



تحلیل اجزاء محدود نمونه CNSR جهت تعیین چقرمگی شکست مواد سنگی

مجید رضا آیت اللهی، رضا اشتری، مهدی محمد آبادی

آزمایشگاه خستگی و شکست، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه علم و صنعت ایران

Email: m.ayat@iust.ac.ir

چکیده

مکانیک شکست، بررسی فرایند رشد ترک در یک قطعه تحت حوزه معین تنش می باشد. با فهم مکانیزم شکست در سنگ ها می توان در طراحی سازه های سنگی با کنترل رشد ترک، کاربرد های فراوانی یافت. میزان مقاومت ماده در برابر جوانه زنی و پیشرفت ترک، چقرمگی شکست نامیده می شود و به عنوان مهم ترین پارامتر ترک در مکانیک شکست مورد استفاده قرار می گیرد. به منظور تعیین مقدار چقرمگی شکست مواد تست های ویژه ای بر روی نمونه های ترکدار صورت می پذیرد. یکی از تست های متداول چقرمگی شکست مواد سنگی تست بارگذاری کششی بر روی نمونه CNSR می باشد که توسط استاندارد ISRM معرفی و تایید شده است. در این تحقیق یک مدل اجزاء محدود سه بعدی از این قطعه مدل سازی و تحلیل شده، به دنبال آن پارامترهای موثر نوک ترک استخراج شده اند. بررسی روند تغییرات این پارامتر ها در کلیه نقاط جبهه ترک و با افزایش طول ترک به منظور فهم مکانیزم شکست صورت پذیرفته است.

واژه های کلیدی: مکانیک شکست - مکانیک سنگ - روش اجزاء محدود - چقرمگی شکست

اختصارات و واحدها

K_I	ضریب تمرکز تنش (MPa)	$\sqrt{m}$
T	تنش (MPa)	
σ	تنش نرمال (MPa)	
τ	تنش برشی (MPa)	
E	مدول الاستیسیته (MPa)	
ν	ضریب پواسون	
U_x, U_y	جابجایی افقی و عمودی (m)	
B	پارامتر بی بعد تنش	
a	طول ترک (m)	



مقدمه

مکانیک شکست به بررسی رشد ترک و مکانیزم شکست می پردازد که مبنای آن اصلاحات و تعمیمات ابروین بر روی تئوری شکست گریفیس بوده است [1]. در واقع مکانیزم شکست شرحی کمی بر فرایند شکست یک قطعه بکر توسط رشد ترک می باشد. حوزه مکانیک شکست دربرگیرنده روابط میان ماکزیمم تنش مجاز، اندازه و محل ترک، سرعت رشد ترک ناشی از اثرات محیطی، امکان جلوگیری از حرکت ترک ها و غیره می باشد. ترک ها و ناپیوستگی ها از ویژگی های متداول توده های سنگی می باشند و هر فعالیت تحریک کننده در توده های سنگی (مانند زلزله، انفجارسنگ در معادن، تخریب شیب های سنگی و ...) ممکن است سبب جابجایی آنها در امتداد شکست های موجود و یا پیدایش شکست های جدید گردد. از طرفی دیگر می توان به کمک پدیده شکست، فرایندهایی کاربردی بر سنگ ها انجام داد (مانند شکست های هیدرولیک، سوراخ کاری، برش، انفجار، پودر سازی، آسیاب کردن و ...). رهیافت مکانیک شکست در مواد سنگی^۱ بطور عمده جوانه زنی و رشد ترک (یا ترک های) خاص را در مواد سنگی و تحت حوزه تنش معین مورد مطالعه قرار می دهد. این ترک (یا ترک های) خاص می تواند از پیش در نمونه سنگی موجود بوده و یا طی فرایند افزایش بار بوجود آید. رشد ترک اغلب ماهیتی ناگهانی و ناپایدار دارد. چقرمگی شکست^۲ به عنوان بارزترین پارامتر شکست بیانگر مقاومت ماده سنگی در برابر رشد ترک می باشد. در اغلب مواد سنگی شبه ترد^۳ دلیل اصلی شکست، رشد ترک است. بدین سبب تخمین مقدار چقرمگی شکست جهت فهم رفتار سازه های سنگی از اهمیت ویژه ای برخوردار است. تست های چقرمگی شکست با سایر تست های استحکام موجود در مکانیک سنگ تفاوت عمده ای دارد، زیرا نمونه های تست باید دارای ترکی تعریف شده با مشخصات هندسی معین باشد تا بتوان اثرات ترک را در حوزه مکانیک شکست بررسی نمود.

بررسی های اولیه علمی مکانیک شکست سنگ در ابتدا بر روی کاربرد تئوری تعادل انرژی گریفیس و معیار تنش ماکزیمم و اصلاحات و تعمیمات متعدد آن متمرکز بود. شناخت مکانیزم شکست ترد سنگ موجب پیشرفت قابل توجهی در تحقیقات مکانیک سنگ گردید. از طرفی دیگر نقش مهم "مکانیک شکست الاستیک خطی"^۴ در ارتباط با مسائل مکانیک سنگ ها شناخته شد. کاربرد های ابتدایی LEFM در مهندسی سنگ بر مبنای مفاهیم نرخ آزادسازی انرژی کرنشی بحرانی ابروین (G_c) استوار بود. بیناوسکی از این مفهوم در

^۱ Rock Fracture Mechanics

^۲ Fracture Toughness

^۳ Quasi-brittle

^۴ Linear Elastic Fracture Mechanics (LEFM)



مطالعه انفجارسنگ ها^۱ استفاده کرد و آن را ابزاری مفید در فهم مکانیزم انفجارسنگ ها در معادن عمیق سنگ سخت که فرایند شکست ناگهانی از خود نشان می دادند، یافت [2],[3]. در اوایل دهه ۱۹۷۰ مفاهیم پیشرفته تر و کارآمدتری از مکانیک شکست به منظور شرح رفتار سنگ ها بکار گرفته شد و چقرمگی شکست به عنوان خاصیت ذاتی مهم سنگ ها اندازه گیری شد که بیانگر مقدار استحکام یا مقاومت در برابر جوانه زنی و رشد ترک می باشد [4].

پدیده رشد ترک در مواد سنگی مساله پیچیده ایست و اغلب نیازمند تکنیک های پیشرفته ای جهت پیش بینی هندسه شکست می باشد. فرایند شکست با جوانه زنی ترک شروع می شود که وابسته به چقرمگی شکست است و بنابراین دقت هرگونه مدل سازی و نتایج آن به مقدار چقرمگی شکست سنگ بستگی دارد. از این رو تعیین مقدار چقرمگی شکست اهمیت ویژه ای دارد. اولین تلاش ها توسط اشمیت به منظور تعیین مقدار چقرمگی شکست سنگ ها بر مبنای روش تست استاندارد صورت پذیرفت که برای اندازه گیری چقرمگی شکست کرنش صفحه ای مواد فلزی پیشنهاد شده بود [5]. به دنبال آن کارهای آزمایشگاهی فراوانی جهت تعیین چقرمگی شکست سنگ های مختلف با استفاده از نمونه هایی متفاوت صورت گرفت [6],[7],[8]. صحت نتایج روش های تست تدوین شده نیازمند نمونه هایی با ابعاد هندسی بزرگ و هزینه های گران ماشین کاری بود که در عمل تهیه آنها از مواد سنگی گاهی غیرممکن و یا غیر عملی بود تا اینکه نمونه های Core Based Chevron Notched Specimens معرفی شدند که نسبت به سایر نمونه ها مزایای متعددی داشتند [9].

به دنبال مطالعات وسیع صورت گرفته، انجمن بین المللی مکانیک سنگ (ISRM) جهت تعیین چقرمگی شکست مود I مواد سنگی سه آزمایش استاندارد معرفی کرده است. تست اول، آزمایش بارگذاری خمشی بر نمونه Chevron Notched Short Rod، آزمایش دوم، آزمایش بارگذاری خمشی سه نقطه ای بر نمونه Chevron Notched Round Bar و آزمایش سوم، آزمایش بارگذاری فشاری قطری بر نمونه Chevron Notched Brazilian Disk می باشد [10],[11]. با پذیرش این نمونه ها توسط محققین مکانیک سنگ نتایج آزمایش های چقرمگی شکست همسان و قابل مقایسه شدند. از طرفی هم زمان، مطالعات تحلیلی و مدل سازی های عددی متعددی بر فرایند جوانه زنی و رشد ترک صورت گرفته است و آزمایش های آزمایشگاهی با تحلیل های اجزاء محدود همراه بوده است [12],[13]. به منظور تعیین چقرمگی شکست ماده سنگی توسط هر یک از نمونه های آزمایشگاهی فوق الذکر لازم است که رابطه موجود بین ضریب شدت تنش K_I با بار اعمالی بر نمونه محاسبه گردد. برای قطعات و نمونه های ساده روابط تحلیلی برای ضریب شدت تنش موجود می باشد. ولی برای نمونه های آزمایشگاهی پیچیده تر مانند نمونه CNSR (Chevron Notched Short Rod)

^۱ Rock burst



استفاده از روش های عددی مانند روش اجزاء محدود اجتناب ناپذیر خواهد بود. در این مقاله یک مدل اجزاء محدود سه بعدی از نمونه CNSR ایجاد شده و برای طول ترک های مختلف مقدار K_I و همچنین ترم تنش T در این قطعه محاسبه می گردد.

قطعه CNSR و پارامترهای ترک

تصویر سه بعدی نمونه CNSR در شکل (۱) نشان داده شده است. مطابق شکل، نمونه دارای هندسه ای استوانه ای شکل می باشد که شیار های بسیار ظریفی در راستای یکی از صفحات تقارن استوانه در آن ایجاد شده است. همانطور که از شکل (۲) مشاهده می شود، نحوه ایجاد شیار بگونه ای است که دو نیمه استوانه در یک سطح مثلثی (هاشور خورده) به هم متصل می باشند. با اعمال بار به لبه های بالایی قطعه (طبق شکل (۱)) و افزایش آن، ترکی در راس مثلث به وجود آمده، سریعاً به سمت قاعده مثلث رشد می کند. با توجه به تقارن هندسه و بارگذاری نسبت به صفحه ترک، وجوه ترک تحت بار کششی قرار گرفته، شکست از نوع مود I خالص می باشد.

جهت محاسبه مقدار چقرمگی شکست، به اندازه گیری طول ترک یا جابجایی فک های بارگذاری نیازی نیست و تنها ماکزیمم بار شکست ثبت می شود. از دیگر مزایای آن در مقایسه با سایر نمونه ها سهولت ساخت و هزینه های پایین تر تولید آن می باشد. به منظور بررسی پارامترهای مهم در فرایند رشد ترک در قطعه CNSR، ابتدا لازم است تنش های موجود در اطراف یک ترک مرور شوند.

به موجب مطالعاتی که توسط ویلیامز در مورد نحوه توزیع تنش در اطراف نوک ترک تحت مود I انجام شده است می توان تنشهای الاستیک اطراف نوک ترک را توسط سریهایی بیان نمود [14]. با حذف ترمهای مرتبه بالا در این سری ها، معادلات تنش در نزدیکی نوک ترک مطابق شکل (۳) به فرم زیر نوشته می شوند:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] + T \\ \sigma_{yy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\end{aligned}\quad (1)$$

که در آن r و θ سیستم مختصات قطبی منطبق بر نوک ترک می باشد. پارامتر T ترم تنشی مستقل از r و θ بوده و K_I ضریب شدت تنش می باشد که بستگی به نحوه بارگذاری و هندسه قطعه ترکدار دارند. در لحظه شروع فرایند شکست ترد مقدار ضریب شدت تنش به مقدار بحرانی خود (چقرمگی شکست یا K_{Ic}) می رسد.



لذا ضریب شدت تنش K_I نقش عمده‌ای در محاسبه استحکام قطعه ترکدار ایفا کرده، تعیین آن در طول فرایند رشد ترک از اهمیت بالایی برخوردار است. تنش T در سازه‌های ترکدار مهندسی و همچنین در مجموعه قطعات متداولی که در آزمایشهای مربوط به چقرمگی شکست مورد استفاده قرار می‌گیرند، نقش مهمی ایفا می‌کند. با تعیین مقدار تنش T توانایی پیش بینی مسیر رشد ترک را بدست می‌آید. در مواردی نظیر وجود یک ترک داخلی که راستای ترک موازی راستای بارگذاری است، و یا در مواردی که ناحیه فرایند شکست (ناحیه عملکرد ریزترک ها یا FPZ) در اطراف نوک ترک کوچک است، ترم تنش T می‌تواند بر استحکام قطعه ترکدار موثر باشد. از سوی دیگر در قطعات ترکداری که تنش T در آنها مثبت است مسیر رشد ترک پس از شروع شکست از امتداد اولیه ترک منحرف می‌شود. میزان انحراف و سرعت تغییر مسیر نیز مستقیماً بستگی به مقدار تنش T دارد. تنش T می‌تواند بر اندازه ناحیه فرایند شکست در نوک ترک اثر داشته و در نتیجه بر مقدار چقرمگی شکست موثر باشد. چنانچه تنش T منفی باشد، ناحیه فرایند شکست بزرگتر می‌شود و مقدار چقرمگی شکست افزایش می‌یابد.

تحلیل سه بعدی اجزاء محدود قطعه CNSR

معمولاً روش اجزاء محدود روش موثری برای مدل سازی فرایند شکست می‌باشد. در این بخش، دو پارامتر ضریب شدت تنش (K_I) و تنش T از پارامترهای مهم ترک می‌باشند که برای قطعه CNSR به کمک روش اجزاء محدود محاسبه شده و در نمودارهایی نمایش داده می‌شوند. به منظور مدل سازی هندسی قطعه CNSR نرم افزار Solid Work بکار گرفته شده، همچنین جهت تهیه مدل اجزاء محدود از نرم افزار Patran که قابلیت مدل سازی مناسب قطعات ترکدار را دارد، استفاده شده است. در نهایت تحلیل قطعه و محاسبه پارامترهای K_I و T به کمک نرم افزار Abaqus صورت گرفته است. از آنجاییکه شکل هندسی و بارگذاری نمونه CNSR دارای تقارن است کافیهست که مطابق شکل (۴) فقط یک چهارم آن مدل سازی شود. بدین ترتیب حجم محاسبات و زمان تحلیل اجزاء محدود به میزان قابل ملاحظه ای کاهش می‌یابد. ابعاد هندسی مدل در نظر گرفته شده از این قرارند:

$$D = 150 \text{ mm} ; W = 300 \text{ mm} ; a_0 = 72 \text{ mm} ; a_1 = 300 \text{ mm} ; t = 3 \text{ mm}$$

$$\nu = 0.3 ; E = 300$$

همچنین خواص ماده چنین در نظر گرفته شده است:

GPa

به سبب اهمیت نحوه المان بندی نوک ترک در نرم افزار مورد استفاده برای تحلیل قطعات ترک دار، المانهای سینگولار که المان های مخصوص نوک ترک می‌باشند گنجانده شده است. در المانهای سینگولار گرهای داخلی المان به جای اینکه در مرکز باشند، در فاصله $1/4$ از نوک ترک قرار می‌گیرند. به همین سبب با نزدیک شدن گره ها به نوک ترک تغییرات تنش در جهت r با تغییرات واقعی تنش انطباق بیشتری دارد. در



نتیجه استفاده از المانهای سینگولار، مقدار خطا کاهش می‌یابد. شکل ساده‌ای از المانهای سینگولار در شکل (۵) آورده شده است.

مدل اجزاء محدود یک چهارم نمونه CNSR که در شکل (۴) نشان داده شده است، شامل ۸۳۳۸ المان هشت وجهی و ۴۶۶۸۶ گره می‌باشد.

از آنجاییکه طی فرایند شکست طول ترک تغییر می‌کند، تحلیل اجزاء محدود برای ۸ حالت مجزا که پارامتر h مطابق تعریف زیر از ۰/۱ تا ۰/۸ افزایش می‌یابد تکرار شده است.

$$h = \frac{a - a_0}{a_1 - a_0} \quad (۲)$$

مقدار h که طول نسبی ترک را مشخص می‌کند، پیش از بارگذاری صفر و پس از شکست کامل نمونه به یک می‌رسد.

پس از تحلیل استاتیکی اجزاء محدود نمونه CNSR، جهت محاسبه ضریب شدت تنش از رابطه جابجایی عمودی u_y بر روی لبه های ترک ($\theta = 180^\circ$) استفاده می‌شود. تنش T را نیز می‌توان به کمک جابجایی افقی و مطابق رابطه زیر که در آن با توجه به شرایط کرنش صفحه ای $v = 3 - 4$ و $K = 3$ می‌باشد بدست آورد [15].

$$u_y = \frac{K_I}{2E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \left[(2K + 1) \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \quad (۳)$$

$$T = \frac{E}{1 - \nu^2} \frac{U_x(x) - U_x(0)}{x} \quad (۴)$$

همچنین پارامتر B به عنوان فرم بی بعد تنش T ، بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$B = T \sqrt{\frac{\pi a}{K_I}} \quad (۵)$$

بدین ترتیب پس از آنالیز استاتیکی مدل اجزاء محدود و با استفاده از نتایج جابجایی های گرهی پارامترهای ترک از سه رابطه (۳)، (۴) و (۵) بدست می‌آیند.



نتایج و بحث

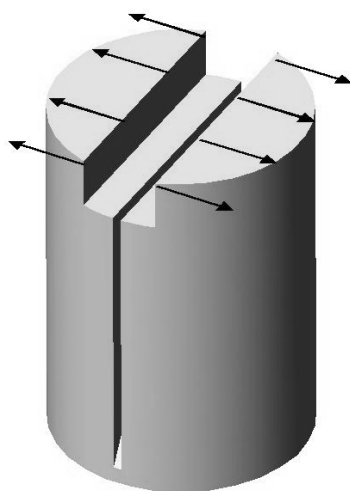
از آنجاییکه قطعه CNSR دارای یک هندسه سه بعدی است، ترک ایجاد شده در ناحیه مثلثی شکل (۲) دارای پاره خطی به عنوان جبهه ترک می باشد. جبهه ترک که شامل خط مربوط به عمیق ترین نقاط جدایش قطعه می باشد در شکل (۲) به صورت خط چین نمایش داده شده است و در فاصله a از سطح بالایی قطعه قرار می گیرد. با افزایش طول a اندازه جبهه ترک نیز افزایش می یابد. در مدل سازی اجزاء محدود حاضر، سعی بر آن بوده که هندسه واقعی ترک به صورت سه بعدی مدل شده، تغییرات K_I در راستای جبهه ترک مورد مطالعه قرار گیرد. همچنین محاسبه تنش T و پارامتر B در قطعه CNSR تاکنون انجام نشده است که در این تحقیق، نتایج مربوط به آنها نیز استخراج شده، نمایش داده می شود. در اشکال (۶) تا (۸) نمودار تغییرات مقادیر K_I ، T و B بر حسب فاصله نقاط ترک از صفحه میانی جبهه ترک و برای طول ترک های متفاوت رسم شده است.

همانطور که در شکل (۶) ملاحظه می شود مقدار K_I در نقطه وسط جبهه ترک بیشترین مقدار را دارد سپس کاهش می یابد تا به انتهای لبه ترک می رسد. سیر نزولی مقدار K_I تقریباً یکنواخت می باشد جز در نقاط میانی جبهه ترک که تمرکز شدید تنش بدلیل سینگولاریتی نوک ترک وجود دارد. در شکل (۷) همان تغییرات، برای تنش T نشان داده شده است. با توجه به نمودار، تغییرات تنش T بر عکس K_I دارای سیر صعودی می باشد به طوری که مقدار آن در نقطه وسطی جبهه ترک کمترین اندازه خود را دارد و در انتهای جبهه ترک به بیشترین مقدار خود می رسد. همچنین در شکل (۸) به بررسی روند تغییرات پارامتر B پرداخته شده است. همان طور که ملاحظه می شود نحوه تغییرات پارامتر B بعد از B مشابه رفتار تنش T می باشد یعنی در نقطه وسط جبهه ترک مقدار مینیمم و در نقطه انتهای ترک مقدار ماکزیمم خود را دارد. همچنین نحوه تغییرات پارامترهای اصلی ترک با بزرگ شدن طول ترک (یا پارامتر h) و پیشروی آن قابل بررسی می باشد. در نمودار تغییرات K_I ، ابتدا مقدار آن با افزایش طول ترک کاهش می یابد و سپس یک روند افزایشی منظم را طی می کند و با پیشروی ترک به مقدار بیشینه خود می رسد. در نمودار تغییرات تنش T و پارامتر B بعد از مشاهده می شود که در ابتدا نمودارها کاملاً صعودی و سپس صعودی نزولی می شوند به این ترتیب که نقطه ماکزیمم پس از پیشروی ترک (از مرحله $h = 0.4$ به بعد) تقریباً در یک چهارم طول ترک قرار می گیرد.

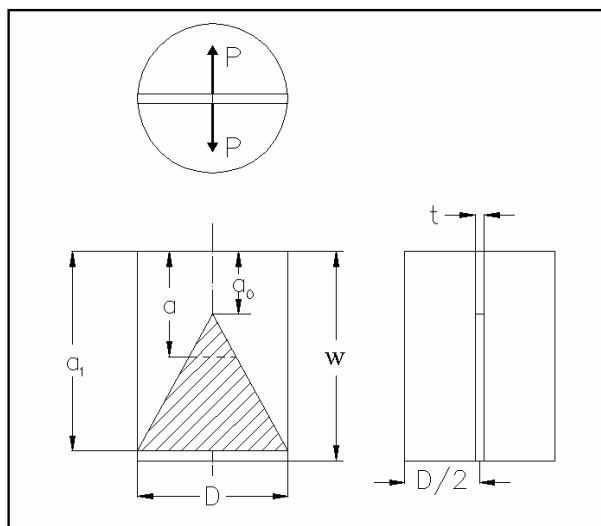
در کل نتایج حاصل از شکل های (۶)، (۷) و (۸) نشان می دهد که مقدار ضریب شدت تنش K_I و پارامترهای T و B در قطعه CNSR می توانند تغییرات قابل ملاحظه ای در راستای جبهه ترک داشته باشند. مقدار تغییرات این پارامترها بستگی به طول نسبی ترک نیز دارد. لذا می توان انتظار داشت که فرایند رشد ترک بطور همزمان در کلیه نقاط واقع بر جبهه ترک آغاز نشود. همچنین با توجه به افزایش قابل ملاحظه تنش T و پارامتر B با افزایش طول نسبی ترک، نتایج بدست آمده در این تحقیق پیش بینی می نماید که به تدریج با

رشد ترک و افزایش طول آن، ترک پایداری مسیر خود را از دست داده به یک سمت قطعه منحرف می شود. چنین پدیده ای قبلاً در برخی از نتایج آزمایشگاهی [16] مشاهده شده ولی توجیهی برای آن ارائه نشده بود.

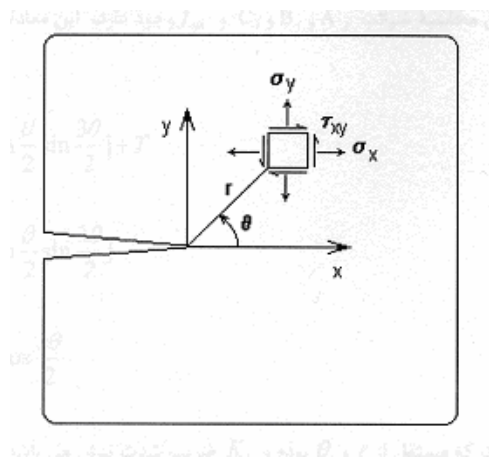
اشکال و نمودار ها



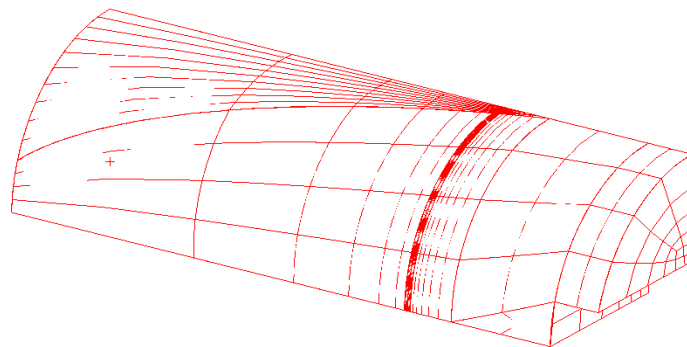
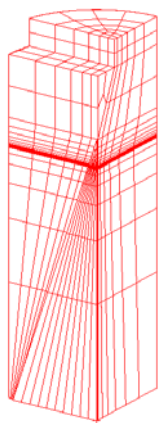
شکل (۱) شکل نمونه CNSR و نحوه بارگذاری آن



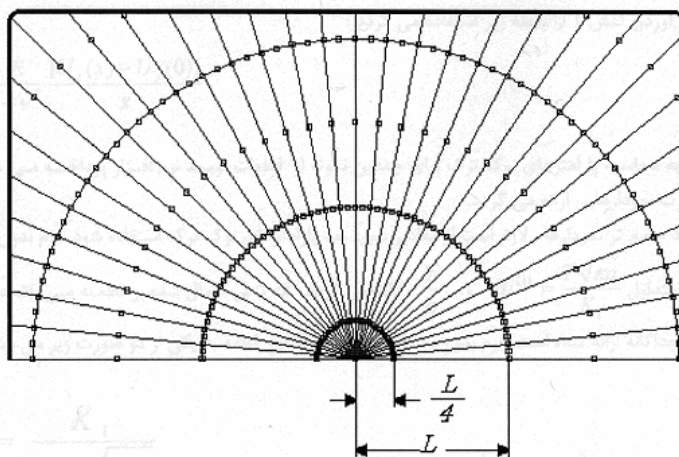
شکل (۲) پارامترهای هندسی تعریف شده برای ابعاد کلی و طول ترک در قطعه CNSR



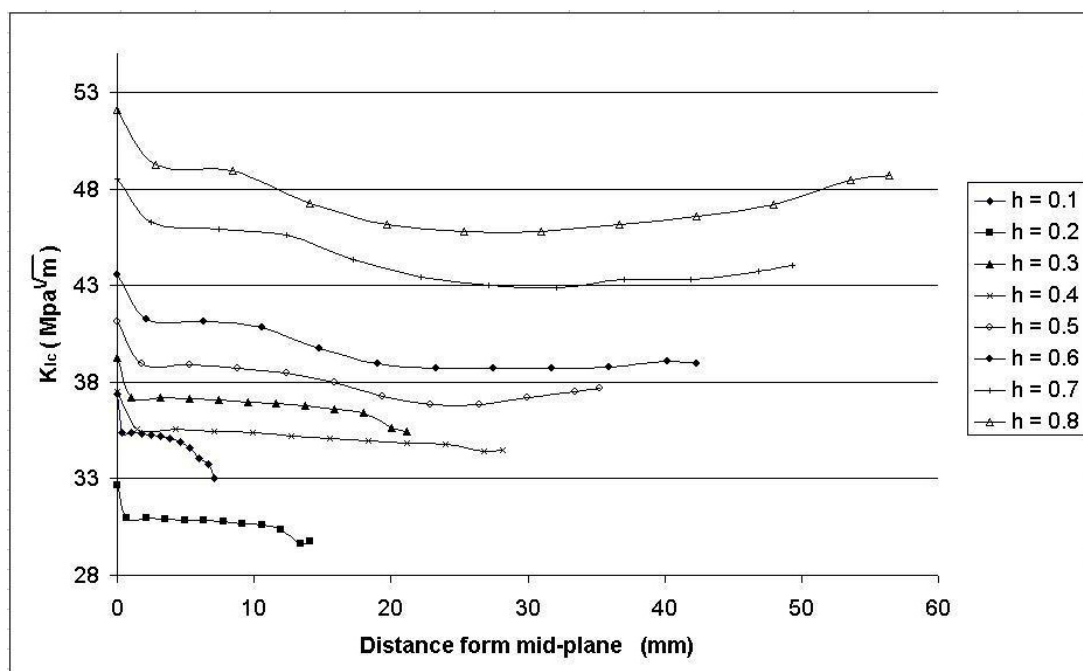
شکل (۳) تنش های الاستیک و مختصات قطبی نوک ترک



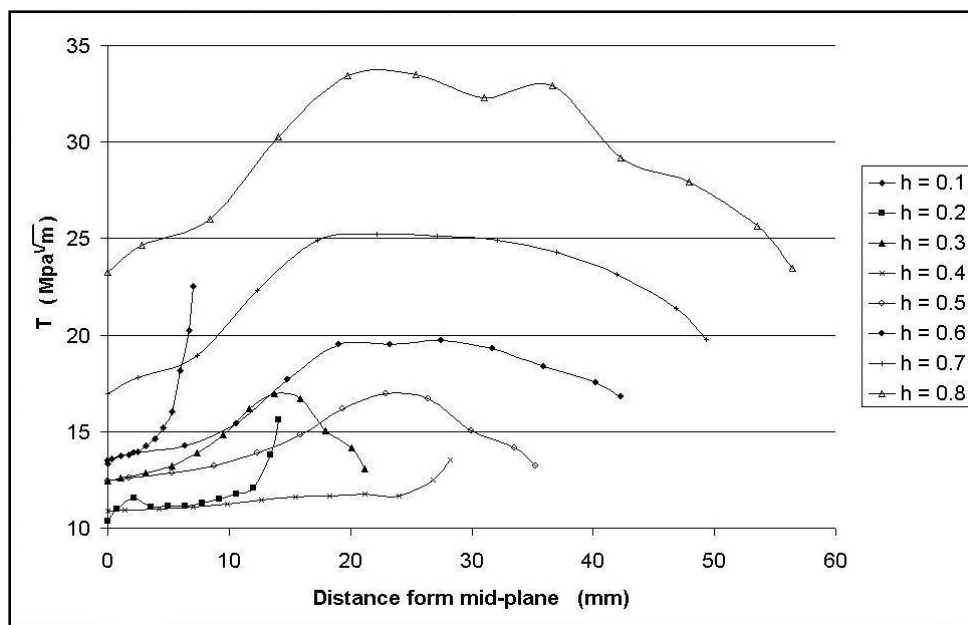
شکل (۴) مدل اجزاء محدود یک چهارم نمونه SR



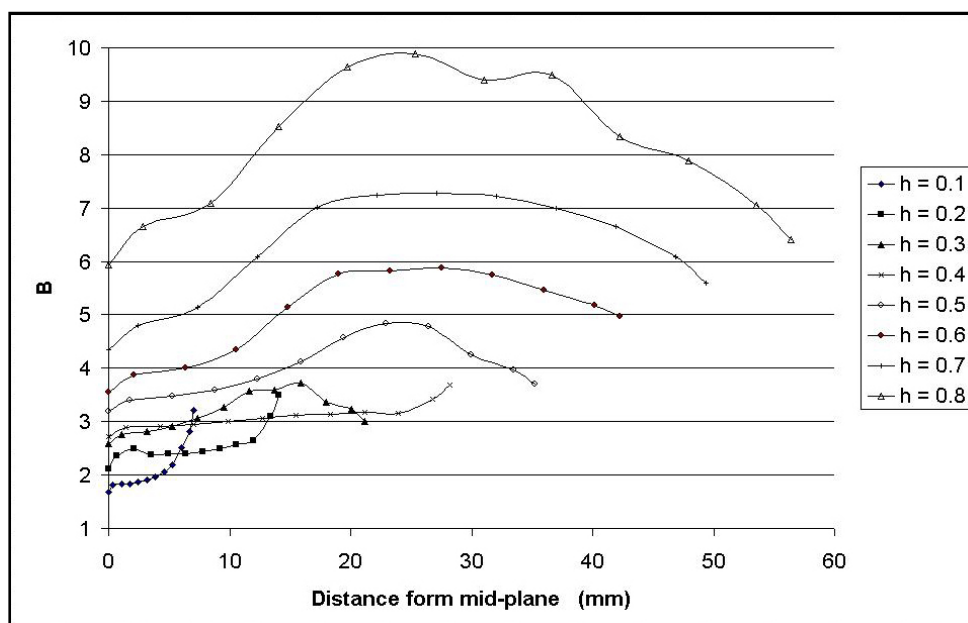
شکل (۵) المان های سینگولار در اطراف نوک ترک



شکل (۶) تغییرات K_I بر حسب فاصله از صفحه میانی و در موقعیت های مختلف رشد ترک



شکل (۷) تغییرات T بر حسب فاصله از صفحه میانی و در موقعیت های مختلف رشد ترک



شکل (۸) تغییرات B بر حسب فاصله از صفحه میانی و در موقعیت های مختلف رشد ترک



مراجع

- [1]. Irwin G.R. (1957) Analysis of stresses and strain near the end of a crack, J. Appl. Mech., 24, p361
- [2]. Bieniawski, Z. T. (1967a) Mechanics of brittle fracture of rocks, Part I, II and III, Int. J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr., 4, 395-430.
- [3]. Bieniawski, Z. T. (1967b) Stability concept of brittle fracture propagation in rock, Int. J. Eng. Geol., Vol. 2, pp149-152.
- [4]. Peng, S. S. & Johnson, A. M. (1972) Crack growth and faulting in cylindrical specimens of Chelmsford granite, Int. J. Rock Mech. Min. Sci., 9, 37-86.
- [5]. Schmidt, R. A. (1976) Fracture toughness testing of Limestone, Expl. Mech., 16, 161-167.
- [6]. Clifton, R. J. Simonson, E. R., Jones, A. H. & Green, S. J. (1976) Determination of the critical stress intensity factor, KIC, from internally pressurized thick-walled vessels, Expl. Mech., 16, 233-238.
- [7]. Zoback, M. D. (1978) A simple hydraulic fracturing technique for determining rock fracture toughness, Proc. 19th U.S. Symp. On Rock Mechanics, University of Nevada, Reno, pp83-85.
- [8]. Ouchterlony, F. (1982) A review of fracture toughness testing of rocks, Solid Mechanics Archives, 7, 131-211.
- [9]. Ouchterlony, F. (1986) A core bend specimen with chevron edge notch for fracture toughness measurements, Rock Mechanics: Key to Energy Production, Proc. 27th US Symp. On Rock Mech., H. L. Hartman, (Ed.), SME, Littleton Co., pp177-184.
- [10]. ISRM (1988) Suggested methods for determining fracture toughness of rocks, F. Ouchterlony, Int. J. Rock. Mech. Min. sci. & Geomech. Abstr., 25, 71-96.
- [11]. ISRM (1995) Suggested methods for determining mode I fracture toughness using cracked chevron notched Brazilian disk (CCNBD) specimens, R. J. Fowell, Int. J. Rock. Mech. Min. sci. & Geomech. Abstr., 32, 57-64.
- [12]. Ingraffea, A. R. (1976) Fracture propagation in rock: Laboratory tests and finite element analysis, Proc. 17th US Symp. On Rock Mech. Snowbird, Utah, pp5C4-1 – 5C4-1-6
- [13]. Ingraffea, A. R. & Heuze, F. E. (1980) Finite element models for rock fracture mechanics, Int. J. Numl. & Analyl. Meths. Geomech., 4, 25-43.
- [14]. Williams M.L. (1957) One The Stress Distribution at The Base Of stationary crack, J. Appl. Mech., 24, 109-114.
- [15]. Ayatollahi, M. R. & Pavier, M. J. & Smith, D. J. (1998) Determination of T-stress from finite element analysis for mode I and mixed mode I/II loading, Int. J. Frac., 91, 283-298.
- [16]. Hanson, J. H. & Ingraffea, A. R. (1998) Behavior of concrete round double beam fracture toughness test specimens, 3rd International conference on Fracture Mechanics of concrete and concrete structures, FRAMCOS, Gifu, Japan, Vol. 1.