

## نقد و بررسی دیدگاه‌های موجود در مورد توابع اکیداً حقیقی مثبت

حمید خالوزاده  
دانشگاه خواجه نصیر الدین طوسی  
h\_khaloozadeh@kntu.ac.ir

مجتبی حکیمی مقدم  
دانشگاه آزاد اسلامی واحد گناباد  
mojtaba\_hakimi@yahoo.com

### چکیده

توابع  $SPR$  در دهه ۱۹۶۰ در ارتباط با فرآپایداری مجانبی<sup>۱</sup> مطرح شدند و بدلیل کاربرد در مقوله پایداری خیلی سریع در زمینه‌های مختلف کنترل مورد استفاده قرار گرفتند؛ با این حال پس از گذشت چهار دهه هنوز در مورد شرایط لازم و کافی برای تشخیص  $SPR$  بودن توابع تبدیل یک اتفاق نظر کلی وجود ندارد و در کتب و مقالات بیانهای متفاوتی برای شرایط لازم و کافی دیده می‌شود. در این مقاله قضایای موجود در مورد این توابع نقد و بررسی می‌شود و نقایص موجود در آنها با ذکر مثالهایی آشکار می‌شود.

**کلمات کلیدی:** توابع اکیداً حقیقی مثبت، شرایط لازم و کافی، شبکه‌های تلفاتی

### ۱- مقدمه

توابع  $PR$  در ارتباط با تحقق پذیری امیدانس  $Z(s)$  با المانهای مثبت مقاومت، سلف، خازن و تزویج ایده آل مطرح شد و شرط کفایت و بسیاری از خواص آن توسط آنت برون در سال ۱۹۳۰ استخراج گردید، او اثبات کرد که هر تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی، امیدانس نقطه تحریک یک شبکه تک دهنه خطی، غیر فعال، فشرده، دوجانبه و نامتغیر با زمان است؛ اگر و فقط اگر حقیقی مثبت باشد [۱]. در اوایل دهه ۱۹۶۰ پوپوف نظریه فرآپایداری<sup>۲</sup> را مطرح کرد و نشان داد که یک سیستم خطی نا متغیر با زمان فرآپایدار است اگر و فقط اگر  $PR$  باشد و بطور مجانبی فرآپایدار است، اگر و فقط اگر  $SPR$  باشد [۷]. بلافاصله یاکوبوویچ و کالمن کار پوپوف را در فضای حالت دنبال کردند و معادل فضای حالتی فرآپایداری را بصورت یک لم استخراج نمودند که به لم  $KYP^3$  یا لم  $PR^4$  معروف است. همچنین کالمن نشان داد که حل مسأله معکوس کنترل بهینه با استفاده از نظریه فرآپایداری به قانون کنترل بهینه  $LQR$  منجر می‌شود [۸]. نظریه فرآپایداری پوپوف به سرعت در کنترل تطبیقی مدل مرجع مورد استفاده قرار گرفت و نشان داده شد که در بیشتر مواقع استفاده از این نظریه ساده تر از نظریه پایداری لیپانوف است [۵]. امروزه از این نظریه در اغلب زیر شاخه‌های کنترل از جمله کنترل غیر خطی، کنترل مقاوم، کنترل فازی، کنترل بهینه و کنترل تطبیقی استفاده می‌گردد. بدلیل کارهای با ارزشی که در دهه ۱۹۷۰ توسط ویلمز و سپس دسور و

<sup>1</sup> - Asymptotic Hyperstability

<sup>2</sup> - HyperStability

<sup>3</sup> - Kalman-Yakubovich-Popov Lemma

<sup>4</sup> - Positive Real Lemma

ویدیاساگار انجام گرفت، امروزه بجای اصطلاح فرایپایداری از غیر فعال بودن<sup>۵</sup> و بجای اصطلاح فرایپایداری مجانبی از تلفاتی بودن<sup>۶</sup> استفاده می گردد.

هدف اصلی این مقاله اشاره به نواقص موجود در قضایایی است که عموماً برای تشخیص توابع  $SPR$  مورد استفاده قرار می گیرند. در بخش دوم قضایای معروف در این زمینه نقد و بررسی می شود. در بخش سوم برخی از دسته توابع  $PR$  که  $SPR$  نیستند معرفی می شوند.

## ۲) نقد و بررسی قضایای موجود در مورد توابع تبدیل اکیداً حقیقی مثبت

تعاریف اصلی در مورد توابع حقیقی مثبت عبارتند از:

**تعریف ۱ [۶]:** تابع تبدیل با ضرایب حقیقی  $G(s)$ ، حقیقی مثبت یا به اختصار  $PR^y$  است، اگر نامساوی  $Re[G(s)] \geq 0$  در ناحیه  $Re[s] \geq 0$  برقرار باشد.

**تعریف ۲ [۶]:** تابع تبدیل با ضرایب حقیقی  $G(s)$ ، اکیداً حقیقی مثبت یا به اختصار  $SPR^a$  است، اگر  $\varepsilon > 0$  وجود داشته باشد بگونه ای که  $G(s - \varepsilon)$ ،  $PR$  باشد.

استفاده مستقیم از تعاریف فوق برای معین کردن  $SPR$  بودن یک تابع دشوار است. برای نتیجه گیری قطعی در مورد  $SPR$  بودن یا نبودن یک تابع نیاز به شرایط لازم و کافی است، لذا قضایای متعددی در مقالات و کتب مختلف ارائه شده است که معرف شرایط لازم و کافی برای  $SPR$  بودن هستند، از جمله می توان به مراجع [۲]، [۴]، [۶]، [۱۱] و [۱۷-۱۴] اشاره نمود. در این بین آنچه بیشتر مورد توجه واقع شده است و عموماً مورد استناد قرار می گیرد، شرایطی است که با اعمال محدودیتهایی بر روی بخش حقیقی تابع تبدیل بیان می شود و باید اذعان داشت که در مورد آن یک اتفاق نظر کلی بین محققین و اساتید برجسته کنترل وجود ندارد، در حالیکه در مورد تعاریف فوق اتفاق نظر وجود دارد. در ادامه بیانهای غالب موجود در مورد شرایط لازم و کافی برای توابع  $SPR$  تشریح می گردد. از آنجا که در مورد تعاریف بالا اتفاق نظر وجود داشته و مورد قبول تمامی اساتید و صاحب نظران کنترل است با استناد به این تعاریف دیدگاههای مختلف موجود در مورد شرایط لازم و کافی برای توابع  $SPR$  مورد نقد و بررسی قرار می گیرد. از تلفیق تعاریف بالا نتیجه می شود:

**تعریف ۳** تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی  $G(s)$ ، اکیداً حقیقی مثبت یا به اختصار  $SPR$  است، اگر  $\varepsilon > 0$  وجود داشته باشد بگونه ای که نامساوی  $Re[G(s - \varepsilon)] \geq 0$  در ناحیه  $Re[s] \geq 0$  برقرار باشد.

بیان (۱): با استناد به کتاب کنترل تطبیقی  $Astrom$  [۲]

قضیه ۲-۸ تابع تبدیل  $G(s)$ ،  $SPR$  است اگر و فقط اگر:

(الف) هیچ قطبی با بخش حقیقی مثبت نداشته باشد.

(ب) هیچ قطب یا صفری روی محور موهومی نداشته باشد.

(ج)  $Re[G(j\omega)] \geq 0 ; \forall \omega \geq 0$ .

<sup>5</sup> - Passivity

<sup>6</sup> - Dissipativity

<sup>7</sup> - Positive Real

<sup>8</sup> - Strictly Positive Real

ین قضیه مدعی است هر تابع  $PR$  که هیچ قطب یا صفری روی محور موهومی نداشته باشد  $SPR$  است، و در واقع نسبت به بیانهای دیگر کمترین تفاوت را بین توابع  $PR$  و  $SPR$  قائل است. مثالهای متعددی وجود دارند که با استناد به این قضیه  $SPR$  هستند در حالیکه بنا به تعاریف فوق  $SPR$  نیستند، از جمله اگر شرایط قضیه فوق برقرار بوده و  $\text{Re}[G(j\omega)]$  دارای ریشه حقیقی از مرتبه زوج باشد آنگاه این قضیه در تعیین  $SPR$  بودن به نتیجه نادرست منجر می شود.

مثال نقض ۱ تابع تبدیل

$$G_{c1}(s) = \frac{s^2 + s + 1}{s^2 + s + 4}$$

را در نظر بگیرید.

بخش حقیقی این تابع عبارت است از  $\text{Re}[G_{c1}(j\omega)] = \frac{(\omega^2 - 2)^2}{(\omega^2 - 4)^2 + \omega^2}$  بنابراین شرط  $\text{Re}[G_{c1}(j\omega)] \geq 0 ; \forall \omega \geq 0$  برقرار بوده و لذا بنا به قضیه فوق تابع  $G_{c1}(s)$ ،  $SPR$  است. دقت شود که  $\text{Re}[G_{c1}(j\omega)]$  دارای ریشه مضاعف در  $\omega = \sqrt{2}$  است. با توجه به تعاریف بالا باید نامساوی  $\text{Re}[G_{c1}(j\sqrt{2} - \varepsilon)] \geq 0$  دست کم برای یک مقدار مثبت  $\varepsilon$  برقرار باشد. از طرفی بدیهی است که اگر  $\varepsilon > 0.5$  اختیار شود آنگاه  $G_{c1}(s - \varepsilon)$  دارای قطب ناپایدار بوده و  $PR$  نخواهد بود، بنابراین برای  $SPR$  بودن  $G_{c1}(s)$  باید دست کم یک  $\varepsilon$  در بازه  $0 < \varepsilon \leq 0.5$  موجود باشد، بطوریکه  $\text{Re}[G_{c1}(j\sqrt{2} - \varepsilon)] \geq 0$ . براحتی می توان نشان داد که:

$$\text{Re}[G_{c1}(j\sqrt{2} - \varepsilon)] = \frac{\varepsilon(\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 - \varepsilon + 9)}{(\varepsilon^2 - \varepsilon + 2)^2 + 2(\varepsilon - 1)^2}$$

بنابراین برای هیچیک از مقادیر  $\varepsilon$  در بازه  $0 < \varepsilon \leq 0.5$  نامساوی  $\text{Re}[G_{c1}(j\sqrt{2} - \varepsilon)] \geq 0$  برآورده نمی شود و لذا بنا به تعریف این تابع  $SPR$  نیست و این برای نقض قضیه فوق کافی است.

بیان (۲): با استناد به کتاب کنترل غیر خطی Slotine [۶]

قضیه ۲-۹ تابع تبدیل  $G(s)$ ،  $SPR$  است اگر و فقط اگر:

الف) قطبهای آن دارای بخش حقیقی منفی باشند.

ب)  $\text{Re}[G(j\omega)] > 0, \forall \omega \geq 0$ .

این قضیه مدعی است هر سیستم خطی بطور مجانبی پایدار که دیگرام نایکویست آن بطور کامل در سمت راست محور موهومی واقع باشد  $SPR$  است و نسبت به بیان قبلی محدودیتهای بیشتری برای توابع  $SPR$  قائل است. این بیان در مجموع از بیان (۱) کاملتر است زیرا در مورد تابع  $G_{c1}(s)$ ، به نتیجه صحیحی منجر می شود. با این حال مثالهای نقض فراوان دیگری از جمله مثال زیر برای آن وجود دارد.

مثال نقض ۲ تابع تبدیل

$$G_{c2}(s) = \frac{s + 1}{s^2 + s + 1}$$

را در نظر بگیرید. بخش حقیقی این تابع عبارت است از:

$$\operatorname{Re}[G_{c_2}(j\omega)] = \frac{1}{(\omega^2 - 1)^2 + \omega^2}$$

بنابراین شرط  $\operatorname{Re}[G_{c_2}(j\omega)] > 0, \forall \omega \geq 0$  برقرار بوده و لذا بنا به قضیه فوق تابع  $G_{c_2}(s)$  SPR است. اما بنا به تعریف (۳) باید نامساوی  $\operatorname{Re}[G_{c_2}(j\omega - \varepsilon)] > 0$  برای فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ برقرار باشد. از طرفی برای فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ داریم:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G_{c_2}(j\omega - \varepsilon)] = \frac{-\varepsilon\omega^2 + (1 - \varepsilon)(\varepsilon^2 - \varepsilon + 1)}{(\omega^2 - \varepsilon^2 + \varepsilon - 1)^2 + \omega^2(2\varepsilon - 1)^2}$$

بنابراین

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G_{c_2}(j\omega - \varepsilon)] \approx -\frac{\varepsilon}{\omega^2}$$

و لذا  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G_{c_2}(j\omega - \varepsilon)] < 0, \forall \varepsilon > 0$  لذا بنا به تعریف این تابع SPR نیست و این برای نقض قضیه فوق کافی است.

بیان (۳): با استناد به مقاله *Tao* و *Ioannou* [۱۱]

قضیه ۲-۱۰ تابع تبدیل  $G(s)$  SPR است اگر و فقط اگر:

الف) قطبهای آن دارای بخش حقیقی منفی باشند.

ب)  $\operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0, \forall \omega \geq 0$

ج) برای درجه نسبی یک رابطه  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0$  و برای درجه نسبی منهای یک روابط

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0 \text{ و } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{G(s)}{s} > 0$$

این بیان از دو بیان قبلی کاملتر است بطوریکه در مورد مثالهای نقض (۱) و (۲) به نتیجه موافق با تعریف (۳) منجر می شود، برای مثال نقض (۱) شرط (ب) برقرار نیست و برای مثال نقض (۲) رابطه  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}[G_{c_2}(j\omega)] = 0$  حاصل می شود که مبین عدم برقراری شرط (ج) در بیان اخیر است. در مراجع [۱۲] و [۱۳] نامساوی  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0$  در شرط (ج) این قضیه برای توابع با درجه نسبی منهای یک، ذکر نشده است. در زیر لزوم این شرط نشان داده شده است، بنابراین قضیه فوق صحیح است.

مثال ۳-۴ تابع تبدیل

$$G(s) = s + \frac{1}{s+1}$$

را در نظر بگیرید. بنا به تعریف (۳) باید نامساوی  $\operatorname{Re}[G(j\omega - \varepsilon)] > 0, \forall \omega \geq 0$  برقرار باشد، از طرفی:

$$\operatorname{Re}[G(j\omega - \varepsilon)] = -\varepsilon + \frac{1 - \varepsilon}{\omega^2 + (1 - \varepsilon)^2}$$

بنابراین برای فرکانسهای به اندازه کافی بزرگ رابطه  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G(j\omega - \varepsilon)] \approx -\varepsilon$  برقرار است و لذا  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G(j\omega - \varepsilon)] < 0, \forall \varepsilon > 0$  بنابراین طبق تعریف (۳) این تابع  $SPR$  نیست. با دقت در قضیه فوق روشن می شود که تمام شرایط بجز شرط  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0$  برقرار است، بنابراین این شرط لازم است و در مراجع [۱۲] و [۱۳] اشکال چاپی وجود دارد ( این موضوع مورد تأیید مولف کتاب [۱۳] قرار گرفته است ).

بیان (۴): با استناد به کتاب سیستمهای غیر خطی *Khalil* [۴]

قضیه ۲-۱۱: تابع تبدیل سره<sup>۹</sup>  $G(s)$ ،  $SPR$  است اگر و فقط اگر:

الف) قطبهای آن دارای بخش حقیقی منفی باشند.

$$\operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0, \forall \omega \geq 0 \quad \text{ب)}$$

ج) برای درجه نسبی یک رابطه  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0$  و برای درجه نسبی صفر رابطه  $G(\infty) > 0$  برقرار باشد.

این بیان توابع با درجه نسبی منهای یک را پوشش نمی دهد و شرط (ج) آن دارای یک بخش غیر ضروری است، همچنین بخش دیگر شرط (ج) بصورت بسیار ساده تری قابل بیان است. با دقت در دو بیان اخیر دیده می شود که در آنها شرط سوم وجود دارد که در فرکانسهای بالا به تابع تبدیل تحمیل می شود.

همانطور که در مرجع [۱۸] آمده است اگر

$$G(s) = k \frac{b(s)}{a(s)} = k \frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad k > 0$$

آنگاه این شرط را می توان بصورت زیر بیان نمود: اگر  $|n - m| = 1$  آنگاه  $a_1 \neq b_1$ .

بیان (۵): با استناد به کتاب کنترل فازی *Wang* [۳]

در این کتاب تعریف جدیدی بصورت زیر ارائه شده است:

تعریف ۳-۸: تابع تبدیل  $G(s)$ ، با ساختار فضای حالتی  $(A, b, c)$ ،  $SPR$  اگر  $\inf_{\omega \in R} \operatorname{Re}[G(j\omega)] > 0$ .

نقد: بطور کلی  $\inf_{\omega \in R} \operatorname{Re}[G(j\omega)]$  نمی تواند برای توابع با درجه نسبی یک یا بالاتر، مثبت باشد زیرا براحتی می

توان نشان داد که برای این توابع تبدیل  $\lim_{\omega \rightarrow \infty} G(j\omega) = 0 \Rightarrow \inf_{\omega \in R} \operatorname{Re}[G(j\omega)] \leq 0$  بنابراین تعریف فوق یک

مجموعه تهی را معرفی می نماید.

مثال ۳-۶: تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

<sup>9</sup> - Proper

را در نظر بگیرید. بدیهی است که  $\inf_{\omega \in R} \left( \frac{1}{1+\omega^2} \right) = 0$  پس این تابع بنا به بیان فوق  $SPR$  نیست.

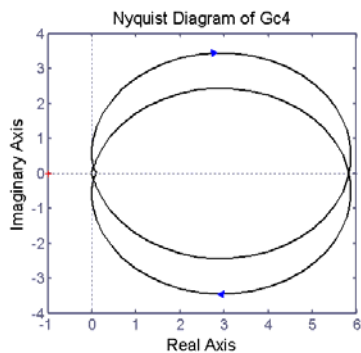
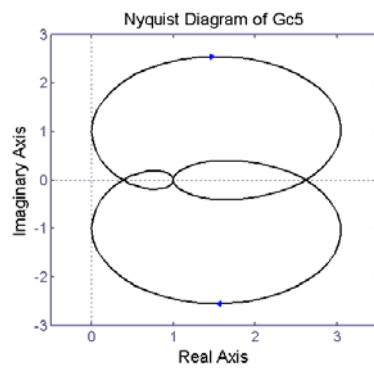
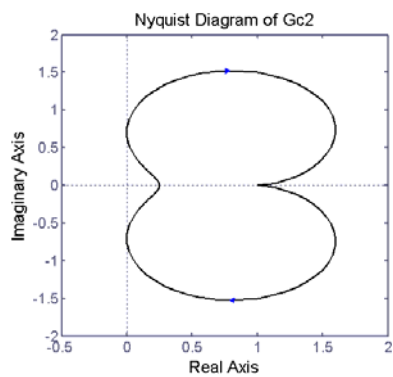
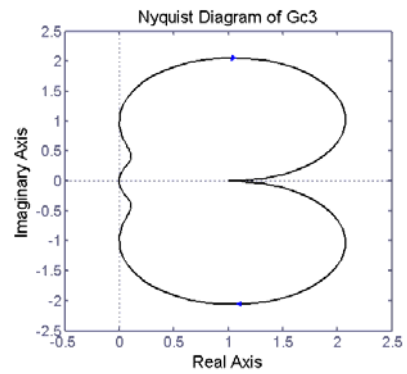
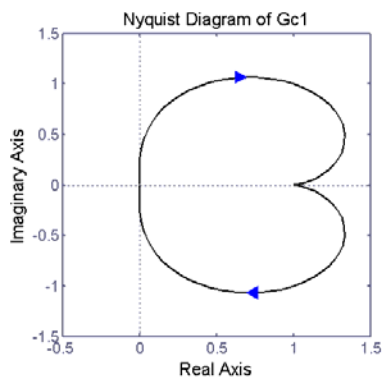
از مطالب مطروحه در این کتاب می توان دریافت که هدف نویسنده از بیان تعریف فوق استفاده از پایداری مطلق برای طراحی یک کنترلر فازی پایدار بوده است، لذا این تعریف بطور منطقی باید با تعریف (۳) معادل باشد اما این برقرار نیست زیرا برای مثال تابع  $G(s)$  در مثال فوق بنا به تعریف (۳)  $SPR$  است.

### (۳) معرفی برخی از دسته توابع $PR$ که $SPR$ نیستند

در این بخش به برخی از دسته توابع  $PR$  که  $SPR$  نیستند اشاره می شود و دیاگرام نایکویست برای یک نمونه از آنها ترسیم می گردد. در مورد تمامی توابع پارامتری که در جدول زیر ذکر شده است فرض می شود دامنه تغییرات پارامترهای حقیقی  $c, b, a$  بگونه ای است که چند جمله ای های صورت و مخرج اکیداً هرویتس باشند.

دلیل نبودن $SPR$	برخی از دسته توابع تبدیل $PR$ که $SPR$ نیستند
تساوی مجموع قطبها با مجموع صفرها	(C1): $G(s) = \frac{s+a}{s^2+as+b}$
$\omega_z = \pm \sqrt[4]{ac^2}$ ریشه مضاعف $\text{Re}[G(j\omega)]$ است	(C2): $G(s) = \frac{s^2+as+ab^2}{s^2+(b-c)^2s+ac^2}$
$\omega_z = \pm \sqrt{b}$ ریشه مضاعف $\text{Re}[G(j\omega)]$ است	(C3): $G(s) = \frac{s^2+as+b}{s^3+cs^2+bs+b(c-a)}$
$\omega_z = \pm \sqrt{a(b+1)}$ ریشه مضاعف $\text{Re}[G(j\omega)]$ است	(C4): $G(s) = \frac{s^2+s+a}{s^3+2s^2+a(b^2+1)s+a(b+1)^2}$
$\omega_z = \pm b$ ریشه مضاعف $\text{Re}[G(j\omega)]$ است	(C5): $G(s) = \frac{s^3+as^2+b^2s+bc}{s^3+bcs^2+(b^2-c^2+abc)s+cb^3}$

از دسته توابع (C1) تابع  $G_{C1}(s) = \frac{s+1}{s^2+s+1}$  و از دسته توابع (C2) تابع  $G_{C2}(s) = \frac{s^2+s+1}{s^2+s+4}$  و از دسته توابع (C3) تابع  $G_{C3}(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+s+1}$  و از دسته توابع (C4) تابع  $G_{C4}(s) = \frac{s^2+s+1}{s^3+2s^2+5s+9}$  و از دسته توابع (C5) تابع  $G(s) = \frac{s^3+2s^2+s+1}{s^3+s^2+2s+1}$  را در نظر بگیرید. دیاگرام نایکویست این توابع در زیر ترسیم شده است.



#### (۴) نتیجه گیری

در این مقاله بیانهای مختلف در ارتباط با شرایط لازم و کافی برای اکیداً حقیقی مثبت بودن یک تابع تبدیل مورد نقد و بررسی قرار گرفت. به نظر می رسد کامل ترین بیان، بیان (۴) است که توابع با درجه نسبی منهای یک را نیز در بر دارد. علاوه بر این شکل ساده تری از شرط سوم این بیان ارائه شد که کار تشخیص توابع SPR را تسهیل می نماید. همچنین پنج دسته کلی از توابع PR که SPR نیستند معرفی شد.

#### (۵) مراجع

[۱] وای کای چن، "فیلترهای فعال و غیر فعال"، ترجمه محمد مولوی، تهران، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ اول، ۱۳۷۷.

- [۲] کارل جان استروم، یورن ویتن مارک، "کنترل تطبیقی"، ویرایش دوم، ترجمه محمد تقی حمیدی بهشتی، تهران، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۷۷.
- [۳] لی وانگ، "سیستمهای فازی و کنترل فازی"، ترجمه محمد تشنه لب، نیما صفار پور، داریوش افیونی؛ تهران: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۷۸.
- [۴] خلیل، "سیستمهای غیرخطی"، ویراست دوم، جلد دوم: طراحی و کنترل، ترجمه غلامعلی منتظر، تهران، انتشارات دانشگاه تربیت مدرس، ۱۳۸۰.
- [5] K. S. Narendra, L.S. Valavani, "A Comparison of Lyapunov and Hyperstability Approaches to Adaptive Control of Continuous Systems," IEEE Trans. Aut. Contr. Vol. 25, No. 2, pp. 243-247, April 1980.
- [6] J.-J. E. Slotine, W. Li, "Applied Nonlinear Control," Prentice Hall, 1991.
- [7] B. D. O. Anderson, "A Simplified Viewpoint of Hyperstability," IEEE, Trans. Ato. Con. June, 1968.
- [8] R. E. Kalman, "When is a Linear Control System Optimal," trans. ASME, Series D, 86, 1-10, 1964.
- [9] K. Narendra and J. Taylor, "Frequency Domain Criteria for Absolute Stability," New York: Academic, 1973.
- [10] J. H. Taylor, "Strictly positive-real functions and the Lefschetz-Kalman Yakubovich (LKY) lemma," IEEE Trans. Circuits and system, pp. 310-311, March 1974.
- [11] P. Ioannou and G. Tao, "Frequency domain conditions for strictly positive real functions," IEEE Trans. Automat. Contr., vol. AC-32, pp. 53-54, Jan. 1987.
- [12] P. A. Ioannou, J. Sun, "Robust Adaptive Control," Prentice-Hall, Upper Saddle River, New Jersey, 1995.
- [13] G. Tao, "Adaptive Control Design and Analysis," John Wiley & Sons, 2003.
- [14] B. D. O. Anderson, M. Mansour, F. J. Kraus, "a new test for strict positive realness," IEEE Trans. Circuit and System, vol. 42, no.4, April 1996.
- [15] Z. Bai, W. Freund, "Eigenvalue based characterization and test for positive realness of scaler transfer functions," IEEE Trans. Auto. Control, vol. 45, pp. 2396-2402, Dec 2000.
- [16] W. Gao, Y. Zhou, "Eigenvalue based algorithms for testing positive realness of SISO systems," IEEE Trans. Auto. Control, vol. 48, No. 11, pp. 2051-2054, Dec 2003.
- [17] R. Shorten, C. King, "Spectral Conditions for Positive Realness of Single-Input\_Single-Output Systems," IEEE Trans. Auto. Control, vol. 49, no. 10, October 2004.
- [18] M. Hakimi-M, MSc Thesis under title "Revision on the strict positive realness," Ferdowsi university of Mashhad, Iran, 13 July 2005.