

معادله مشخصه یک موجبر صفحه ای ساخته شده با مواد دستگردان

- حمید کیوانی^۱، احسان تمیس^۲، احد سلیمی^۱، مظفر والی^۳
۱- دانشگاه آزاد اسلامی دانشکده ی برق دانشگاه آزاد اسلامی کازرون
۲- دانشگاه آزاد اسلامی باشگاه پژوهشگران جوان، شیراز
۳- دانشگاه آزاد اسلامی باشگاه پژوهشگران جوان، کازرون

۱- مقدمه

زمانی که یک موج با پلاریزاسیون خطی بطور عمودی به لایه ای از محیط دستگردان برخورد کند دو موج در آن محیط تولید می گردد یکی موج با پلاریزاسیون دایروی چپگرد و دیگری راستگرد که دارای سرعتهای فاز مختلف هستند. خارج لایه دستگردان دو موج با هم ترکیب و تشکیل یک موج با پلاریزاسیون خطی می دهند. صفحه پلاریزاسیون این موج جدید نسبت به موج تابش چرخیده است. میزان این چرخش بستگی به مقدار مسافتی دارد که موج در یک محیط دستگردان طی می کند. این مطلب مشخص می کند که فعالیت نوری نه تنها در سطوح لایه بلکه در درون آن نیز رخ می دهد. در چند دهه گذشته، دستگردانی الکترومغناطیس و مواد دستگردان به صورت ارزنده ای مورد بحث قرار گرفته اند و تعداد زیادی از کاربردهای آنرا نیز بیان شده است از جمله برای پوشش پلاستیکی آنتن را دار هواپیما (radomes)، شبکه های سطوح برجسته، کوپلرهای جهتدار، تبدیل کننده های مد، تجزیه و تحلیل داده های بدست آمده تجربی در تشخیص از راه دور لایه های گیاهی

۲- روابط اساسی

مطالعات پدیده شناسی توسط Drude مشخص کرد که چرخش صفحه پلاریزاسیون از معادلات ماکسول اثبات می شود و نیز نشان داد که بردار \mathbf{D} یک ترم جدید $\nabla \times \mathbf{E}$ علاوه بر ترم رایج \mathbf{E} (یعنی $\epsilon_0 \chi_e \mathbf{E}$ که ضریب خود تاثیر پذیری الکتریکی می باشد) را داراست. این بررسی Born را بیان رابطه $\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{E} + \kappa \nabla \times \mathbf{E})$ با $\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e)$ و $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ راهنمایی کرد. به هر حال مشاهده محیطی این روابط دلیل بر غیر متقابل بودن آنها دارد. پیشنهاد Born برای مواد دستگردان همگن به وسیله Fedoron به صورت زیر اصلاح یافت:

$$\mathbf{D} = \epsilon(\mathbf{E} + \kappa \nabla \times \mathbf{E}) \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \kappa \nabla \times \mathbf{H}) \quad (1)$$

که معادله ها متفاوتند و تحت شرایط معکوس زمانی این روابط دوگان یکدیگرند. شبه اسکالر κ نشان دهنده دستگردانی ماده می باشد. اگر κ به سمت صفر میل کند روابط اساسی (۱) برای یک محیط عادی، بدون تلف و همگن با ϵ و μ بدست می آید. این پارامترهای در مواد دستگردان نیز دارای همین مفهوم می باشند.

مجموعه معادلات اساسی به وسیله Post اثبات شد. وی نشان داد که:

$$\mathbf{D} = \epsilon_p \mathbf{E} - j \xi \mathbf{B} \quad \mathbf{B} = \mu_p(\mathbf{H} + j \xi \mathbf{E}) \quad (2)$$

که در اینجا دستگردانی با ξ ، مشخص شده است. با کاربرد معادلات ماکسول برای میدانهای الکترومغناطیسی متغیر با زمان می توان نشان داد که هر دو نوع روابط اساسی بالا در شرایط زیر با یکدیگر معادلند:

$$\varepsilon_p = \varepsilon \quad \mu_p = \mu / (1 - \omega^2 \varepsilon \mu \kappa) \quad \xi = \omega \varepsilon \kappa \quad (3)$$

که در اینجا روابط اساسی Born-Fedoron با هم استفاده می شوند. بنابراین پارامتر κ به وسیله عبارت $\kappa = \gamma \frac{c_0}{\omega}$ جایگزین می شود که $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$ همان سرعت نور در خلا می باشد. γ به عنوان پارامتر دستگردانی (chirality)، دستگردانی محیط را بیان می کند. روابط اساسی نهایی که در این مقاله به کار می بریم عبارت است از:

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\mathbf{E} + \gamma \frac{c_0}{\omega} \nabla \times \mathbf{E}) \quad \mathbf{B} = \mu(\mathbf{H} + \gamma \frac{c_0}{\omega} \nabla \times \mathbf{H}) \quad (4)$$

که پارامترهای ε (ضریب نفوذپذیری الکتریکی) و μ (ضریب نفوذپذیری مغناطیسی) و γ دستگردانی محیط می باشد. البته جا دارد که در اینجا به این نکته اشاره شود که روابط معمول در مراجع بر حسب ادمیتانس دستگردانی به صورت زیر می باشد:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} - j \xi \mathbf{B} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu} - j \xi \mathbf{E} \quad (5)$$

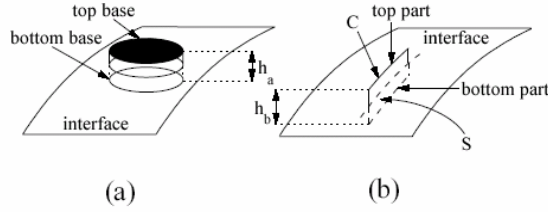
که در آن ε و μ کمتهای حقیقی و ξ از جنس ادمیتانس است. از آنجایی که \mathbf{D} و \mathbf{E} بردارهای قطبی و \mathbf{H} و \mathbf{B} بردارهای محوری هستند پس ε و μ اسکالرهای حقیقی و ξ یک اسکالر کاذب است. این بدان معنی است که وقتی محورهای دستگاه مختصات راستگرد معکوس گردد بطوریکه دستگاه مختصات چپگرد را تشکیل دهد ε و μ بدون تغییر علامت می مانند ولی علامت ξ تغییر می کند. اگر مثبت باشد محیط راستگرد و اگر ξ منفی باشد محیط چپگرد است. این بدان معنی است که جهت پلاریزاسیون راستگرد یا چپگرد است. در حالت $\xi = 0$ محیط ساده است و هیچ فعالیت نوری وجود ندارد.

اگر بجای \mathbf{B} در رابطه (۲)، عبارت $\frac{-1}{j\omega} \nabla \times \mathbf{E}$ را قرار دهیم آنگاه مقدار \mathbf{D} در هر نقطه فضا نه تنها به \mathbf{E} بلکه به مشتقات \mathbf{E} نیز در آن نقطه بستگی دارد. بدین معنی که \mathbf{D} همچنین به رفتار \mathbf{E} در مجاورت آن نقطه ارتباط دارد. این ارتباط بین \mathbf{D} و \mathbf{E} را پراکندگی فضایی گویند. پس محیطی که با روابط (۱) یا (۲) توصیف می گردد یک محیط دستگردان متقابل، بدون تلف، همسانگرد با پراکندگی فضایی است. از این به بعد برای تسلسل روی جزئیات این موضوع، کلمات خطی، بدون تلف، همگن و متقابل را حذف می کنیم و همچنین ما فرض می کنیم که مواد حالت غیر مغناطیسی داشته باشند و بنابراین $\mu = \mu_0$ در نظر گرفته می شود.

۳- شرایط مرزی در فصل مشترک بین دو ماده دستگردان

در این بخش شرایط مرزی برای بردارهای الکترومغناطیسی در مرز دو محیط دستگردان ثابت می شود. در اینجا فقط یک سری خواص واضح از این شرایط نشان داده می شود. چون این خواص خیلی شبیه به حالت معمولی یعنی فصل مشترک دی الکتریکهای عادی موجود در کتب الکترومغناطیسی می باشد. ε و γ در انتظار دستخوش یک سری تغییرات در یک جهش محدود در مرز می باشند. یعنی توابع $\varepsilon(r)$ و $\gamma(r)$ مرز محدود هستند ولی لازم نیست که پیوسته باشند. از طرفی دیگر، μ در مرز ثابت در نظر گرفته می شود و معادل با یک مقدار ثابت μ_0 می باشد. اولین شرط به صورت زیر بیان می شود: در مرز دو ماده دستگردان، مولفه نرمال بردارهای \mathbf{D} و \mathbf{B} پیوسته می باشند.

به منظور اثبات این حالت، یک سطح استوانه ای را به صورتیکه قسمت بالای آن در محیط ۱ و قسمت پایین آن در محیط ۲ گذاشته شود (شکل (a) ۱) را ببیند) ایجاد می کنیم. انتگرال ساده هردو طرف معادله ماکسول با بکار بردن قانون گوس نتیجه بالا را وقتی که $h_n \rightarrow 0$ به ما می دهد.



شکل ۱: (a) سطح استوانه، (b) منحنی بسته c روی سطح s، سطحی که واسط بین دو ماده دستگردان می باشد h_a و h_b به ترتیب به ارتفاع استوانه و سطح s اشاره می کنند.

دومین شرط به صورت زیر بیان می شود: در مرز دو محیط مولفه مماسی شدت میدان الکتریکی E و شدت میدان مغناطیسی H باید پیوسته باشند. به منظور اثبات این حالت روش زیر را پیش می گیریم. با جایگزینی (۱) در معادلات ماکسول، ثابت می کنیم که:

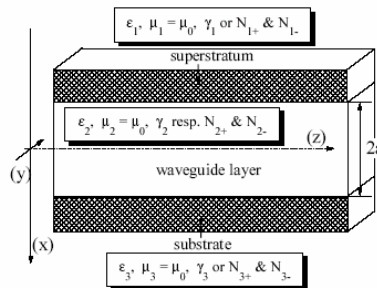
$$(1 - n^2 \gamma^2) \nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{H} + \omega\mu\epsilon_0 \gamma \mathbf{E} \quad (1 - n^2 \gamma^2) \nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon \mathbf{E} + \omega\mu\epsilon_0 \gamma \mathbf{H} \quad (۶)$$

که $n = \sqrt{\frac{\mu\epsilon}{\mu_0\epsilon_0}}$ ، بنابراین فرض می کنیم که $n\gamma \neq 1$ ، یعنی طرف چپ معادله های (۶) صفر نیست اکنون یک منحنی بسته C در مجاورت مرز که سطح صاف S را در بردارد و بر فصل مشترک عمود است. (شکل (b) ۱). فرض می کنیم که بردارهای E و H محدود هستند (یک فرض فیزیکی) اگر انتگرال از طرف راست معادله (۲) روی سطح S انتگرال بگیریم و $S \rightarrow 0$ ، آنگاه با کاربرد قانون استوکس می توانیم معادلات (۶) را به فرم زیر بنویسیم:

$$\left. \begin{aligned} \oint_c \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \\ \oint_c \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} &= 0 \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow s \rightarrow 0 \Leftrightarrow h_a \rightarrow 0$$

که dl یک المان خطی است، بنابراین شرط دوم نیز اثبات می شود.

نتیجه ای که از این بحث می توان گرفت این است که شرایط مرزی روی فصل مشترک دوماه دستگردان دقیقاً همان شرایط مرزی مواد دی الکتریک غیر دستگردان می باشد. پس مولفه های مماسی امواج E و H در مرز پیوسته هستند. بنابراین مطابق شکل (۲)، باید مولفه E_y و E_z و H_y و H_z در $x = \pm a$ پیوسته باشند. یعنی:



شکل ۲: ساختار موجبر صفحه ای دستگردان

$$\begin{aligned}
E_{z1}(a) &= E_{z2}(a), & H_{z1}(a) &= H_{z2}(a), \\
E_{y1}(a) &= E_{y2}(a), & H_{y1}(a) &= H_{y2}(a), \\
E_{z3}(-a) &= E_{z2}(-a), & H_{z3}(-a) &= H_{z2}(-a), \\
E_{y3}(-a) &= E_{y2}(-a), & H_{y3}(-a) &= H_{y2}(-a),
\end{aligned}
\tag{7}$$

بعد از دستکاریهای ریاضی طولانی، معادلات (7) را می توان به صورت فرم ماتریسی زیر نوشت:

$$M.U = 0 \tag{8}$$

که U یک بردار ستونی شامل پارامترهای مجهول و M یک ماتریس (8×8) است که ماتریس مشخصه موجبر صفحه ای دستگردان نامیده می شود. اینجا ما تاکید می کنیم که همه المانهای ماتریس بستگی به پارامترهای هندسی- نوری (opto-geometrical) مربوط به موجبر (یعنی ضرائب شکست اصلاح شده $N_{3\pm}, N_{2\pm}, N_{1\pm}$ و لایه موجبر به ضخامت $2a$) دارند. و نیز از همه مهمتر این المانها بر پارامترهای انتشاری میدان الکترومغناطیسی (یعنی فرکانس ω و ثابت انتشار β) بستگی دارند. به همین منظور ماتریس M را به صورت زیر تعریف می کنیم: $M \equiv M(\beta, \omega)$ به منظور یافتن یک پاسخ غیر بدیهی مربوط به معادله (8)، دترمینان ماتریس $M(\beta, \omega)$ باید صفر شود یعنی:

$$\det[M(\beta, \omega)] = 0 \tag{9}$$

این معادله که معادله مشخصه نامیده می شود یک فرمول صریح برای مشخصه انتشاری $\beta = (\beta, \omega)$ مربوط به موجبر صفحه ای دستگردان را به ما می دهد.

۴- منحنی انتشار موجبر صفحه ای دستگردان

در این بخش، معادله مشخصه (9) به صورت عددی برای ترکیب ساختاری پارامترهای موجبر صفحه ای دستگردان حل می شود. منحنی های انتشار بدست آمده بر حسب مختصات نرمالیزه شده به صورتیکه شکل هر منحنی از ضخامت لایه هسته که برابر $2a$ می باشد مستقل باشد رسم می شود. این محورهای مختصاتی نرمالیزه شده، به صورت زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned}
X &= \omega \frac{a}{c_0} = k_0 a \\
Y &= \beta \frac{c_0}{\omega} = \frac{\beta}{k_0}
\end{aligned}
\tag{10}$$

که به ترتیب فرکانس نرمالیزه شده و ثابت انتشار نرمالیزه شده نامیده می شود.

مابحث خود را در مورد ساختار موجبر صفحه ای متقارن با یک روکش دستگردان و یک هسته غیر دستگردان ادامه می دهیم:

همانگونه که در معادله (10) مشاهده شد اثر دستگردانی روی خواص مواد باعث می شود تا ضریب شکست (n) به یک جفت ضریب شکست اصلاح یافته (N_{\pm}) تغییر پیدا کند. به همین منظور برای اینکه اثرات دستگردانی روی خواص موجبر صفحه ای مد نظر قرار داده شود در کنار هر منحنی انتشار مربوط به موجبر صفحه ای دستگردان (که ما آنها را منحنی انتشار دستگردان می نامیم)، منحنی انتشار متناظر با موجبر صفحه ای غیر دستگردان (که ما آنها را منحنی های انتشار) غیر دستگردان می نامیم) نیز رسم می شود. منظور از این که می گوییم موجبر صفحه ای غیر دستگردان متناظر با موجبر صفحه ای دستگردان این است که ضرایب شکست همانها در نظر گرفته شده با این تفاوت که $\gamma = 0$ باشد.

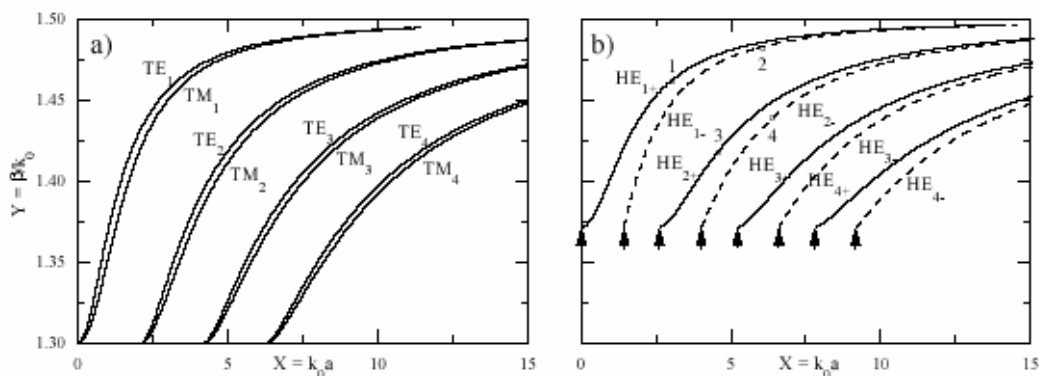
۴-۱ موجبر صفحه ای دستگردان متقارن با روکش دستگردان و هسته غیر دستگردان

مشخصات انتشاری یک موجبر دستگردان متقارن با روکش دستگردان و هسته غیر دستگردان در شکل (۳(b)) رسم شده است. مقدار عددی پارامترهای نوری موجود در بدست آوردن این شکل در جدول (۱) آمده است.

جدول ۱: پارامترهای موجبر صفحه ای دستگردان متقارن با هسته غیر دستگردان و روکش دستگردان. ($\gamma = 0.04$ برای طول موج لیزر $\lambda_0 = 632.8^{nm}$)

substrate	$n_1 = 1.3, \gamma_1 = 0.04$	$N_{1+} = 1.371, N_{1-} = 1.236$
superstratum	$n_3 = 1.3, \gamma_3 = 0.04$	$N_{3+} = 1.371, N_{3-} = 1.236$
core	$n_2 = 1.5, \gamma_3 = 0$	$N_{2+} = 1.500, N_{2-} = 1.500$

گرافهای (a) و (b) در شکل (۳) تناظر بین منحنی های انتشاری موجبر دستگردان و غیر دستگردان را نشان می دهند. توجه شود که در اینجا محور عمودی نمایانگر Y (ثابت انتشار نرمالیزه شده) است که برای حالتیکه $Y \rightarrow n_2$ یک رفتار مجانبی بوجود می آید. به عبارت دیگر وقتی که $Y \rightarrow n_2$ هر دو منحنی دارای یک رفتار می شوند. از طرف دیگر برای حد پایین Y یعنی وقتی که $Y \rightarrow n_1$ برای گراف (a) و $Y \rightarrow n_{1+}$ برای گراف (b)، منحنی ها رفتار متفاوت دارند.



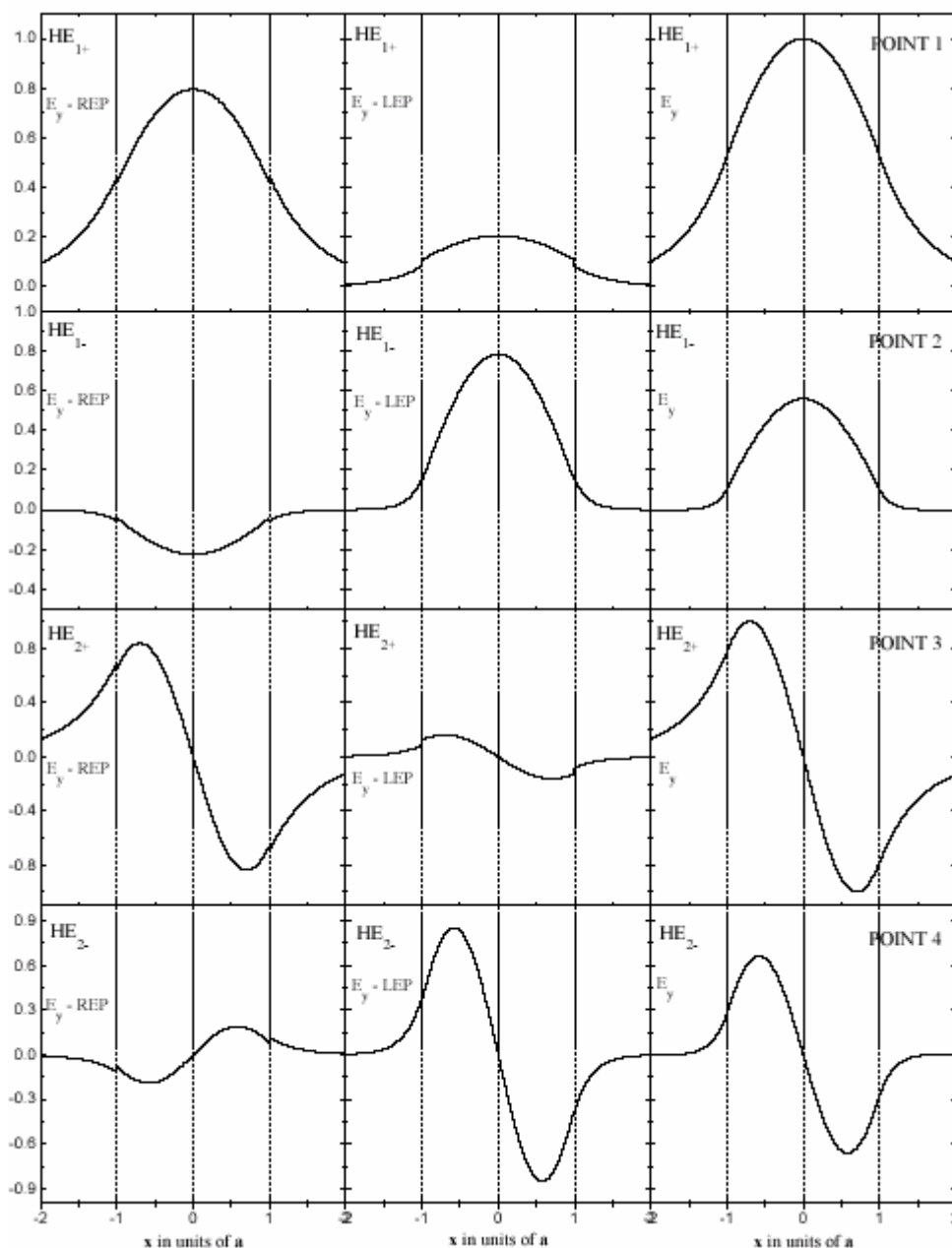
شکل ۳: منحنی انتشار (a) موجبر صفحه ای غیر دستگردان و (b) موجبر صفحه ای دستگردان متقارن با هسته غیر دستگردان و روکش دستگردان با توجه به پارامترهای جدول (۱)

۵ منحنی های انتشاری میدانهای عرضی

چون رسم همه مولفه های میدانهای E و H جای خیلی زیادی را اشغال می کند، فقط به رسم مولفه E_y می پردازیم. به منظور نمایش خواص میدانها، یعنی ویژگی REP به LEP مدهای غالب، در بعضی بازه های X مولفه های REP به LEP مربوط به E_y در منحنی های جداگانه رسم می شوند. انتشار عرضی مولفه E_y در موجبر صفحه ای دستگردان متقارن در شکل ۴ رسم شده است. با توجه به شکل می توان نتایج زیر را استنتاج کرد:

- (۱) با نزدیک شدن مقدار ثابت انتشار نرمالیزه شده به مقدار N_{1+} (بیشتر (کمتر) کسر انرژی در روکش موجبر حمل می شود. یعنی با توجه به معادله (۳)-
- (۲) وقتی $\frac{\beta}{k_0}$ به مقدار N_{1+} نزدیک می شود، مقدار p_+ به صفر میل می کند. عدم وجود تضعیف به آن معنی است که امواج دیگر به لوحه دی الکتریک محدود نیستند.

۲) مولفه های (LEP)REP متناظر با منحنی های انتشاری $HE_{m+} - HE_{m-}$ (چندین مرتبه از مولفه های (REP)LEP بزرگتر است. یعنی میدانهای متناظر با منحنی های $HE_{m+} - HE_{m-}$ یک ویژگی (REP) (LEP) غالب دارند.



شکل ۴: انتشار عرضی مولفه E_y در موجبر صفحه ای دستگردان متقارن با روکش دستگردان و هسته غیر دستگردان. نقاط ۱، ۲، ۳ و ۴ در شکل ۳b اشاره شده است.

۶ مراجع:

- 1- V. Prelog, "Chirality in chemistry," Nobel Lecture (Dec.12, 1975); also in Les Prix Nobel, Imprimerie Royale P.A. Norstedt & Soner, Stockholm, 1976.
- 2- S.L. Adler, R.F. Dashen, Current Algebra. New Yourk: W.A.Bejamin, 1957.
- 3- J.F. Nye, Physical Properties of Crystals, Oxford: Oxford University Press, 1957.

- 4- F.M. Jaeger, Lectures on the Principles of Symmetry, London: Cambridge University Press, 1917.
- 5- L. Polarecky, "The polarization state maintenance in the chiral optical fibre waveguide," Progress in Electromagnetics Research Symposium – PIERS'96, Proc. Of PIERS'96,637, Innsbruck, July 1996.
- 6- N. Engheta, P. Pelet, "Modes in chirowaveguides," Opt. Lett. 14, pp593-595, 1989.
- 7- P. Pelet, N. Engheta, "The theory of chirowaveguides," IEEE Trans. On Antennas and Prop. 38, 90-97, 1990.
- 8- K.M. Flood, D.L. Jaggard, "Single-mode operation in symmetric planar waveguides using isotropic chiral media," Optics Letters 21, 474-477, 1996.
- 9- J. Xiao, K. Zhang, L. gong, "Experimental study on planar dielectric waveguide with chiral core," Int. J. Infrared Millim. Wave, Vol. 19, No.10, pp.1439-1445, 1998.