$

$$P(x, y) = P_0 - y \frac{a_x}{g} x - y(1 + \frac{a_x}{g})y \quad (9-4)$$

معادلات بالا با قرض وجود شتاب در راستای y از معادله کلی (۱۰-۴) استخراج شده اند:

$$-\nabla P - \rho \mathbf{g} = \rho \mathbf{a}$$

حال اگر شتاب در راستای y را در برابر صفر در نظر بگیریم ( $a_y=0$ )

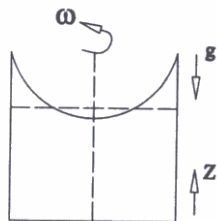
$$\text{معادله (۱۰-۴) به صورت } \frac{\delta p}{\delta y} = -\rho g \text{ و}$$

$\frac{\delta p}{\delta x} = -\rho a_x$  در می آید. در ضمن مقدار  $a_y$  در معادلات (۷-۴) و (۸-۴) و (۹-۴)

نیز صفر می شود.

### ب) حرکت دورانی یکنواخت حول محور قائم

در این حالت سیال مانند جسم صلب است با توجه به شکل (۴-۴) بهترین دستگاه برای بیان مطلب دستگاه استوانه ای است. معادله کلی (۱۰-۴) را برای این حالت بسط می دهیم:



$$\frac{\delta P}{\delta r} = \rho r \omega^2$$

$$\frac{\delta P}{\delta \theta} = 0$$

$$\frac{\delta P}{\delta z} = -\rho g$$

در ضمن فشار هر نقطه در این حالت از معادله (۱۴-۴) بدست می آید. البته در این رابطه نقطه (۱) با فشار  $P_1$  و ارتفاع  $Z_1$  و مؤلفه  $r = r_1$  به عنوان مرجع در نظر گرفته شده است. (۱۴-۴)

$$P - P_1 = \frac{\rho \omega^2}{2} (r^2 - r_1^2) - \rho g (z - z_1)$$

### ۳-۴) مفاهیم جریان سیال

جریان سیال را می توان انحاء مختلف دسته بندی کرد در این جا به چند نمونه از این تقسیم بندی ها اشاره می کنیم:

#### ۱-۳-۴) جریان آرام (لایه ای) و جریان مغشوش

در این جریان لایه ای ذرات سیال در طول مسیرهای مستقیم در لایه هایی حرکت می کنند، به طوری که هر لایه به نرمی بر روی لایه مجاور می لغزد، جریان لایه ای تحت قانون لزجت نیوتن می باشد. در جریان مغشوش ذرات سیال در مسیرهای کاملاً نامنظم حرکت می کنند و سبب تبادل مومنتموم بین یک جزء از سیال و جزء دیگر می گردند. جریان بین دو حالت لایه ای و مغشوش افت با توان  $1/7$  تا  $2$  از سرعت تغییر می کند در حالی که در جریان لایه ای افت با توان اول سرعت مربوط است.

#### ۲-۳-۴) جریان یکنواخت و غیر یکنواخت

جریان یکنواخت زمانی اتفاق می افتد که بردار سرعت در هر لحظه داده شده در تمامی نقاط یکسان باشد، جریانی که بردار سرعت از نقطه ای به نقطه دیگر تغییر کند جریان غیر یکنواخت است.

#### ۴-۳-۳) جریان دائم و غیر دائم

زمانی که خصوصیات جریان سیال مانند سرعت، فشار، دما و غیره نسبت به تغییرات زمان ثابت باشد جریان دائم و در غیر این صورت جریان غیر دائم است. در ضمن تقسیم بندی های دیگری نیز برای جریان سیال وجود دارد مثلاً جریان می تواند یک بعدی، دو بعدی یا سه بعدی باشد و یا جریان به صورت چرخشی و یا غیر چرخشی وجود داشته باشد.

#### ۴-۳-۴) خط جریان، خط مسیر و خط اثر

خط فرضی که در تمام نقاط، مؤلفه سرعت مماس بر آن است، خط جریان نام دارد. مسیر حرکت یک ذره خط مسیر نامیده میشود. از طرفی برای تعیین مسیر حرکت متوالی اغلب رنگ به داخل سیال تزریق می کنند. خط حاصل از تزریق رنگ را خط اثر می نامند. در جریان دائم خط مسیر، خط اثر و خط جریان بر هم منطبقند. اگر بردار سرعت را به صورت  $\vec{v} = (u, v, w)$  در نظر بگیریم معادله خط جریان به صورت زیر است:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (۱۵-۴)$$

#### ۴-۴) معادلات بنیادی جریان سیال

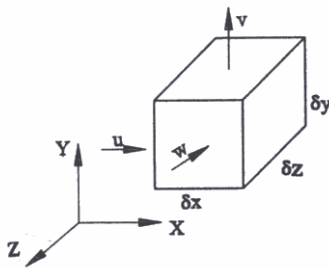
معادلات بنیادی حاکم بر جریان سیال به دو صورت انتگرالی و دیفرانسیلی نوشته می شود. برای نوشتن این معادلات قسمتی از سیال که لازم است روی آن بررسی انجام گیرد مشخص می شود. بر همین اساس جرم مشخصی از ماده که قابل تشخیص از مواد دیگر باشد سیستم نام دارد. مواد خارج از سیستم را محیط گویند. حجم کنترل (C.V) به ناحیه ای از فضای تحت بررسی اطلاق می شود که دارای جرم ثابت ولی جرم متغیر است و مرزهای آن را سطح کنترل (C.V) می نامند.

#### ۴-۴-۱) قانون بقای جرم (معادله پیوستگی)

طبق قانون کلی پیوستگی که بر اساس بقای جرم است. میزان افزایش جرم در حجم کنترل دقیقاً برابر با میزان ورود جرم خالص به حجم کنترل است:

$$\frac{\delta}{\delta t} \int_{C.V} \rho dv + \int \rho \vec{v} \cdot \vec{dA} = 0 \quad (۱۶-۴)$$

خروجی  
جرم  
داخل حجم



به این طریق معادله بقای جرم به طریق انتگرالی نوشته می شود. حال صورت

دیفرانسیلی این معادله را نیز به توجه به شکل (۴-۵) می نویسیم:

$$\vec{v} \cdot (\rho \vec{v}) + \frac{\delta p}{\delta t} = 0$$

معادله (۴-۱۷) را می توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$\frac{\delta(\rho u)}{\delta x} + \frac{\delta(\rho v)}{\delta y} + \frac{\delta(\rho w)}{\delta z} + \frac{\delta \rho}{\delta t} = 0 \quad (۱۸-۴)$$

حال معادله پیوستگی را برای چند حالت خاص ساده می کنیم:

**الف) سیال تراکم نا پذیر (p=cte)**

$$\text{فرم} \quad \frac{\delta}{\delta t} \int_{c.v} \rho dv + \int_{c.s} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0 \quad (۱۹-۴)$$

انتگرالی

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v} \rho = 0 \quad (۲۰-۴)$$

فرم دیفرانسیلی

(ب) حالت جریان دائم

$$(۲۱-۴)$$

$$(۲۲-۴)$$

فرم انتگرالی

فرم دیفرانسیلی

به عنوان مثال با توجه به قانون بقای جرم برای یک پمپ آب رابطه سرعت ورودی و خروجی پمپ به صورت زیر محاسبه می شود :

چون جریان دائم است بنابراین

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v} \rho dv = 0$$

$$\Rightarrow \int_{c.v} \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = \int \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \int \rho \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} = 0$$

$$\Rightarrow -\rho_1 v_1 A_1 + \rho_2 v_2 A_2 = 0 \Rightarrow \rho_1 v_1 A_1 = \rho_2 v_2 A_2$$

#### ۲-۴-۴) قانون دوم نیوتن (بقای اندازه حرکت)

فرم انتگرالی این معادله به صورت زیر است :

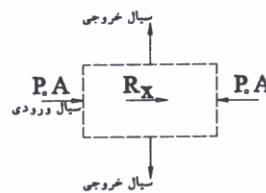
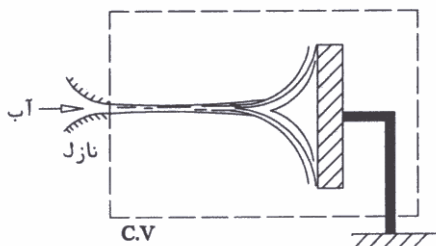
$$(۲۳-۴)$$

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}_B = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v} \rho \mathbf{v} dv + \int_{c.v} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

خروج خالص اندازه حرکت از حجم معیار + تغییر اندازه حجم معیار = نیروی جسمی + نیروی سطحی

در اینجا  $\sum F$  مجموع نیروهای خارجی مؤثر بر حجم معیار می باشد. این معادله را می توان در هر جهت دلخواه نوشت. فرم دیفرانسیلی این معادله با فرض  $p=cte$  و  $\mu=cte$  به نام معادلات نویر- استوکس شناخته می شود که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

**مثال (۲-۴)** آب با سرعت  $U$  از نازل خارج می شود و به مانع برخورد می کند نیرویی که آب به مانع وارد میکند چقدر است ؟



چون  
دائم است

(حل)

جریان

عبارت اول صفر میشود.

$$\sum \mathbf{F} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{c.v} \rho \mathbf{v} dv + \int_{c.v} \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A}$$

$$\Rightarrow R_x + P_0 A - P_0 A = \int \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} + \int \rho \mathbf{v} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{A} \Rightarrow R_x = \int U \rho (-U) dA = -\rho U^2 A_0$$

عکس این نیرو به مانع وارد می شود.

قانون بقای اندازه حرکت برای حالاتی مختلف از حجم معیار (مانند حجم معیار متحرک ، شتابدار و یا گردان) نیز نوشته می شود که در زیر به طور خلاصه به آنها اشاره می کنیم :

**الف) قانون بقای اندازه حرکت برای حجم معیار با سرعت ثابت  $U$**

در این حالت معادله مورد استفاده همان رابطه (۲۳-۴) می باشد با این تفاوت که سرعت  $V$  نسبت به حجم معیار سنجیده می شود.

(ب) قانون بقای اندازه حرکت برای حجم معیار با شتاب خطی  
(۲۴-۴)

$$\sum \vec{F} - \int_{e.v} \vec{a}_{rf} \rho dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{e.v} \vec{v} \rho dv + \int_{e.s} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

در این رابطه  $\vec{a}_{rf}$  شتاب خطی حجم معیار و  $V$  سرعت سیال نسبت به حجم معیار می باشد.

(ج) قانون بقای اندازه حرکت برای حجم معیار با شتاب دلخواه  
(۲۵-۴)

$$\sum \vec{F} - \int_{e.v} [\vec{a}_{rf} + 2\vec{w} \times \vec{v} \times \vec{w} + (\vec{w} \times \vec{v}) \times \vec{w} + \vec{a} \times \vec{r}] \rho dv = \frac{\partial}{\partial t} \int_{e.v} \vec{v} \rho dv + \int_{e.s} \vec{v} \rho \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

در این رابطه  $w$  سرعت دورانی و  $a$  شتاب دورانی حجم معیار و  $v$  سرعت خطی سیال نسبت به حجم معیار می باشد.

#### (۳-۴-۴) تابع جریان ( $\psi$ )

تابع جریان را برای یک جریان دو بعدی و تراکم ناپذیر تعریف می کنیم. تابع جریان در مختصات دکارتی به صورت زیر تعریف می شود:  
(۲۶-۴)

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, v = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

در دستگاه مختصات قطبی هم تابع جریان به صورت زیر تعریف می شود:  
(۲۷-۴)

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$$

لازم به تذکر است که در روی خط جریان مقدار تابع جریان ثابت است. مثال (۳-۴) با توجه به میدان سرعت داده شده، تابع جریان را به دست آورید؟  
 $\vec{v} = a(x^2 - y^2), -2axy$

(حل)

$$\vec{v} = (a(x^2 - y^2), v = -2axy) \Rightarrow u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$\Rightarrow \psi = \int u dy + f(x) \Rightarrow \psi = \int a(x^2 - y^2) dy + f(x) \Rightarrow \psi f(x) = ax^2 y - \frac{ay^3}{3} + f(x)$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -[2axy - 0 + f'(x)] = -2axy \Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = c \Rightarrow \psi = ax^2 y - \frac{ay^3}{3} + c$$

#### (۴-۴-۴) چرخش

چرخش ( $w$ ) سیال عبارت است از میانگین سرعت زاویه ای در المان خطی عمود بر هم سیال. چرخش به صورت زیر نوشته می شود:  
(۲۸-۴)

$$\vec{w} = \frac{1}{2} (\text{curl} \vec{v}) = \frac{1}{2} \vec{v} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \vec{\zeta}$$

در این رابطه  $\zeta$  که دو برابر بردار چرخش است (ورتیسیتی) نامیده می شود. جریان چرخشی معمولاً در جریان لایه مرزی و نواحی که تنش برشی سیال صفر نیست، مشاهده می گردد. از طرفی هرگاه تنش برشی وجود نداشته باشد جریان از نوع غیر چرخشی است مگر آنکه از ابتدا چرخش مشخص در سیال به وجود آورده شده باشد.

#### (۵-۴-۴) جریان غیر چرخشی

در جریان غیر چرخشی اندازه بردار چرخش صفر است یعنی المان های سیال نمی چرخند.

$$\vec{V} \times \vec{V} = 0 \Rightarrow \text{جریان} \quad (29-4)$$

غیر چرخشی  
در جریان غیر چرخشی تابع پتانسیل ( $\phi$ ) را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\vec{V} = -\vec{V}\phi = 0 \quad (30-4)$$

با توجه به غیر چرخشی بودن جریان نتیجه می شود :

$$\vec{v} = -\vec{V}\phi \Rightarrow \begin{cases} u = -\frac{d\phi}{dx} \\ v = -\frac{d\phi}{dy} \\ w = -\frac{d\phi}{dz} \end{cases}, \begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \\ v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases} \quad (31-4)$$

اگر جریان دو بعدی ، تراکم ناپذیر و غیر چرخشی باشد در این صورت :

$$V^2 \phi = 0 \quad (32-4)$$

#### 4-4-6) معادله بقای اندازه حرکت به فرم دیفرانسیلی

در قسمتهای قبلی فرم انتگرالی این معادله شرح داده شد در این قسمت  
لین معادله به فرم دیفرانسیلی بیان می شود.

در ابتدا مشتق مادی سرعت را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$(33-4)$$

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + u \frac{\partial \vec{v}}{\partial x} + v \frac{\partial \vec{v}}{\partial y} + w \frac{\partial \vec{v}}{\partial z}$$

معادلات بقای اندازه حرکت به فرم دیفرانسیلی با فرض جریان تراکم  
ناپذیر ( $p=cte$ ) و ( $\mu=cte$ ) به معادلات نویر\_ استوکس مشهور است و . شکل  
برداري آن به صورت زیر می باشد :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{B} - \vec{V}P + \mu V^2 \vec{V} \quad (34-4)$$

در حالت خاص ( $\mu=0$ ) معادلات نویر\_ استوکس به معادلات اوایلر تبدیل می  
شوند که این معادلات به صورت زیر می باشند :

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{B} - \vec{V}P \quad (35-4)$$

این معادلات برداری را می توان در هر يك از جهات محورهای مختصات نوشت.

#### 4-4-5) جریان سیال ایده آل و تراکم ناپذیر

در این بخش جریان سیال با فرض سیال تراکم ناپذیر ( $p=cte$ ) و عدم وجود  
لزجت ( $\mu=0$ ) بررسی می شود.

معادله اوایلر که در رابطه (35-4) به آن اشاره شد بر اساس فرض سیال  
تراکم ناپذیر و غیر لزج بدست آمده است. این معادله به شکلهای دیگری  
هم نوشته می شود.

#### 4-5-1) معادله اوایلر در امتداد و عمود بر خط جریان

معادله اوایلر در امتداد خط جریان برای يك جریان دائم و با صرف نظر  
از نیروهای حجمی به صورت زیر نوشته می شود :

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} = -v \frac{\partial v}{\partial s} \quad (36-4)$$

معادله اویلر در امتداد عمود بر خط جریان برای یک جریان دائم و با صرف نظر از نیروهای حجمی به صورت زیر می باشد.

$$\text{تغییرات فشار در امتداد عمود بر خط جریان} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \quad (۳۷-۴)$$

در رابطه (۳۷-۴) مقدار R شعاع خط جریان است و اگر خطوط جریان مورد مطالعه مستقیم باشند :

$$R \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial n} = 0$$

یعنی در خطوط جریان مستقیم تغییرات فشار در امتداد عمود بر خط جریان وجود ندارد.

#### ۴-۵-۲) معادله برنولی

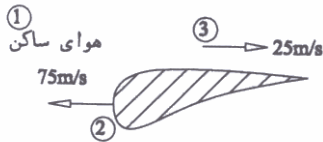
با انتگرالگیری از معادله اویلر، معادله برنولی حاصل می شود که بصورت زیر می باشد :

$$\frac{P}{\rho} + gz + \frac{V^2}{2} = cte \quad (۳۸-۴)$$

این معادله با فرض جریان دائم ، تراکم ناپذیر (p=cte) ، غیر لزج ( $\mu=0$ ) صادق است. هنگام نوشتن این معادله ، یکی از دو شرط زیر نیز باید ارضاء شود : معادله در امتداد خط جریان نوشته می شود ، یا جریان غیر چرخشی باشد.

**مثال (۴-۴)** ایرفویلی با سرعت 75m/s در حال پرواز است . هوا در نقطه ۳ با سرعت 25m/s در خلاف جهت ایرفول جریان دارد فشار هوا در نقطه های ۳ و ۲ چقدر است؟ (فشار هوای محیط برابر با Pa ۷۹۵۰۱ است)

(حل) چکن در اینجا جریان غیر دائم است برای استفاده از معادله برنولی باید مسئله را به حالت دائم بریم بنابراین دستگله مختصات را روی ایرفویل قرار می دهیم در این حالت یک بردار سرعت بردار 75m/s - به تمام نقاط اضافه می شود. حال می توان از معادله برنولی استفاده کرد :



$$\text{معادله برنولی بین نقاط ۱ و ۲} \Rightarrow P_2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \Rightarrow P_2 = 82332 Pa$$

۱ و ۲

$$\text{معادله برنولی بین ۱ و ۳} \Rightarrow P_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 = P_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 \Rightarrow P_3 = 77299 Pa$$

نقاط ۳ و ۱

**یادآوری :** لازم به ذکر است که چون در این قسمت سیال ایده آل فرض شده و در میدان جریان تنش برشی وجود ندارد جریان را می توان غیر چرخشی فرض کرد . باید متذکر شد که یکی از عوامل مهم در ایجاد چرخش سیال نیروی برشی است. ضمناً چنانچه سیال ایده آل از ابتدا چرخشی باشد چرخش سیال در تمامی میدان جریان ثابت خواهد ماند.

با توجه به آنچه بیان شد چون فرض غیر چرخشی بودن جریان صادق است می توان از تعاریف تابع پتانسیل ( $\phi$ ) که پیش از این در روابط (۴-۳۰) به (۴-۳۱) ذکر شد برای جریان ایده آل و غیر قابل تراکم استفاده کرد.

#### ۴-۵-۳) حل جریانهای ساده

با معرفی حل چند جریان ساده می توان برای حل جریانهای پیچیده تر آنها را به ترکیبی از جریانهای ساده تبدیل کرده ، حل نهایی آنها را بدست آورد. در این قسمت چند جریان ساده معرفی می شود :



### الف) جریان یکنواخت

در جریان یکنواخت مؤلفه افقی سرعت برابر  $u_\infty$  و مؤلفه قائم صفر است. در نتیجه تابع جریان و تابع پتانسیل به صورت زیر نوشته می شود :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = u_\infty r \sin \theta \\ \varphi = u_\infty r \cos \theta \end{array} \right. \quad \text{دستگاه استوانه ای} \quad (۳۹-۴)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = u_\infty y \\ \varphi = u_\infty x \end{array} \right. \quad \text{دستگاه دکارتی}$$

### ب) چشمه و چاه خطی

در این نوع جریان سرعتها در دستگاه استوانه ای به صورت  $v_\theta = 0$  و

$v_r = \frac{m}{r}$  هستند که اگر  $m$  یک مقدار مثبت باشد جریان ، چشمه خطی و اگر

$m$  منفی باشد جریان ، چاه خطی است. توابع جریان و پتانسیل به صورت زیر می باشد :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = m \theta \\ \varphi = m \ln r \end{array} \right. \quad \text{دستگاه استوانه ای} \quad (۴۰-۱)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = m \tan^{-1} \left( \frac{y}{x} \right) \\ \varphi = m \ln(x^2 + y^2)^{1/2} \end{array} \right. \quad \text{دستگاه دکارتی}$$

### ج) گردابه خطی

اگر نقش  $\psi$  و  $\varphi$  همین طور  $v_\theta$  و  $v_r$  در جریان چشمه یا چاه خطی را عوض کنیم جریان گردابه خطی حاصل می شود. لازم به تذکر است که جریان گردابه خطی یک جریان غیر چرخشی است. با استفاده از روش جمع آثار می توان این جریانهای ساده را با هم ترکیب کرده و جریانهای پیچیده تری بدست آورد.

### ۴-۵-۴) جریانهای دو بعدی در اطراف اجسام

#### الف) بیضوی رانکین

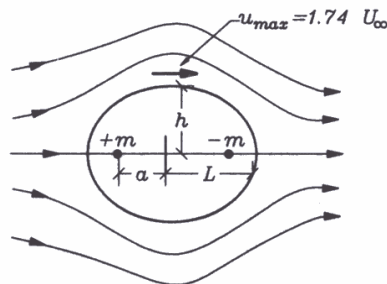
بیضوی رانکین از ترکیب جریان یکنواخت سیال با یک جفت چشمه و چاه بدست می آید. تابع جریان به صورت زیر تعریف می شود :

$$\psi = u_\infty y - m \tan^{-1} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (۴۱-۴)$$

دستگاه دکارتی

$$\psi = u_\infty r \sin \theta + m(\theta_1 - \theta_2) \quad (۴۲-۴)$$

دستگاه استوانه ای



خط جریان  $\psi=0$  یک منحنی بسته بیضی شکل را نشان میدهد (شکل ۴-۶) و در حقیقت  $\psi=0$  معادله بیضوی رانکین است. نقطه سکون ( $v=0$ ) در  $x=\pm L$  واقع شده است.

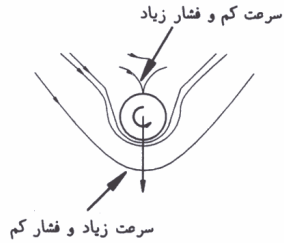
### ب) جریان سیال در اطراف يك استوانه

جریان دو قطبی + جریان یکنواخت = جریان سیال در اطراف استوانه گردابه + دو قطبی + جریان یکنواخت = جریان سیال در اطراف يك استوانه چرخشی

در این حالت تابع جریان به صورت زیر است :

$$\psi = u_{\infty} r \sin \theta - \frac{\lambda \sin \theta}{r} - K \ln r \quad (4-43)$$

گردابه      دو قطبی      جریان یکنواخت



شکل (4-43). جریان در اطراف استوانه در حال چرخش و اثر نیروی بالابر منفی بر

شکل (4-43) يك استوانه چرخشی در جریان یکنواخت را نشان میدهد. خطوط جریان در زیر استوانه به یکدیگر نزدیکتر بوده و در آنجا سرعت سیال زیاد و فشار کم است. عکس این حالت در بالای استوانه وجود دارد در نتیجه این اختلاف فشار يك نیروی بالابر منفی به استوانه اثر می کند و هر گاه جهت چرخش استوانه معکوس گردد جهت نیروی بالابر نیز معکوس می شود این پدیده به اثر مگنوس معروف است.

### ج) جریان سیال در گوشه دیوار با زاویه $\beta$

هرگاه يك گوشه دیوار با زاویه  $\beta = \frac{\pi}{n}$  را در نظر بگیریم توابع جریان و پتانسیل برای جریان سیال در گوشه دیوار به صورت زیر می باشند :

$$\begin{cases} \psi = Ar^n \sin n\theta \\ \phi = Ar^n \cos n\theta \end{cases} \quad (4-44)$$

دستگاه

استوانه ای

$A$  و  $n$  مقدار ثابت می باشند و البته  $n$  بستگی به زاویه  $\beta$  مورد نظر دارد.

### د) جریان سیال عمود بر يك صفحه تخت

تابع جریان به صورت زیر تعریف می شود :  
(4-45)

$$\psi^4 + \phi^2 u_{\infty}^2 (x^2 - y^2 + a^2) = u_{\infty}^4 x^2 y^2$$

### 4-6) تحلیل ابعادی و تشابه

چنانچه بتوان روابط حاکم بر سیالات را به صورتی در آورد که ابعاد تأثیری در نتایج نگذارند می توان هم از مقدار آزمایشها کم کرد و هم آزمایشها را در سطح کوچکتری انجام داد که پارامترهای بی بعد بر این اساس به وجود می آیند. یافتن پارامترها از روش خاصی صورت می گیرد که در ادامه توضیح داده خواهد شد.

### 4-6-1) قضیه $\pi$ - باکینگهام

در يك مسئله فیزیکی که  $n$  مقدار (خاصیت) با  $m$  بعد وجود دارد، مقادیر را می توان به صورت  $n-m$  پارامتری بعد مستقل مرتب کرد. یعنی اگر  $A_1$  تا  $A_n$  مقدار که در کل  $m$  بعد دارند به صورت رابطه  $F(A_1, \dots, A_n) = 0$  با هم در ارتباط باشند معادلات بی بعد عبارتند از  $f(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{n-m})$  یافتن پارامترهای بی بعد به روش زیر امکان پذیر است. از تعداد  $n$  مقدار  $A, m$  مقدار که دارای اهمیت بیشتری هستند انتخاب و به عنوان مقدارهای تکراری هر نوبت با توانی مجهول در يك پارامتر غیر تکراری ضرب شده و مساوی پارامتر بی

بعد قرار می گیرند. از آنجا که پارامتر بی بعد، یک است توان هر عبارت مساوی صفر قرار می گیرد و توانهای مجهول بدست می آید مثلا اگر تعداد n مقدار همراه با m بعد موجود باشد پارامترهای بی بعد با استفاده از n-m دستگاه m معادله m مجهول بدست می آید (در اینجا m=3).

$$\begin{aligned} \pi_1 &= A_1^{z_1} \cdot A_2^{y_1} \cdot A_3^{z_1} \cdot A_4 & x_i &= K \\ \pi_2 &= A_1^{z_2} \cdot A_2^{y_2} \cdot A_3^{z_2} \cdot A_5 & y_i &= K \\ M & & M & \\ \pi_{n-m} &= A_1^{z_{n-m}} \cdot A_2^{y_{n-m}} \cdot A_3^{z_{n-m}} \cdot A_n & z_i &= K \end{aligned}$$

مثال (۴-۵) جسم جامدی در جریان سیال قرار گرفته و نیروی مقاومتی به صورت  $F=f(L, V, \rho, \mu)$  به آن وارد می شود. گروههای بی بعد را بدست آورید. (حل)

خاصیت	F	L	V	$\rho$	$\mu$
بعد	$MLT^{-2}$	L	$LT^{-1}$	$ML^{-3}$	$ML^{-1}T^{-1}$

$$\pi_1 = L^{x_1} \cdot v^{y_1} \cdot \rho^{z_1} \cdot F$$

(ضریب  $\mu$  را عمدتا ۱- قرار داده ایم تا یکی از گروههای بی بعد عدد Re شود)

$$\begin{aligned} \pi_2 &= L^{x_2} \cdot v^{y_2} \cdot \rho^{z_2} \cdot \mu^{-1} \\ \rightarrow \begin{cases} X_1 + y_1 - 3z_1 = 0 \\ Z_1 + 1 = 0 \\ -y_1 - 2 = 0 \end{cases} & \rightarrow x_1 = -2, y_1 = -2, z_1 = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} X_2 + y_2 - 3z_2 = -1 \\ Z_2 = +1 \\ -y_2 + 1 = 0 \end{cases} & \rightarrow x_2 = y_2 = z_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{cases} \pi_1 = \frac{F}{\rho v^2 L^2} \\ \pi_2 = \frac{\rho v L}{\mu} \end{cases} & \Rightarrow \frac{F}{\rho v^2 L^2} = f\left(\frac{\rho v L}{\mu}\right) = f(Re) \end{aligned}$$

#### ۴-۶-۲) تشابه

برای برقراری تشابه هیدرولیکی بین مدل و نمونه اصلی باید تشابه های هندسی، سینماتیکی و دینامیکی همزمان برقرار باشد. در مسائل عمدتا نسبت تشابه هندسی مشخص است. چنانچه تشابه دینامیکی برقرار شود، تشابه سینماتیکی برقرار خواهد بود. بنابراین باید تشابه هندسی همراه با تشابه دینامیکی برقرار شود. برای برقراری تشابه از تساوی اعداد بی بعد در مدل و نمونه اصلی استفاده می شود.

#### ۴-۶-۳) اعداد بی بعد در سیالات

الف) عدد رینولدز :

$$Re = \frac{\rho V D}{\mu} \approx$$

نیروی  
اینرسی  
نیروی لزجت

ب) عدد فراد :

$$Fr = \frac{V}{\sqrt{gD}} \approx$$

نیروی  
اینرسی  
نیروی ثقل

نیروی اینرسی  
نیروی کشش سطحی

ج) عدد وبر :

$$We = \frac{\rho v^2 L}{\sigma} \approx$$

د) عدد ماخ : (سرعت صوت = C)

$$M = \frac{V}{C} \approx$$

$$\frac{\text{نیروی اینرسی}}{\text{نیروی}} =$$

ه) عدد اویلر :

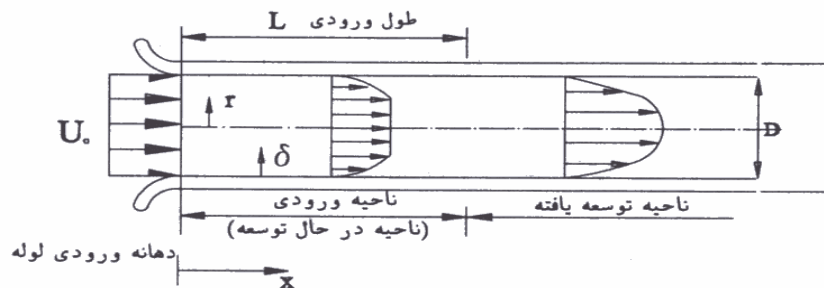
$$Eu = \frac{\Delta P}{\frac{1}{2} \rho v^2} \approx$$

$$\frac{\text{نیروی فشار}}{\text{نیروی اینرسی}} =$$

**یادآوری (۱)** در جریانات سیال با سطح آزاد مقادیر یکسان عدد فراد در مدل و نمونه اصلی تقریب خوبی از تشابه دینامیکی را حاصل می کند.  
**یادآوری (۲)** هرگاه سرعت سیال نزدیک یا بالاتر از سرعت صوت در سیال باشد عدد ماخ مهمترین پارامتر جریان است.

#### ۷-۴) جریان سیال لزج و غیر قابل تراکم

جریان سیالات از نقطه نظر محیطی که سیال در آن جریان دارد به دو نوع جریانهای داخلی و خارجی تقسیم می شود که این جریانات در ادامه مطلب بررسی خواهند شد اکنون جریان سیال در داخل یک لوله را در نظر می گیریم (شکل (۸-۴)).

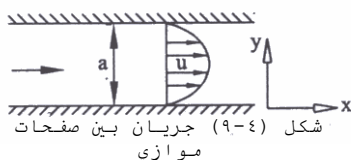


شکل (۸-۴). توسعه یافتن جریان سیال در ناحیه ورودی

هوا به عنوان یک سیال با سرعت یکنواخت U<sub>0</sub> به داخل لوله مکیده می شود به محض آنکه هوای ورودی با دیواره داخلی لوله تماس حاصل کند درست در روی دیواره سرعت آن به صفر می رسد (شرط عدم لغزش). با دور شدن از دهانه ورودی در مجاورت دیواره لوله ناحیه پدیدار می شود که در آن سرعت از U<sub>0</sub> کمتر است این ناحیه که در آن گرادیان سرعت مخالف صفر است و در نتیجه تنش برشی وجود دارد لایه مرزی رشد می کند. قسمت اولیه لوله از دهانه ورودی x=0 تا جایی که لایه های مرزی دیواره روبرو به هم برسند x=L را ناحیه ورودی یا در حال توسعه می نامند. از این نقطه به بعد ناحیه توسعه یافته آغاز می شود. در این ناحیه توزیع سیال به x بستگی نداشته و فقط تابعی از r (شعاع لوله) است اما در ناحیه ورودی سرعت به هر دو متغیر x و r وابسته است. با مطالب بالا مفاهیمی مفاهیمی مانند جریان توسعه یافته و در حال توسعه و نیز لایه مرزی و شرط عدم لغزش و ... توضیح داده شد حال به طور اختصاصی به بررسی چند نوع جریان می پردازیم :

#### ۷-۴-۱) جریان سیال در میان صفحات موازی

شکل (۹-۴) نمایانگر جریان بین دو صفحه موازی با فاصله a می باشد. جریان از نوع آرام، دائم، توسعه یافته و غیر قابل تراکم است. با



شکل (۹-۴) جریان بین صفحات موازی

حل معادلات جریان سیال توزیع سرعت و نیز توزیع تنش برشی سیال برای جریان بین صفحات موازی به صورت زیر بدست می آید :

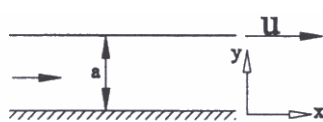
$$u = \frac{a^2}{2\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \left[ \left( \frac{y}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{a} \right) \right] \quad (4-46)$$

$$\tau_{yx} = \mu \frac{du}{dy} = a \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \left( \frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right) \quad (4-47)$$

دبی حجمی سیال عبوری از بین دو صفحه موازی نیز به صورت زیر حاصل می شود :

$$Q = -\frac{1}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) a^3 = \frac{a^3 \Delta P}{12\mu L} \quad (4-48)$$

لازم به ذکر است که L طول ضخامت مجرا در امتداد محور x است. در ضمن ماکزیم در  $y = \frac{a}{2}$  رخ داده و مقدار آن ۱/۵ برابر سرعت متوسط است.



شکل (۴-۱۰) صفحات تخت موازی با صفحه متحرک فوقانی

#### ۴-۷-۲) جریان سیال در میان صفحات موازی متحرک

این نوع جریان در یاتاقانهای ژورنال مطرح می شود زیرا به عنوان تقریب می توان یاتاقان را به صورت مجرای متشکل از دو صفحه تخت موازی در نظر گرفت. شکل (۴-۱۰) بیانگر جریان بین دو صفحه موازی است در حالی که صفحه بالایی متحرک می باشد .

در این جریان توزیع از رابطه زیر حاصل می شود :

$$u = \frac{Uy}{a} + \frac{a^2}{2\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \left[ \left( \frac{y}{a} \right)^2 - \left( \frac{y}{a} \right) \right]$$

در رابطه بالا علامت  $\frac{\partial P}{\partial x}$  اهمیت بسازی دارد :

اگر  $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$  باشد قسمتی از سیال که دور از صفحه متحرک فوقانی است در خلاف جهت اصلی حرکت می کند.

اگر  $\frac{\partial P}{\partial x} < 0$  باشد تمامی سیال در یک جهت (جهت حرکت صفحه متحرک) حرکت خواهد کرد.

اگر  $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$  باشد توزیع سرعت خطی خواهد بود.

در جریان بین صفحات موازی متحرک توزیع تنش برشی و نیز مقدار دبی عبوری از روابط زیر بدست می آیند :

$$\tau_{yx} = \mu \frac{U}{a} + a \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \left( \frac{y}{a} - \frac{1}{2} \right) \quad (4-51)$$

$$Q = \frac{Ua}{2} - \frac{1}{12\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) a^3$$

در ضمن محل سرعت ماکزیم در  $y = a$  قرار دارد.

در حالتی که  $\frac{\partial P}{\partial x} > 0$  امکان صفر شدن مقدار دبی وجود دارد (با توجه به معادله دبی)

#### ۴-۷-۳) جریان توسعه یافته و آرام در لوله (جریان پویزیل)

اگر جریان آرام توسعه یافته داخل لوله با شعاع R را در نظر بگیریم و x را به عنوان مختصه طوی لوله و r را به عنوان مختصه شعاعی معرفی کنیم توزیع سرعت به صورت زیر می باشد:

$$u = -\frac{R^2}{4\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right]$$

در ضمن تنش برشی و مقدار دبی عبوری از لوله نیز از روابط زیر حاصل می شوند:

$$\tau_{rx} = \mu \frac{du}{dr} = \frac{r}{2} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right)$$

$$Q = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left( \frac{\partial P}{\partial x} \right) = \frac{\pi D^4}{128\mu L} \Delta P$$

در ادامه این بخش به بررسی جریان در لوله ها و مجاری می پردازیم. روابطی که در بالا به آنها اشاره شد به جریان آرام سیال مربوط اند در حالی که در اغلب دستگاههای صنعتی جریان مغشوش برقرار است. حل جریان مغشوش غالباً پیچیده است و در اینجا به آن اشاره ای نمی کنیم اما از نتایج آن بهره می بریم.

#### ۴-۷-۴) معادله انرژی برای جریان داخل لوله

قانون بقای انرژی برای سیال داخل لوله به صورت زیر نوشته می شود (لازم به ذکر است که P نمایانگر فشار و V نشانگر سرعت متوسط سیال در مقطع مورد نظر و z ارتفاع مقطع مورد اشاره از سطح مبنا می باشد).

$$\frac{P_1}{\rho} + a_1 \frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1 = \frac{P_2}{\rho} + a_2 \frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2 + h_{It}$$

a ضریب انرژی جنبشی است (a≈1 برای جریان مغشوش و a=2 برای جریان آرام).

h<sub>It</sub> نیز تلفات هد کلی است که در ادامه توضیح داده خواهد شد. در صورتی که در بین دو مقطعی که معادله انرژی بریا آنها نوشته می شود، پمپ یا توربین نیز وجود داشته باشد معادله انرژی به صورت زیر در می آید:

(فرض کرده ایم جریان مغشوش و a≈1 است).

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{\bar{V}_1^2}{2} + gz_1 + gH = \frac{P_2}{\rho} + \frac{\bar{V}_2^2}{2} + gz_2 + h_{It}$$

gH مربوط به پمپ مثبت و gH مربوط به توربین منفی است.

$$\frac{P_1}{\rho} + \frac{\bar{V}_1^2}{2} + z_1 + H = \frac{P_2}{\rho} + \frac{\bar{V}_2^2}{2} + z_2 + h_{It}$$

در معادله (۴-۷-۵) w=gH کار برای واحد جرم مربوط به پمپ یا توربین است (gh مربوط به پمپ مثبت و gH مربوط به توربین منفی است).

#### ۴-۷-۵) محاسبه تلفات هد

تلفات هد کلی به صورت حاصل جمع تلفات اصلی h<sub>I</sub> و تلفات هد جزئی h<sub>Im</sub> در نظر گرفته می شود.

### الف) تلفات هد اصلي

تلفات انرژی در یک لوله مستقیم افقی با سطح مقطع ثابت که در آن سیال به حالت توسعه یافته در جریان است به صورت تلفات هد اصلی بیان شده است و از رابطه زیر بدست می آید :

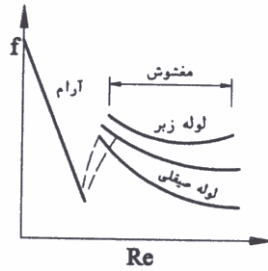
$$h_1 = f \cdot \frac{L}{D} \cdot \frac{\bar{V}^2}{2}$$

در این رابطه  $L$  و  $D$  طول و قطر لوله و  $\bar{V}$  سرعت متوسط سیال در لوله است.  $f$  نیز ضریب اصطکاک بوده و به صورت زیر معین می شود :

$$f = \frac{64}{Re} \quad \text{جریان آرام}$$

$$f = f(Re, \frac{\epsilon}{D}) \quad \text{جریان مضطرب}$$

(۵۹-۴) مراجع به نمودار



نمودار مودی برای جریان توسعه یافته در لوله های گرد بدست آمده است. دز این نمودار محور افقی عدد  $Re$  را نشان می دهد که بر مبنای سرعت متوسط سیال و قطر داخلی لوله تعریف شده است. محور عمودی ضریب اصطکاک  $f$  را نشان می دهد. برای اعداد رینولدز کوچک جریان از نوع آرام بوده ضریب اصطکاک که قبلا

به صورت  $f = \frac{64}{Re}$  بدست آمد با یک خط مستقیم نشان

شکل (۴-۱۱). دیاگرام مودی

داده می شود. این خط مستقیم تا عدد رینولدز بحرانی (۲۳۰۰) ادامه دارد. فاصله رینولدز بین ۲۳۰۰ و ۱۰۰۰۰ ناحیه انتقالی است. هر گاه عدد رینولدز از ۱۰۰۰۰ بیشتر شود جریان کاملا مغشوش پدیدار می گردد. در این ناحیه ضریب اصطکاک علاوه بر عدد رینولدز به ریزی نسبی لوله  $\frac{\epsilon}{D}$  نیز بستگی دارد ( $\epsilon$  ارتفاع متوسط زبری

سطح داخلی لوله و  $D$  قطر داخلی آن است).

نکته قابل توجه این است که در ناحیه جریان مغشوش با افزایش عدد رینولدز وابستگی ضریب اصطکاک به عدد رینولدز از بین می رود و فقط تابع زبری لوله می باشد. این ناحیه به ناحیه کاملا زبر معروف می باشد. شکل تقریبی نمودار مودی در شکل (۴-۱۱) نشان داده شده است.

### ب) تلفات هد جزئی

تلفات هد جزئی در نتیجه عبور سیال از اتصالات مختلف و به خاطر وجود پدیده هایی نظیر جدایی جریان و نواحی گردابه ای ایجاد می شوند و به صورت زیر بیان می گردد :

$$h_{lm} = k \frac{\bar{V}^2}{2}$$

در این رابطه  $k$  ضریب تلفات نامیده می شود و به نوع اتصال بستگی دارد. این ضریب برای مواردی مانند دهانه ورودی لوله، خروجی لوله ها ، انقباض تدریجی ، زانویی ، شیر و ... توسط جداول و نمودارهایی مشخص شده است.

### ۴-۷-۶) لوله های معادل

دو لوله را هنگامی معادل می نامند که هرگاه دبی یکسانی از آنها عبور کند تلفات هد مساوی باشد به این ترتیب وقتی دو لوله با طولهای  $L_1$  و  $L_2$  و قطرهای  $D_1$  و  $D_2$  و ضرایب اصطکاک  $f_1$  و  $f_2$  مغادل باشند رابطه زیر برقرار است :

$$\frac{L_2}{L_1} = \frac{f_1}{f_2} \left( \frac{D_2}{D_1} \right)^5$$

(۴-۶۱)

#### ۴-۷-۷) خطوط هیدرولیکی و انرژی

هرگاه در هر نقطه از یک سیستم خطوط لوله جمله  $\frac{P}{\gamma}$  تعیین گردیده و به صورت یک فاصله یک فاصله عمودی بالاتر از مرکز لوله رسم شود مکان این نقاط هیدرولیکی را ترسیم می کند  $(\frac{P}{\gamma} + z)$  انرژی از ترسیم انرژی مکانیکی سیال بر واحد وزن در امتداد خط لوله حاصل می شود بنابراین هرگاه جمله  $\frac{V^2}{2g} + \frac{P}{\gamma}$  به صورت یک فاصله عمودی بالاتر از مرکز لوله رسم شود خط انرژی بدست می آید.

#### ۴-۸) لایه مرزی

در قسمتهای گذشته معادلات حرکت سیال با صرفنظر از لزجت بدست آمده اما کمیاتی مانند نیروی مقاوم و افت فشار وجود دارند که اصولاً به واسطه لزجت سیال ظاهر می شوند. در نتیجه برای حصول کمیاتی از این دست تئوری لایه مرزی که در اینجا بیان می شود به عنوان مکمل معادلات قبلی قرار می گیرد.

فرض می کنیم سیال با سرعت یکنواخت  $V$  به صفحه تخت نوك تیزی نزدیک می شود. هنگامی که سیال با سطح صفحه تخت تماس حاصل می کند به واسطه لزجت سیال که شرط عدم لغزش را مطرح می سازد سرعت صفر می شود در حالیکه بلافاصله در مجاورت صفحه، سرعت یکنواخت  $V$  برقرار است. با پیشروی سیال در امتداد صفحه، ناحیه ای در مجاورت صفحه به وجود می آید که در این ناحیه که لایه مرزی نامیده می شود به واسطه وجود گرادیان سرعت رفتار سیال از نوع لزج است. در خارج از لایه مرزی گرادیان سرعت صفر بوده و تنش برشی وجود ندارد و رفتار سیال نظیر رفتار یک سیال ایده آل با لزجت صفر است. لایه مرزی اولیه از نوع آرام است با ادامه حرکت سیال در مجاورت صفحه و با رسیدن عدد رینولدز موضعی به مقدار بحرانی آثار ناپایداری ظاهر شده، پس از طی مرحله انتقالی لایه مرزی به نوع مغشوش تبدیل می شود. از ویژگیهای لایه مرزی مغشوش، رشد سریعتر لایه مرزی و تا حدودی تحت بودن منحنی توزیع سرعت است. رشد لایه مرزی آرام آهسته تر صورت گرفته و منحنی توزیع سرعت به شکل سهمی است.

#### ۴-۸-۱) لایه مرزی

ضخامت لایه مرزی آرام  $(\delta)$  در هر نقطه مورد نظر از روابط زیر بدست می آید:

(۴-۶۲)

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.96}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$

در ضمن تنش برشی روی صفحه  $(\tau_w)$  و نیز ضریب اصطکاک سطحی  $(C_f)$  در لایه مرزی آرام از روابط زیر حاصل می شوند:

(۴-۶۳)

$$\tau_w = 0.332 \frac{\mu U_\infty}{\sqrt{x}} \sqrt{u_\infty}$$

(۴-۶۴)

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho u_\infty^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}}$$



#### ۴-۸-۲) تبدیل لایه مرزی آرام به مغشوش

عوامل زیر در تبدیل لایه مرزی آرام به مغشوش مؤثرند :

**الف) رینولدز موضعی :** گذشتن عدد رینولدز موضعی از مقدار بحرانی از عوامل مؤثر در تغییر لایه مرزی به حالت مغشوش است.

**ب) شدت توربولانس :** شدت توربولانس اندازه متوسط نوسانات سرعت سیال را نشان می دهد، با افزایش شدت توربولانس ، تغییر رژیم لایه مرزی در اعداد رینولدز کوچکتری صورت می گیرد.

**ج) زبری سطح :** افزایش زبری سطح باعث می شود لایه مرزی آرام زودتر به مغشوش تبدیل شود.

**د) انتقال حرارت :** انتقال حرارت به سیال تبدیل لایه مرزی آرام به مغشوش را تسریع می کند.

**ه) گرادیان فشار :** گرادیان فشار منفی ( $\frac{dp}{dx} < 0$ ) به رشد لایه مرزی کمک می کند.

#### ۴-۸-۳) لایه مرزی مغشوش

ضخامت لایه مرزی مغشوش در هر نقطه مورد نظر ( $\delta$ ) از رابطه زیر بدست می آید :

(۴-۶۵)

$$\frac{\delta}{x} = 0.37 \text{Re}_x^{-\frac{1}{5}}$$

در ضمن ضریب اصطکاک سطحی در لایه مرزی مغشوش از رابطه زیر حاصل می شود :

(۴-۶۶)

$$C_f = 0.0577 \text{Re}_x^{-\frac{1}{5}}$$

#### ۴-۸-۴) جدایی لایه مرزی

هر المان سیال تحت تأثیر دو نیرو قرار دارد : یکی نیروی لزجت که با حرکت سیال مخالفت می کند و دیگری نیروی فشاری که بسته به اینکه گرادیان فشار ( $\frac{dP}{dx}$ ) مثبت یا منفی باشد با حرکت سیال مخالفت و یا به آن کمک می کند. اگر گرادیان فشار منفی باشد ( $\frac{dP}{dx} < 0$ ) ، که به آن گرادیان فشار مطلوب گفته می شود، نیروی فشاری به حرکت سیال کمک می کند و سیال به کمک نیروی فشاری به حرکت خود ادامه می دهد. اگر گرادیان فشار مثبت باشد ( $\frac{dP}{dx} > 0$ ) نیروی فشاری با حرکت سیال مخالفت می کند نهایتاً ممکن است سیال ممنوم خود را کاملاً از دست بدهد. در این صورت گرادیان سرعت روی سطح برابر صفر شده ( $(\frac{dP}{dx})_{y=0} = 0$ ) و اصطلاحاً جدایی جریان اتفاق می افتد.

#### ۴-۸-۵) شرایط مرزی در لایه مرزی

با توجه به مطالب گفته شده شرایط مرزی زیر را در لایه مرزی می توان در نظر گرفت : (جهت x امتداد حرکت سیال در روی صفحه می باشد)

$y=0 \Rightarrow u=0$  و  $x=0 \Rightarrow u=u_\infty$

$y=\delta \Rightarrow u=u(x)$  و  $\frac{du}{dy} = 0$

#### ۴-۸-۶) نیروی مقاوم و نیروی بالابر

هرگاه جسمی در جریان سیالی غوطه ور شود، نیرویی از طرف سیال به جسم وارد می شود. این نیرو حاصل اثر نیروهای فشاری و برشی است. مؤلفه افقی این نیرو را نیروی مقاوم (FD) و مؤلفه عمودی آن را نیروی بالابر (FL) می نامند. این دو نیرو را غالباً به صورت ضرائب نیروی مقاوم CD و نیروی بالابر CL به صورت زیر بیان می کنند:

$$C_D = \frac{F_D}{\rho v^2 d^2} \quad (۴-۶۸)$$

$$C_L = \frac{F_L}{\rho v^2 d^2}$$

که در آن d معرف اندازه جسم و v سرعت سیال است میتوان نشان داد:

$$C_D = f(\text{Re}, Fr, M, \frac{\epsilon}{D})$$

کخ در آن Fr عدد فراد و M عدد ماخ و  $\frac{\epsilon}{D}$  زبری نسبی جسم می باشد.

#### ۴-۸-۷) بررسی جریان سیال اطراف کره و استوانه

در این قسمت نیروی مقاومی که از طرف سیال به کره و استوانه ای که در جریان سیال مورد نظر قرار گرفته را بررسی می کنیم. از آنجا که رفتار کره و استوانه از نقطه نظر نیروی مقاوم سیال در وضعیت مشابهی قرار دارند در اینجا به بررسی نیروی مقاوم کره اکتفا می کنیم. این بررسی در محدوده های مختلف عدد رینولدز انجام می شود.

**الف)  $\text{Re} < 1$ :** جریان از نوع بسیار آهسته یا خزشی است. در این حالت نیروی مقاوم حاصل از نیروهای برشی است و نیروهای فشاری نقش کمی دارند.

ضریب نیروی مقاوم بصورت  $C_D = \frac{24}{\text{Re}}$  می باشد.

**ب)  $10 < \text{Re} < 103$ :** در این حالت یک آرام در مجاورت سطح کره تشکیل شده و پس از رسیدن به پشت کره جدایی اتفاق می افتد و ناحیه گردابه کوچکی در پشت کره تشکیل می شود در این حالت نیروی مقاوم سیال ترکیبی از نیروهای برشی و نیروهای فشاری حاصل از گردابه هاست. با افزایش عدد Re جدایی زودتر رخ داده و ناحیه گردابه ای بزرگتری تشکیل می شود و نیروی فشاری سهم بیشتری در نیروی مقاوم پیدا می کند. با بزرگ شدن

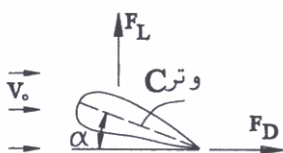
گردابه، نیروی فشاری افزایش پیدا می کند در حالی که نیروی برشی  $(\frac{24}{\text{Re}})$  در حال کم شدن است و حاصل جمع اینها یک نیروی مقاوم با شیب نزولی ایجاد می کند.

**ج)  $103 < \text{Re} < 2 * 105$ :** لایه مرزی از نوع آرام است و جدایی جریان قبل از رسیدن به پشت کره اتفاق می افتد و ناحیه گردابه ای نسبتاً بزرگی ایجاد می شود و نیروی مقاوم توسط نیروهای فشاری همچنان زیاد می شود و حاصل جمع آنها یک نیروی مقاوم ثابت را ایجاد می کند.

**د)  $\text{Re} < 2 * 105$ :** در این حالت لایه مرزی از آرام به مغشوش تبدیل می شود و از آنجا که لایه مرزی مغشوش اندازه حرکت بسشتري دارد مسافت بیشتری را تا جدایی جریان می پیماید. این واقعه باعث کوچک شدن ناحیه گردابه ای و کاهش نیروی مقاوم فشاری شده و ضریب نیروی مقاوم کاهش می یابد.

#### ۴-۸-۸) نیروی مقاوم و بالابر در بال

##### هواپیما



مقطع بال هواپیما را مطابق شکل (۴-۱۲) در نظر می گیریم زاویه  $\alpha$  (نشان داده شده در شکل) زاویه حمله نامیده می شود. ضرائب نیروی مقاوم

شکل (۴-۱۲) مقطع بال

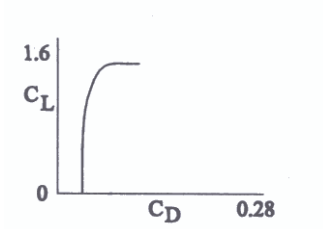
$C_D$  و نیروی بالابر  $C_L$  به صورت زیر بیان می شود :

$$C_D = \frac{F_D / A_P}{\frac{1}{2} \rho v_0^2}, C_L = \frac{F_L / A_P}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} \quad (70-4)$$

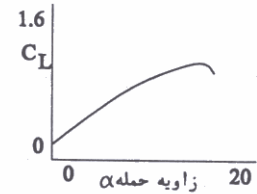
در روابط بالا  $A_p = CI$  و  $I$  طول بال (عمود بر صفحه کاغذ) می باشد می توان نشان داد.

$$C_D = f(\text{Re}, \alpha), C_L = g(\text{Re}, \alpha) \quad (71-4)$$

به ازای یک عدد رینولدز داده شده افزایش زاویه حمله  $\alpha$  ضرایب  $C_D$  و  $C_L$  را معمولاً افزایش می دهد. شکل (۱۳-۴) افزایش ضریب  $C_L$  را بر حسب  $\alpha$  نشان می دهد. هرگاه زاویه حمله تا حد معینی افزایش یابد ناگهان ضریب  $C_L$  کاهش می یابد زیرا در این حالت در پست بال جدایی جریان اتفاق می افتد و یک ناحیه بزرگ گردابه ای تشکیل می شود. افزایش نیروی بالابر همیشه با افزایش نیروی مقاوم همراه است. شکل (۱۴-۴) تغییرات  $C_L$  بر حسب  $C_D$  را نشان می دهد :



شکل (۱۴-۴). تغییرات ضریب نیروی بالابر بر حسب ضریب نیروی مقاوم



شکل (۱۳-۴). تغییرات ضریب نیروی بالابر بر حسب زاویه حمله