

# استخراج پارامترهای مودی سازه‌ها از طریق اندازه‌گیری FRF و مقایسه نتایج با تحلیل المان محدود

علیرضا قاری قرآن، دانشجوی دکترای دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان<sup>\*</sup>

سعید ضیائی راد، استادیار دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان<sup>\*\*</sup>

تلفن: ۰۳۱۱-۳۹۱۲۷۰۰، نمبر: ۰۳۱۱-۳۹۱۲۸۴۸، پست الکترونیکی: [gharighoran@yahoo.com](mailto:gharighoran@yahoo.com)

**چکیده** - آنالیز و آزمون مودی روشنی است برای تعیین پارامترهای مودی یک سازه شامل فرکانس‌های طبیعی، نسبت استهلاک و شکلهای مودی، در این گستره در کنار تحلیل سازه با ابزاری مثل اجزاء محدود به وسیله آزمایش، پارامترهای مزبور به طور مستقیم اندازه گیری و تعیین می‌گردند. همچنین به کمک روابط تئوری دینامیک سازه‌ها تابعی تحت عنوان تابع پاسخ فرکانس FRF معرفی شده که در آزمایشگاه از روی مدل سازه با انجام آزمایش اندازه گیری و با نتایج تئوری مقایسه می‌شود. در این تحقیق به وسیله تجهیزات آزمایشگاهی موجود، آزمایش بر روی ۳ نمونه از سازه‌های متغیر شامل تیز، صفحه و قاب یک دهانه با دو طبقه در مقیاس آزمایشگاهی انجام گردیده که پس از تحلیل هر کدام از این سازه‌ها، مقایسه‌هایی بر روی فرکانس‌های طبیعی و شکلهای مودی آن انجام شده است. علاوه بر اتفاق خوب نتایج حاصل شده از آنالیز و آزمون، در مورد قاب مورد آزمایش میزان اثر واکنشهای زمین به پایه‌های آن نیز مورد بررسی قرار گرفته و نشان داده شده است که تعییه تکیه گاه کاملاً گیردار در عمل بسیار دشوار می‌باشد.

**کلید واژه‌ها:** فرکانس‌های طبیعی، شکلهای مودی، آنالیز مودی، اجزاء محدود، مشخصات دینامیکی، تابع پاسخ فرکانس

## ۱- مقدمه

در مباحث آنالیز مودی برای اندازه گیری کمیت‌های مورد نظر از قبیل تابع پاسخ فرکانس<sup>۱</sup>، کرنش، شتاب، سرعت، تغییر مکان، دوران و پارامترهای دیگر ناشی از ارتعاش سازه معمولاً آزمایش‌ها به دو گونه مختلف صورت می‌پذیرد که دسته اول در محیط واقعی (کارگاه) و گروه دوم مربوط به سازه‌هایی است که مدل آن در آزمایشگاه ساخته شده و به طور مصنوعی شرایط حقیقی برای آن فراهم شده است. پس از تعیین مقادیر این پارامترها، تطابق نتایج حاصل از آزمایش و تحلیل، بررسی شده و در صورت نیاز نسبت به مدل تحلیلی مورد استفاده تجدید نظر خواهد شد (اصلاح مدل اجزاء محدود)<sup>۲</sup>.

روشهای تجربی برای اندازه گیری مقدار ارتعاشات یک سازه از اوایل دهه هشتاد با پیشرفت در تجهیزات الکترونیکی آغاز گردید. از آن پس کتابها و مقالات زیادی در مورد تئوری و کاربرد آن در صنعت منتشر گردیده است [۲و۳]. اخیراً کاربرد آن در مهندسی عمران و مخصوصاً در نگهداری و عیب‌یابی در پلها وسیعتر شده است [۴و۵]. همچنین تحولات اخیر و چشم انداز آینده این زمینه در مقاله‌ای توسط هرمان [۵] آورده شده است. با توجه به ادبیات فنی موجود در این تحقیق نتایج اندازه گیری شده از آزمون برای تیر فولادی، ورق فولادی و قاب یک دهانه دو طبقه با مشخصات ارائه شده در قسمت مربوطه با نتایج تحلیلی به روش اجزاء محدود و برنامه کامپیوتری تهیه شده، مقایسه می‌شوند. برای مقایسه نتایج، روشهای متعددی وجود دارد که از مهمترین آنها، مقایسه فرکانس‌های طبیعی، شکلهای مودی و تابع پاسخ فرکانس سازه هستند. مقایسه‌های انجام شده در این تحقیق شامل فرکانس‌های طبیعی، شکلهای مودی، رسم منحنی‌های FRF و محاسبه و رسم مقادیر MAC می‌باشد.

## ۲- تقسیم بندی سازه‌ها

از دیدگاه علم دینامیک، سازه‌ها را می‌توان به دو گروه تقسیم نمود که دسته اول، سازه‌های یک درجه آزادی و دسته دیگر سازه‌های چند درجه آزادی هستند به طوریکه حل معادلات حاکم بر رفتار گروه اول سازه‌ها ساده بوده و برای حل مسائل سازه‌های گروه دوم لازم است از اعمال جبری ماتریسها (جبر خطی) استفاده کرد و یا آنکه در صورت امکان یک سیستم  $n$  درجه آزادی را به  $m$  سیستم یک درجه آزادی تبدیل کرده و سپس هر یک از آنها را جداگانه حل نمود. از مبانی تئوری ارتعاشات یا دینامیک سازه‌ها معادله دیفرانسیل حاکم بر رفتار دینامیکی سازه‌های یک درجه آزادی از مرتبه دوم می‌باشد که شامل جرم، سختی و میرایی جسم است. برای سازه‌های چند درجه آزادی ماتریس جرم، سختی و استهلاک تعریف می‌شوند که بعد آنها به تعداد درجات آزادی سیستم بوده و به همین تعداد معادله دیفرانسیل با درجه دو بر رفتار سیستم حاکم می‌باشد. شکل کلی این معادله برابر است با [۶].

$$[M]\{x''\} + [C]\{x'\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (1)$$

## ۳- تابع پاسخ فرکانس FRF

از حل حالتهای گوناگون بیان شده در بند قبلی تابعی تحت عنوان تابع پاسخ فرکانس قابل تعریف می‌باشد که تابعی از فرکانس طبیعی سازه بوده و با بررسی آن می‌توان رفتار سازه تحت بارهای دینامیکی را مطالعه نمود. این ماتریس که با  $H$  نمایش داده می‌شود دارای بعدی به اندازه درجه آزادی سیستم خواهد بود. به طور نمونه  $H_{ij}$  مربوط به تغییر مکان اندازه گیری شده در نقطه  $j$  تحت اثر بار وارد شده به نقطه  $i$  است. فرمول این توابع برای یک سیستم  $n$  درجه آزادی و با در نظر داشتن استهلاک عبارت است از [۱].

$$H_{ij} = \sum_{r=1}^N \frac{A_{ij}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i\eta_r\omega_r}$$

(۲)

#### ۴- مقادیر MAC, NDF

معمولًاً برای مقایسه نتایج تحلیلی و آزمایشی از پارامترهای تعریف شده متفاوتی استفاده می‌گردد که

از جمله آنها می‌توان به NDF برای فرکانس‌های طبیعی و MAC برای شکل‌های مودی اشاره کرد. در این مقاله جهت مقایسه فرکانس‌های طبیعی ( $\omega_i$ ) و شکل‌های مودی ( $\psi_i$ ) از روابط زیر استفاده شده [۷-۱۰].

$$NDF(i, j) = \frac{|\omega_i - \omega_j|}{\min(\omega_i, \omega_j)} \quad (3)$$

$$MAC = \frac{\left| \sum_{i=1}^n (\Psi_X)_i (\Psi_A)_i^* \right|^2}{\left( \sum_{i=1}^n (\Psi_X)_i (\Psi_X)_i^* \right) \left( \sum_{i=1}^n (\Psi_A)_i (\Psi_A)_i^* \right)} \quad (4)$$

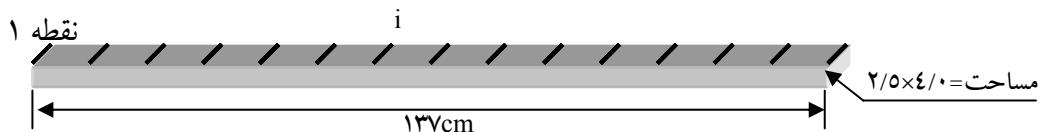
برای مقایسه فرکانس‌های طبیعی علاوه بر رابطه بین شده در بالا از منحنی استاندارد نیز استفاده شده که در آن محور طولی مربوط به فرکانس‌های بدست آمده از آزمایش و محور قائم آن شامل فرکانس‌های حاصل از تحلیل می‌باشد. بهترین خط عبوری با کمترین انحراف از میان نقاط مذبوردارای شبی خواهد بود که هر چه به زاویه ۴۵ درجه نزدیکتر باشد نتایج آزمایش و تحلیل مطابقت بهتری خواهند داشت.

#### ۵- آزمایشات

کلاً سه آزمایش مجزا در این تحقیق انجام شده است. تیر و ورق سازه‌هایی با ابعاد واقعی و قاب ساخته شده مدلی از قابهای ساختمانی با ابعاد آزمایشگاهی می‌باشد.

#### ۱-۵- تیر

در آزمایشگاه، تیری با مشخصات داده شده مطابق شکل (۱) در حالت دو سر آزاد توسط دستگاه تحلیل‌گر مورد آزمایش قرار گرفت. این تیر کلاً به چهارده المان تقسیم گردیده و با نصب شتاب سنج در نقاط انتخابی ۶ و ۱۱، مقدار H مربوط به هر نقطه تحت اثر ضربه وارد شده به آن نقطه توسط تحلیل‌گر ثبت و نتایج ذخیره شد. هر کدام از این اندازه گیر یا تحت عنوان  $H_{i11}, H_{i6}$  نامگذاری گردیده که به ترتیب نمایانگر ستون ۱۱ و ۱۱ ام از ماتریس H می‌باشند. متغیر ۱ از ۱ تا ۱۵ تغییر می‌کند ( $H_{ij}=H_{ji}$ ).



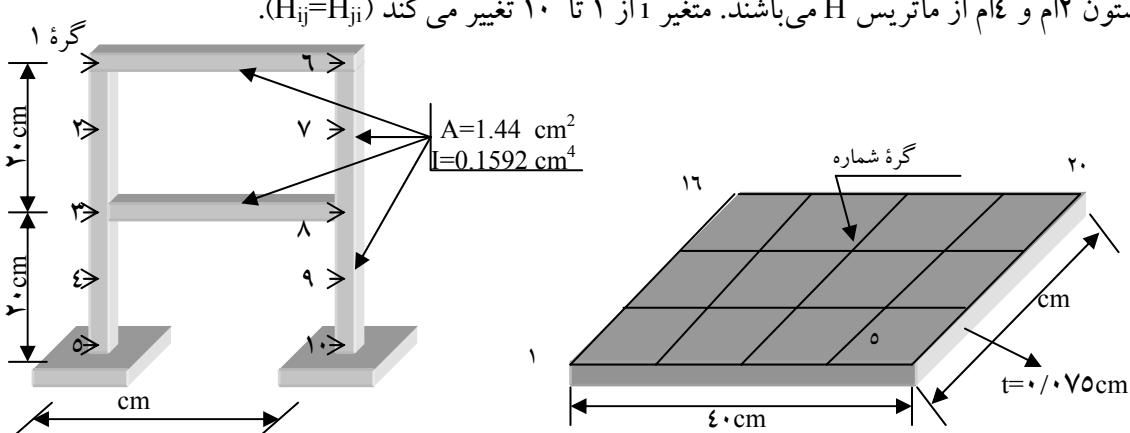
شکل ۱: مشخصات تیر مورد آزمایش

### ۲-۵ ورق

دو ستون از ماتریس H برای یک ورق فولادی با شرایط تکیه گاهی کاملاً آزاد مطابق شکل (۲) در آزمایشگاه توسط دستگاه تحلیل گر مورد اندازه گیری قرار گرفت. همانگونه که در شکل مشخص می باشد این صفحه کلاً به ۱۲ المان و ۲۰ گره تقسیم گردیده که با نصب شتاب سنج در نقاط انتخابی ۷ و ۱۳، مقدار H مربوط به هر نقطه تحت اثر ضربه وارد شده به آن نقطه توسط تحلیل گر ثبت و نتایج ذخیره شده است. هر کدام از این اندازه گیریها تحت عنوان  $H_{i21}, H_{i8}$  نامگذاری گردیده که به ترتیب نمایانگر ستون ۱۷ و ۱۳ ام از ماتریس H می باشند. در اینجا متغیر i از ۱ تا ۲۰ تغییر می کند ( $H_{ij}=H_{ji}$ ).

### ۳-۵ قاب

علاوه بر تیر و ورق، قاب پرتابل دو طبقه با یک دهانه مطابق مشخصات ارائه شده در شکل (۳) نیز مورد آزمایش قرار گرفت. برای ساختن این قاب از پروفیلهای مستطیلی تو خالی به ابعاد  $2 \times 1\text{cm}$  به ضخامت ۳mm استفاده شده و در مقیاسی مناسب برای نصب و آزمایش در اطاق آزمایشگاه انتخاب گردید. برای این قاب با شرایط تکیه گاهی گیر دار (پایه های قاب توسط پیچ به زمین محکم شده است) به وسیله دستگاه تحلیل گر دو ستون از ماتریس H اندازه گیری شد. شتاب سنج را در نقاط انتخابی ۲ و ۴ قرار داده و مقدار H مربوط به هر نقطه تحت اثر ضربه وارد شده به آن نقطه توسط تحلیل گر ثبت و نتایج ذخیره شد. هر کدام از این اندازه گیریها تحت عنوان  $H_{i4}, H_{i2}$  نامگذاری گردیده که به ترتیب نمایانگر ستون ۲ و ۴ ام از ماتریس H می باشند. متغیر i از ۱ تا ۱۰ تغییر می کند ( $H_{ij}=H_{ji}$ ).



شکل ۳: مشخصات قاب پرتابل مورد آزمایش

شکل ۲: مشخصات ورق مورد آزمایش

## ۶- محاسبات

برای انجام محاسبات در تعیین پارامترهای لازم از روابط تئوری ارائه شده استفاده می‌شود. برای این منظور برنامه‌ای تنظیم شده است که تمامی اطلاعات مربوط به FRF های اندازه گیری شده در آزمایشگاه را از فایلهای مربوطه خوانده و منحنی مربوط به مدشکلها را رسم و برای مقایسه با نتایج تئوری دسته بندی می‌نماید. برای دستیابی به این مهم می‌توان از روش‌های مختلفی استفاده کرد که از جمله آن روش بزرگی نقطه‌اوج<sup>۱</sup> و روش انطباق دایره<sup>۲</sup> هستند [۱۱-۱۲]. در هر یک از این روشها مقدار فرکانس طبیعی و نسبت میرایی سازه برای مدهای مختلف ارتعاشی سازه قابل حصول می‌باشد، در این تحقیق از هر دو روش استفاده شده است. از طرفی نتایج تئوری ناشی از تحلیل اجزاء محدود از مدل کردن سازه در محیط برنامه‌های ANSYS و یا SAP2000 استخراج گردیده است.

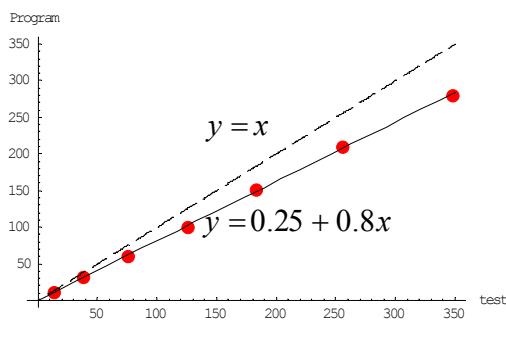
## ۷- نتایج

در این تحقیق نتایج بدست آمده برای هر سه سازه معرفی شده شامل منحنی FRF، مقایسه فرکانس‌های طبیعی و مقایسه شکل‌های مودی به طور مجزا ارائه گردیده است. مقادیر فرکانس‌های طبیعی تیر بدست آمده از آزمون و تحلیل با استفاده از برنامه ANSYS و برنامه تهیه شده در جدول (۱)، نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی صفحه حاصل از آزمایش و تحلیل با استفاده از مدل ANSYS و برنامه تهیه شده در جدول (۲) و نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی قاب، ناشی از آزمون و تحلیل با استفاده از مدل SAP2000 در دو حالت مختلف شرایط تکیه گاهی کاملاً گیر دار و ساده در جدول (۳) آورده شده است. همچنین منحنی‌های شکل‌های (۴) تا (۱۶) مقایسه فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مودی هر سازه را نشان می‌دهند.

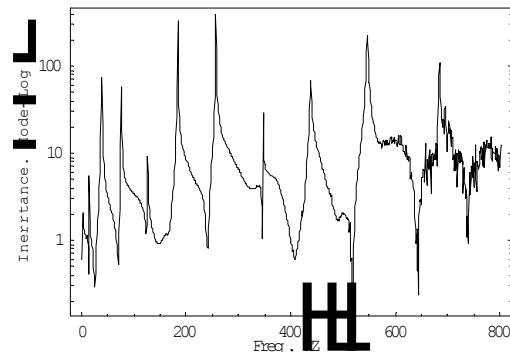
## ۱-۱-۷ تیر

جدول شماره ۱- نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی تیر (هرتز)

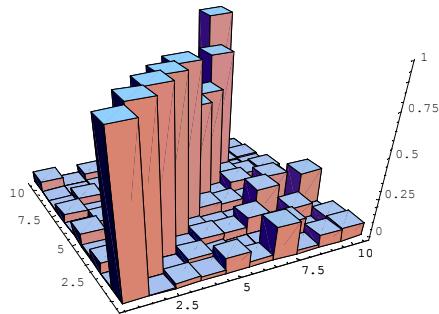
	مود اول	مود دوم	مود سوم	مود چهارم	مود پنجم	مود ششم	مود هفتم	مود هشتم	مود نهم	مود دهم
آزمایش	۱۳/۸۸	۳۷/۶۵	۷۵/۰۲	۱۲۵/۲	۱۸۳/۱	۲۰۰/۹	۳۴۷/۸	۴۴۶/۵	۵۴۵/۶	۶۸۰/۸
امه	۱۱/۰۹	۳۰/۰۸	۵۹/۹۷	۹۹/۲۰	۱۴۸/۳	۲۰۷/۵	۲۷۶/۹	۳۵۶/۹	۳۶۶/۸	۴۴۷/۷
ANS	۱۱/۲۰	۳۱/۱۱	۶۰/۹۷	۱۰۰/۸	۱۰۰/۶	۲۱۰/۳	۲۸۰	-----	-----	-----
%	۱۸/۹۶	۱۷/۳۹	۱۸/۷۲	۱۹/۰۲	۱۷/۷۵	۱۷/۸۳	۱۹/۴۸	-----	-----	-----



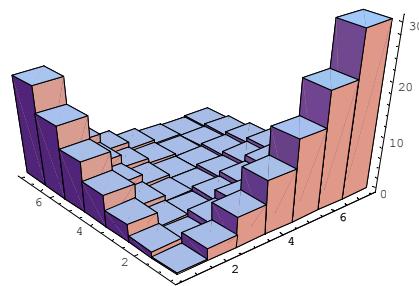
شکل ۵: منحنی استاندارد برای مقایسه فرکانسها  
طبیعی تیر حاصل از آزمایش و تحلیل



شکل ۶: منحنی تغییرات FRF بر حسب فرکانس در مقیاس  
لگاریتمی برای تیر



شکل ۷: منحنی سه بعدی MAC برای مقایسه شکلهای مودی  
تیر حاصل از آزمایش و تحلیل

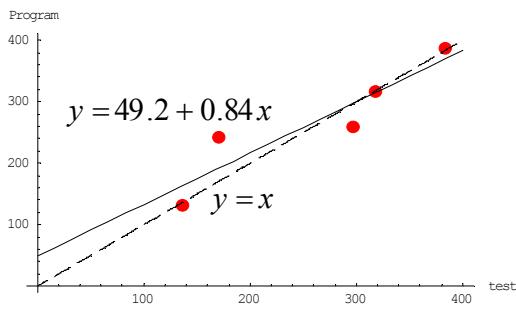


منحنی شکل (۴) بیانگر تغییرات FRF تیر در بازه صفر تا ۸۰۰ هرتز بوده که نقاط اوج آن به وضوح قابل تشخیص می‌باشد. این نقاط بیانگر فرکانسها طبیعی سازه هستند. همچنین تطابق خوب نتایج آزمایش و تحلیل برای فرکانسها طبیعی در منحنی استاندارد و NDF به ترتیب در شکلهای (۵) و (۶) و منحنی MAC برای شکلهای مودی آن در شکل (۷) مشاهده می‌شود.

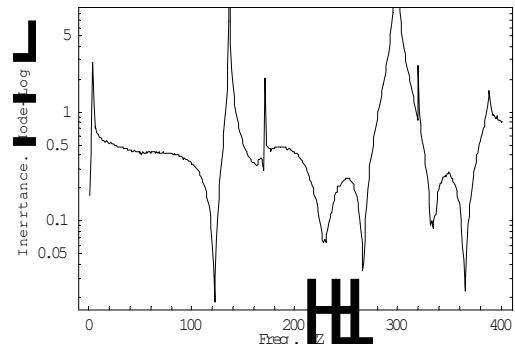
## ۲-۷ ورق

جدول شماره ۲: نتایج مریبوط به فرکانسها طبیعی ورق (هرتز)

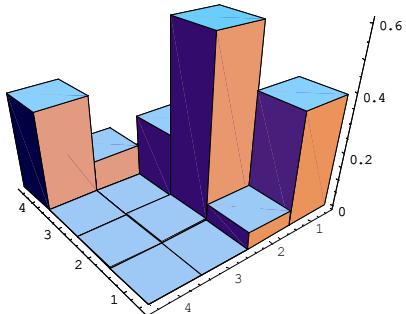
	اول	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم
نایش	-----	۱۳۰/۷	۱۷۰/۱	۲۹۷/۲	۳۱۷/۸	۳۸۳/۷	-----
امه	۱۰۹/۳	۱۳۰/۲	۲۴۲/۳	۲۵۹/۵	۳۱۶/۹	۳۸۲/۴	۴۹۷/۸
ANSI	۱۰۹/۳	۱۳۱/۰	۲۴۳/۲	۲۶۰/۵	۳۱۷/۰	۳۸۶/۳	۴۰۰/۳
%	-----	۳/۴۵	۳۰/۰۴	۱۲/۳۷	۰/۲۴	۰/۶۹	-----



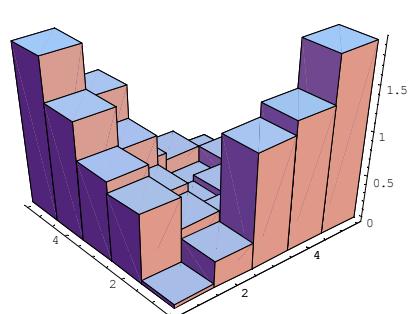
شکل ۹: منحنی استاندارد برای مقایسه فرکانس‌های طبیعی ورق حاصل از آزمایش و تحلیل



شکل ۸: منحنی تغییرات FRF بر حسب فرکانس در مقایسه لگاریتمی برای ورق

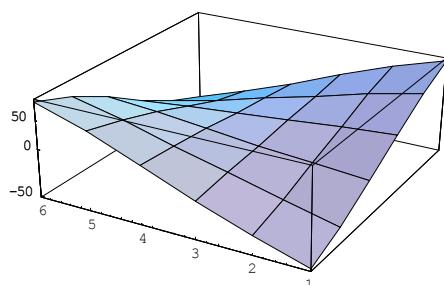


شکل ۱۱: منحنی سه بعدی MAC برای مقایسه شکل‌های مودی ورق حاصل از آزمایش و تحلیل

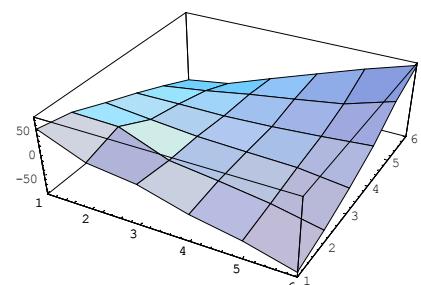


شکل ۱۰: منحنی سه بعدی NDF برای مقایسه فرکانس‌های طبیعی ورق حاصل از آزمایش و تحلیل

از شکل (۸) براحتی می‌توان فرکانس‌های طبیعی ورق را استخراج کرده همچنین نزدیکی نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی و شکل‌های مودی حاصل از آزمایش را با نتایج تحلیل در شکل‌های (۹) تا (۱۱) مشاهده کرد. شکل (۱۲) نیز نمایانگر شکل مودی ورق برای مد سوم ارتعاشی آن می‌باشد.



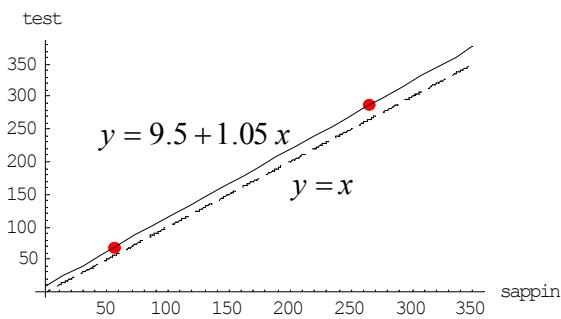
سومین شکل مد ارتعاشی ورق ناشی از تحلیل



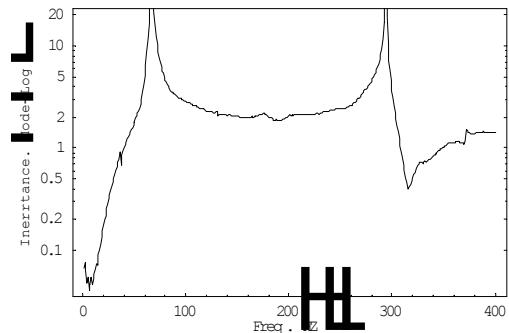
شکل ۱۲: سومین شکل مد ارتعاشی ورق ناشی از آزمایش

### جدول شماره ۳: نتایج مربوط به فرکانس‌های طبیعی قاب (هرتز)

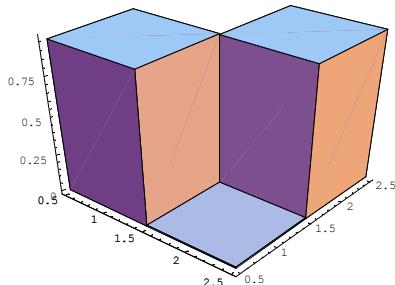
	اول آزمایش	خطا نسبت به آزمایش %	دوم	خطا نسبت به آزمایش %
SAP-Fix	۶۵/۳۸	-----	۲۸۷/۲۹	-----
SAP-Pin	۹۸/۶۶	۴۶/۴	۳۲۰/۴۰	۱۱/۵۲
	۰۰/۲۷	۱۷/۹۷	۲۶۵/۲۴	۷/۶۸



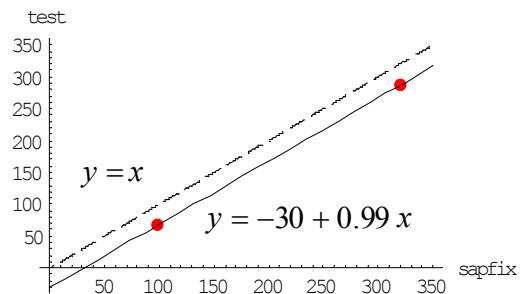
شکل ۱۴: منحنی استاندارد برای مقایسه فرکانس‌های طبیعی آزمایش و تحلیل برای قاب با تکیه گاه ساده



شکل ۱۳: منحنی تغییرات FRF بر حسب فرکانس در مقیاس لگاریتمی برای قاب



شکل ۱۶: منحنی سه بعدی MAC برای مقایسه مدل‌شکلهای قاب حاصل از آزمایش و تحلیل



شکل ۱۵: منحنی سه بعدی NDF برای مقایسه فرکانس‌های طبیعی قاب حاصل از آزمایش و تحلیل

فرکانس‌های طبیعی هر دو مدل ارتعاشی قاب از شکل (۱۳) قابل حصول است. شکلهای (۱۴) و (۱۵) میزان انحراف نتایج حاصل از آزمایش با تحلیل در هر دو حالت شرایط تکیه گاهی را نشان می‌دهند. با دقت در این اشکال می‌توان نتیجه گرفت که شرایط تکیه گاهی سازه در هنگام آزمایش به شرایط تکیه گاهی ساده نزدیکتر بوده است. شکل (۱۶) نیز بیانگر انطباق شکلهای مودی بدست آمده از آزمایش و تحلیل سازه است.

## ۸- نتیجه گیری

- ۱- نتایج حاصل شده در این تحقیق حکایت از تطابق خوب نتایج آزمایش و تحلیل برای سازه‌های مورد آزمایش دارد.
- ۲- فرکانس‌های طبیعی و شکلهای مودی اندازه‌گیری شده در آزمایشگاه در محدوده صفر تا حد اکثر ۸۰۰ هرتز اندازه‌گیری شده است.
- ۳- نتایج بدست آمده از مدل قاب ساخته شده در مقیاس آزمایشگاهی در مقایسه با نتایج تحلیلی آن بیانگر رفتار مناسب سازه مزبور در برابر بارهای اعمالی است.
- ۴- از بررسی نتایج قاب می‌توان نتیجه گرفت که شرایط تکیه گاهی مدل شده در آزمایشگاه علی‌رغم تصور اولیه به شرایط تکیه گاهی ساده نزدیکتر بوده است. این نتیجه تأکیدی بر دشواری در حصول شرایط تکیه گاه گیردار در عمل می‌باشد.

## ۹- منابع

- [1] Ewins, D.-J., “*Modal Testing: Theory, Practice and Application*,” Second Edition, Research Studies Press, 2000.
- [2] Maia, N., Silva, J., He, J., Lieven, N., Lin, R.-M., Skingle, G., To, W., and Urgeira, A., “Theoretical and Experimental Modal Analysis,” *Research Studies Press*, 1997.
- [3] Peeters, B., De Roeck, G., “Reference based stochastic subspace identification in civil engineering”, *Inverse Problems in Engineering*, V.8(1), pp.47-74, 2000
- [4] Peeters, B., De Roeck, G., Hermans, L., Wauters, T., Krarner, C., DeSmet, C., “Comparison of system identification methods using operational data of a bridge test, Proc. ISMA 23, Leuven (B), pp.923-930, 1998
- [5] Herman Van der Auweraer, “Structural Dynamics Modeling using Modal Analysis: Applications, Trends and Challenges”, IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference, Budapest, Hungary, May 21-23, 2001
- [6] Chopra, A., “*Dynamics of Structures*,” Prentice-Hall, New Jersey, 2001.
- [7] Lieven, N.-A.-J., and Ewins, D.-J., “Spatial correlation of mode shapes, the coordinate modal assurance criterion,” *Proc. of the 6th IMAC*, 690-695, Kissimmee, Florida, 1988.
- [8] Avitabile, P., and O'Callahan, J., “Model correlation and orthogonality criteria,” *Proc. of 6th IMAC*, 1039-1047, Kissimmee, Florida, 1988.
- [9] Ibrahim, S.-R., and Saafan, A.-A., “Correlation of analysis and test in modelling of structures assessment and review,” *Proc. of the 5th IMAC*, 1651-1660, London, England, 1987.
- [10] Sidhu, J., and Ewins, D.-J., “Correlation of finite element and modal test studies of a practical structure” *Proc. of the 2nd IMAC*, 756-762, Orlando, Florida, 1984.
- [11] Snoeys, R., and Sas, P., and Heylen, W., and Auweraer, V., “Trends in experimental modal analysis,” *Mechanical Systems and Signal Processing*, 1(1), 5-27, 1987.
- [12] Wada, B.-K., “Correlation of modal and test analysis,” *Technical Report Jet Propulsion Laboratory*, 1980.