کنترل غیرخطی غلظت و حجم یک محلول شیمیایی دو عنصره

سید مصطفی قدمی
کارشناس ارشد برق – کنترل دانشگاه صنعتی امیر کبیر
Smghadami@yahoo.com

چکیده- در این مقاله در ابتدا روابط حاکم بر غلظت، حجم و دبی ورودی و دبی خروجی یک مخزن تشریح شده است. پس از آن روابطی ارائه گردیده تا برای دو عنصر شیمیایی که با غلظتهای متفاوت و بصورت کنترل شده ای با یکدیگر ترکیب می شوند، غلظت و حجم محلول مرکب بدست آید. در اینجا فرض بر این است که دو عنصر شیمیایی در دو مخزن با حجمهای مشخص قرار دارند و عملیات کنترل غلظت و حجم محلول مرکب با کنترل دبی دو شیر مکانیکی مجزا (که بر روی دو مخزن نصب شده)، انجام می شود. از آنجا که روابط بین ورودی و خروجی سیستم، غیر خطی بوده و این سیستم دارای دو ورودی و دو خروجی است، لذا در این مقاله با استفاده از مبحث خطی سازی حالت- ورودی و تعمیم آن به سیستم چند متغییره، کنترلری طراحی گردیده تا غلظت و حجم محلول مرکب با استفاده از دبی دو محلول تحت معادله مشخصه ای مطلوب، کنترل شوند. در نهایت با شبیه سازی سیستم کنترل غلظت و حجم دو محلول، نمودار تغییرات دبی های ورودی، غلظت و حجم محلول مرکب در حالات مختلف نمایش داده شده است.

کلید واژه- خطی سازی حالت- ورودی ، سیستم غیرخطی دو ورودی- دو خروجی، کنترل حجم ، کنترل غلظت، کنترل غیر خطی چند متغییره،

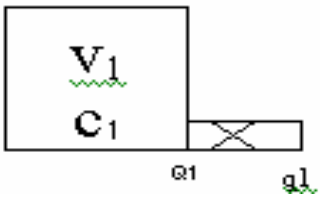
1-مقدمه

از آنجا که همه سیستمهای واقعی تا حدی غیر خطی اند، سیستم خطی در عمل وجود ندارد. ولی چنانچه مقدار سیگنالها در یک سیستم کنترل، محدود به مقادیری بشود که در گستره این مقادیر اجزا سیستم رفتاری خطی داشته باشند، سیستم اساسا خطی است[1]. اما چنانچه مقدار سیگنالها فراتر از گستره عمل خطی برود، بسته به شدت غیر خطی بودن دیگر نباید سیستم را خطی در نظر گرفت. سیستم کنترل غلظت و حجم یک محلول دو عنصره، یک سیستم غیر خطی است که در یک نقطه کار خاص سیستمی خطی است و برای این سیستم خطی دو ورودی و دو خروجی با استفاده از فرمول آکرمن[1] می توان کنترلری طراحی نمود تا از معادله مشخصه های مورد نظر تبعیت کند[1]. ولی در حالت کلی این کنترلر، جواب مناسبی برای کنترل غلظت و حجم محلول دو عنصره نخواهد بود. زیرا با انحراف از نقطه کار، رفتار سیستم، رفتاری کاملا متغییر با نقطه کار می باشد. البته بررسی ریاضی سیستمهای غیر خطی معمولا کار مشکلی است و روشی کلی برای حل رده وسیعی از سیستمهای غیر خطی در دست نیست. لذا در این مقاله، یک مسئله خاص کنترل غیر خطی دو ورودی و دو خروجی مورد بررسی قرار می گیرد تا دبی مطلوب، جهت رسیدن به غلظت و حجم مطلوب بدست آید.

2-روابط غلظت و حجم یک محلول

شکل (1) یک سیستم کنترل غلظت و حجم با دبی ورودی و دبی خروجی را نشان می دهد.

[1] *-Ackerman's Formula*



شکل(1)- سیستم کنترل غلظت وحجم یک محلول

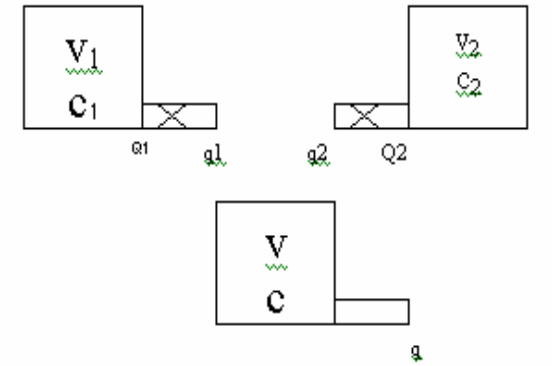
روابط حاکم بر دبی ورودی و خروجی، غلظت و حجم محلول مطابق با فرمول(1) می باشد[2] ، [3].

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v = \sum q_{in} - q_{out} \\ \frac{d}{dt}(c_{out}v) = \sum c_{in}q_{in} - c_{out}q_{out} \end{cases} \quad (1)$$

که q_{in} دبی محلولهای ورودی، q_{out} دبی محلول خروجی از مخزن ، c_{in} غلظت محلول ورودی و c_{out} غلظت محلول مرکب و v حجم محلول مرکب می باشد.

3-روابط غلظت و حجم با وجود سه مخزن مجزا

شکل (2) یک سیستم کنترل غلظت و حجم با وجود سه مخزن برای هر کدام از محلولها را نشان می دهد[4].



شکل(2)- سیستم کنترل غلظت وحجم یک محلول دو عنصره

برای این سیستم دو ورودی رابطه(1) بشکل زیر خواهد بود.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v = q_1 + q_2 - q \\ \frac{d}{dt}(c.v) = c_1q_1 + c_2q_2 - c.q \end{cases} \quad (2)$$

که q_1 و q_2 بترتیب دبی محلول اول و محلول دوم، با غلظتهای c_1 , c_2 می باشد. q دبی محلول مرکب و c غلظت محلول مرکب است.

در این شکل Q_1 وQ_2 دبی محلول خروجی مخازن بدون توجه به شیر مکانیکی می باشد. که رابطه ای بصورت(3) با حجم مخازن دارد[3] ، [4]. (a_1 و a_2 مقادیر ثابتی هستند)

$$\begin{aligned} Q_1 &= 2a_1\sqrt{v_1} \\ Q_2 &= 2a_2\sqrt{v_2} \end{aligned} \quad (3)$$

از طرفی q_1 , q_2 مقدار دبی خروجی از شیرهای مکانیکی می باشند که بستگی به مقدار زاویه زاویه باز شدن شیرها دارند.

$$\begin{aligned} q_1 &= Q_1.u_1 \\ q_2 &= Q_2.u_2 \end{aligned} \quad (4)$$

که مقدار u_1 و u_2 عددی بین صفر و یک می باشد و سیستم کنترل مقدار آن را تعیین می کند.

با جایگزینی رابطه (3) و(4) در (2) رابطه(5) بدست می آید.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}v = 2a_1\sqrt{v_1}.u_1 + 2a_2\sqrt{v_2}.u_2 - 2a\sqrt{v} \\ \frac{d}{dt}(cv) = 2c_1.a_1\sqrt{v_1}.u_1 + 2c_2.a_2\sqrt{v_2}.u_2 - 2c.a\sqrt{v} \end{cases} \quad (5)$$

طبق فرمول (1) برای مخزن شماره 1 و 2 نیز می توان روابطی بصورت زیر ارائه نمود.

$$\begin{cases} \dot{v}_1 = -q_1 = -2a_1\sqrt{v}_1.u_1 \\ \frac{d}{dt}(c_1.v_1) = -c_1q_1 = -2c_1.a_1\sqrt{v}_1.u_1 \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{v}_2 = -q_2 = -2a_2\sqrt{v}_2.u_2 \\ \frac{d}{dt}(c_2.v_2) = -c_2q_2 = -2c_2.a_2\sqrt{v}_2.u_2 \end{cases} \quad (7)$$

بدین ترتیب با تعریف $X = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v \\ c \end{bmatrix}$ چهار معادله دیفرانسیل برای X وجود دارد که رابطه ای غیر خطی نسبت به یکدیگر دارند.

$$\begin{aligned} \dot{v}_1 &= -2a_1\sqrt{v}_1.u_1 \\ \dot{v}_2 &= -2a_2\sqrt{v}_2.u_2 \\ \dot{v} &= 2a_1\sqrt{v}_1.u_1 + 2a_2\sqrt{v}_2.u_2 - 2a\sqrt{v} \\ \dot{c} &= (\frac{c_1 - c}{v})2a_1\sqrt{v}_1.u_1 + (\frac{c_2 - c}{v})2a_2\sqrt{v}_2.u_2 \end{aligned} \quad (8)$$

همانطور که ملاحظه می کنید این سیستم دارای دو ورودی u_1 و u_2 است که مستقل از یکدیگر نیستند. در اینصورت بایستی یک کنترلر غیر خطی MIMO برای آن طراحی شود.

4- طراحی کنترلر برای یک سیستم غیر خطی[5]

در این بخش، قبل از این که به کنترل غلظت وحجم یک مخزن پرداخته شود، اشاره مختصری به روش کنترل یک سیستم غیرخطی می شود. در حالت خاص برای یک سیستم غیر خطی (9) که $f(x)$ و $g(x)$ میدانهای برداری هموار[2] هستند، راه حلی بنام خطی سازی حالت- ورودی[3] وجود دارد که در آن اگر در یک ناحیه $\Omega \subset R^n$ یک دفیومورفیزم[4] $\phi : \Omega \to R^n$ وجود داشته باشد و رابطه (10) برای آن صادق باشد.

$$\dot{x} = f(x) + g(x).U \qquad (9)$$

$$\begin{cases} z = \phi(x) \\ \dot{z} = L_f \phi \\ . \\ . \\ z^{(n-1)} = L_f{}^{(n-1)} \phi \\ z^{(n)} = v = L_f{}^{(n)} \phi + L_g L_f{}^{(n-1)} \phi . U \end{cases} \qquad (10)$$

به آن خطی پذیر حالت-ورودی[5] گویند. لذا معادلات حالت و ماتریس حالت این مدل بصورت (11) بدست خواهد آمد.

$$\dot{z} = A.z + B.u$$
$$A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ , \ B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

در این مدل با تعریف خطا بشکل $e = z - z_d$ و معادله مشخصه ای بفرم (12)، ورودی سیستم غیر خطی بصورت رابطه (13) قابل محاسبه خواهد بود.

$$\Delta_{nonlinear}(s) = e^{(n)} + k_1 . e^{(n-1)} + ... + K_{n-1} . e = 0 \qquad (12)$$

$$u = z_d{}^{(n)} - k_1 . e^{(n-1)} - ... - K_{n-1} . e$$
$$U = \frac{u - L_f{}^{(n)} \phi}{L_g L_f{}^{(n-1)} \phi} \qquad (13)$$

اساس طراحی کنترلر غیرخطی چند متغییره در این مقاله بدین صورت است که با تعمیم قانون کنترل غیر خطی یک متغییره (10) به سیستم غیر خطی چند متغییره، با تعریف معادله مشخصه ماتریسی، مقدار ورودی ماتریسی برای سیستم غیر خطی چند متغییره قابل محاسبه خواهد بود.

5-روابط سیستمهای کنترل غیر خطی چند متغییره

در یک سیستم غیر خطی آتونوموس (9) که n تا دفیومورفیزم وجود داشته باشد.

$$\begin{cases} z_1 = \phi_1(x) \\ \dot{z}_1 = L_f \phi_1 \\ . \\ . \\ z_1{}^{(r1-1)} = L_f{}^{(r1-1)} \phi_1 \\ z_1{}^{(n)} = L_f{}^{(r1)} \phi_1 + L_g L_f{}^{(r1-1)} \phi_1 . u \end{cases} \qquad (14)$$

$$\begin{cases} z_n = \phi_n(x) \\ \dot{z}_n = L_f \phi_n \\ . \\ . \\ z_n{}^{(rn-1)} = L_f{}^{(rn-1)} \phi_n \\ z_n{}^{(n)} = L_f{}^{(rn)} \phi_n + L_g L_f{}^{(rn-1)} \phi_n . u \end{cases}$$

با تعمیم قوانین کنترلی برای هر کدام از متغییرهای حالت بشکل (15)

$$\begin{cases} v_1 = z_{d1}{}^{(r1)} - k_{11} . e_1{}^{(r1-1)} - ... - K_{n-1,1} . e_1 \\ v_2 = z_{d2}{}^{(r2)} - k_{12} . e_2{}^{(r2-1)} - ... - K_{n-1,2} . e_2 \\ \\ v_n = z_{dn}{}^{(rn)} - k_{1n} . e_n{}^{(rn-1)} - ... - K_{n-1.n} . e_n \end{cases} \qquad (15)$$

و با فرض اینکه $Z_d = \begin{bmatrix} z_{d1} \\ z_{d2} \\ \\ z_{dn} \end{bmatrix}$ مقدار مطلوب z و

$E = \begin{bmatrix} z_1 - z_{d1} \\ z_2 - z_{d2} \\ \\ z_n - z_{dn} \end{bmatrix}$ ماتریس خطا باشد، با تعمیم معادله مشخصه سیستم غیر خطی یک متغییره (12) بشکل معادله مشخصه ماتریسی(16)، ورودی ماتریسی سیستم غیرخطی چند متغییره بصورت (17) بدست خواهد آمد.

$$\Delta_{nonlinear}(s) = E^{(n)} + k_1 . E^{(n-1)} + ... + K_{n-1} . E = 0 \qquad (16)$$

$$u = Z_d{}^{(n)} - k_1 . E^{(n-1)} - ... - K_{n-1} . e \qquad (17)$$
$$U = [L_g L_f{}^{(n-1)} \phi]^{-1} [u - L_f{}^{(n)} \phi]$$

---

[2] -Smooth
[3] -Input State Linearization
[4] -diffeomorphism
[5] -Input State Linearizable

6- کنترل غلظت و حجم یک محلول مرکب با وجود سه مخزن مجزا

در بخش قبل نحوه طراحی کنترلر غیر خطی برای سیستم چند ورودی و چند خروجی نشان داده شده است. در این بخش به چگونگی طراحی سیستم کنترل غلظت و حجم یک محلول مرکب پرداخته می شود. در این سیستم مطابق با رابطه (8) مقدار n=1 است، لذا معادله $\dot{v},\dot{c}$ بشکل درجه اول از v,c خواهد بود. بنابراین معادله مشخصه ماتریسی (16) و قانون کنترلی (17) برای سیستم کنترل غلظت و حجم مورد بحث بشکل زیر بدست می آید.

$$\Delta_{nonlinear}(s) = \dot{E} + k_1.E = 0 \qquad (18)$$

$$u = \dot{Z} = \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \dot{Z}_d - k_1.E \qquad (19)$$

با توجه به اینکه متغییر های حالت سیستم کنترل غلظت و حجم $Z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ c \end{bmatrix}$ و مقادیر مطلوب این متغییرها $Z_d = \begin{bmatrix} z_{d1} \\ z_{d2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_d \\ c_d \end{bmatrix}$ می باشد، لذا قانون کنترلی سیستم کنترل غلظت و حجم یک محلول مرکب بشکل رابطه (20) خواهد بود.

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{v}_d \\ \dot{c}_d \end{bmatrix} - k_1 \begin{bmatrix} v_d - v \\ c_d - c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2c.a\sqrt{v} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2a_1\sqrt{v_1} & 2a_2\sqrt{v_2} \\ (\frac{c_1 - c}{v})2a_1\sqrt{v_1} & (\frac{c_2 - c}{v})2a_2\sqrt{v_2} \end{bmatrix} u \qquad (20)$$

بنابراین ورودی ماتریسی برای سیستم کنترل غلظت و حجم بشکل (21) بدست می آید.

$$u = \begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a_1\sqrt{v_1} & 2a_2\sqrt{v_2} \\ (\frac{c_1 - c}{v})2a_1\sqrt{v_1} & (\frac{c_2 - c}{v})2a_2\sqrt{v_2} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \dot{v}_d - k_{11}.v_d + k_{11}.v - k_{12}.c_d + k_{12}.c + 2a\sqrt{v} \\ \dot{c}_d - k_{21}.v_d + k_{21}.v - k_{22}.c_d + k_{22}.c \end{bmatrix} \qquad (21)$$

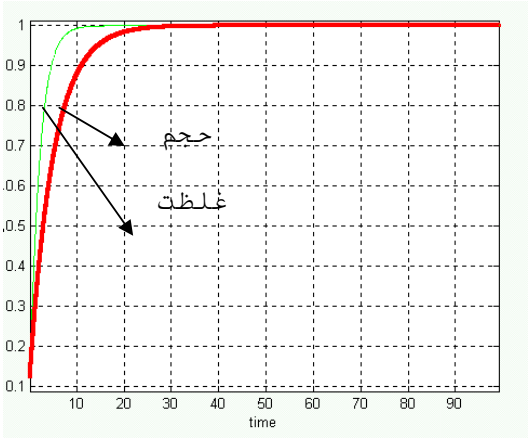
7-نتایج شبیه سازی

در این بخش با تعریف شرایط مختلف مسئله کنترل حجم و غلظت یک محلول دو عنصره نتایج شبیه سازی در این شرایط نمایش داده شده است.

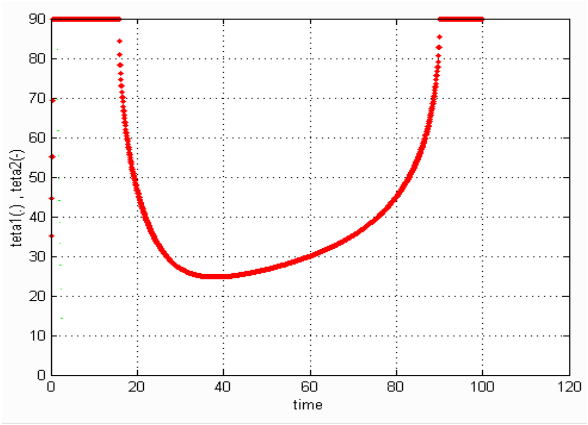
- حالت اول

در این قسمت فرض کنید قبل از انجام عملیات، حجم مخزن اول $1m^3$ و غلظت آن $1\ kg/m^3$ و حجم مخزن دوم $1m^3$ و غلظت آن $0.5\ kg/m^3$ باشد . علاوه بر آن مقادیر a ، a_1 و a_2 بترتیب0.001 , 0.01 , 0.02 باشد. هدف این است که با شروع به کار سیستم کنترل، غلظت محلول مرکب با ثابت زمانی 2 ثانیه به غلظت $1\ kg/m^3$ و حجم محلول مرکب با ثابت زمانی 5 ثانیه به مقدار $1\ m^3$ برسد .

شکل(3) تغییرات غلظت و حجم محلول مرکب را نشان می دهد. در این شکل ملاحظه می کنید که هر کدام از پارامترهای خروجی، بر اساس شرایط تعریف شده به مقدار مورد نظر رسیده اند.

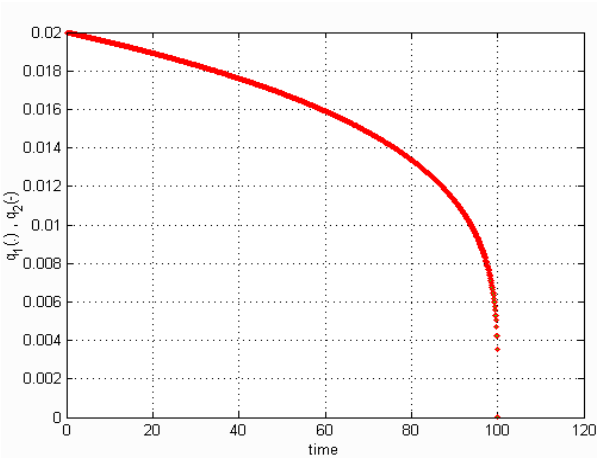


شکل 3: نمودار تغییرات حجم و غلظت محلول ترکیبی



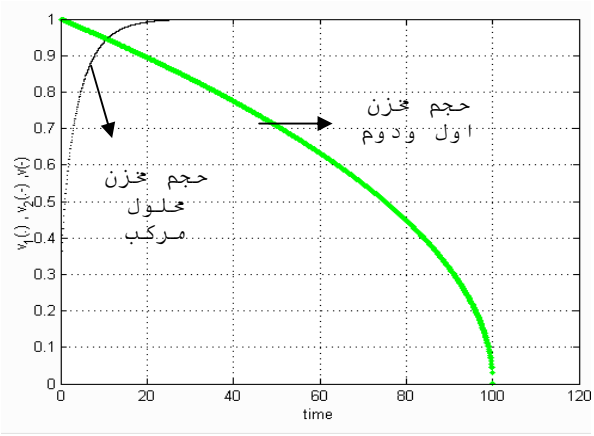
شکل 4: نمودار تغییرات زوایای باز شدن شیرهای مکانیکی

شکل (4) تغییرات زاویه ای چرخش شیر مکانیکی جهت ایجاد دبی های q_1 و q_2 را نشان می دهد. در شکل(5) نیز دبی هر کدام از مخازن1 و 2 نشان داده شده است. از آنجا که مقدار حجم اولیه دو مخزن یکسان است و زاویه باز شدن دو شیر یکی می باشد، انتظار می رفت که دبی مخازن یکسان باشد که در این شکل چنین نتیجه ای را نشان می دهد.



شکل 5: تغییرات دبی عبوری از مخازن اول و دوم

در شکل(6) تغییرات حجم مخزن محلول مرکب نسبت به مخازن 1و 2 نمایش داده شده است. علاوه بر آن در این شکل ملاحظه می کنید که مخزن با ثابت زمانی مورد نظر به مقدار نهایی خود رسیده است.

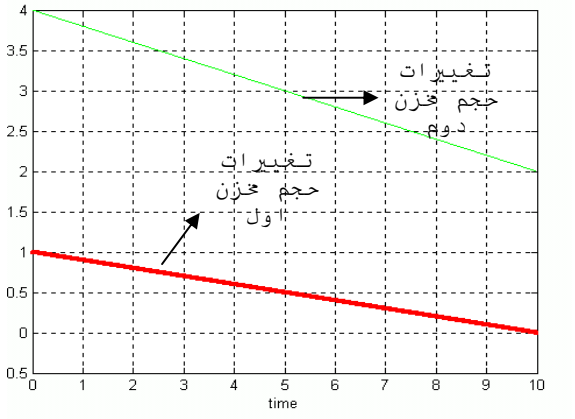


شکل 6 : تغییرات متغییر حالت v_1 , v_2 , v

-حالت دوم

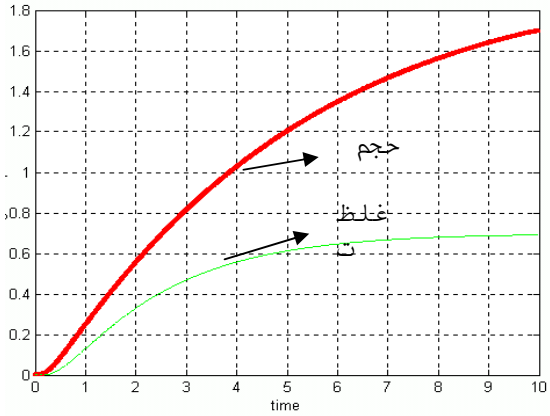
در این حالت فرض کنید قبل از انجام عملیات حجم مخزن اول $1m^3$ و غلظت آن $1\ kg/m^3$ و حجم مخزن دوم $4m^3$ و غلظت آن $0.5\ kg/m^3$ باشد . هدف این است که با شروع به کار سیستم کنترل ، غلظت محلول مرکب با ثابت زمانی 5 ثانیه به غلظت $0.7\ kg/m^3$ و حجم محلول مرکب با ثابت زمانی 2 ثانیه به مقدار $2\ m^3$ برسد.

شکل(7) تغییرات حجم مخازن اول و دوم را نشان می دهد.



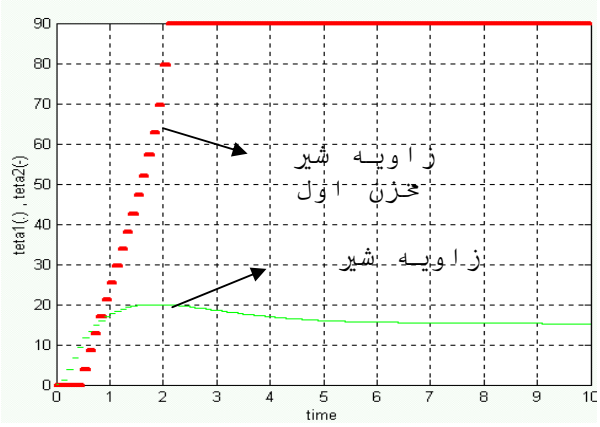
شکل7: نمودار تغییرات حجم مخزن 1 ومخزن 2

شکل (8)تغییرات غلظت و حجم محلول مرکب را نشان می دهد. در این شکل ملاحظه می کنید که هر کدام از پارامترهای خروجی، بر اساس شرایط تعریف شده به مقدار مورد نظر رسیده اند.

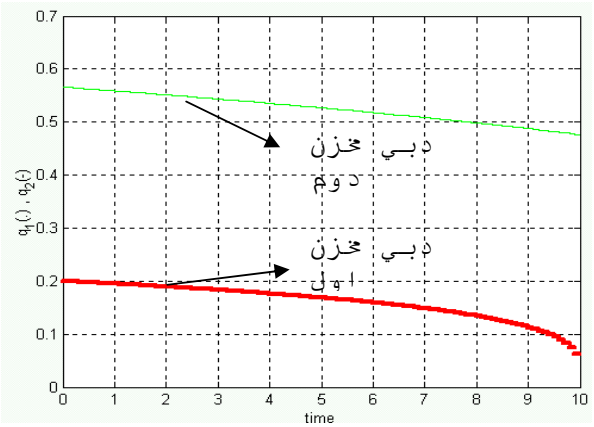


شکل8: نمودار تغییرات حجم و غلظت محلول ترکیبی

شکل (9) تغییرات زاویه ای چرخش شیر مکانیکی جهت ایجاد دبی های q_1 و q_2 را نشان می دهد. علاوه بر آن شکل(10) دبی هر کدام از مخازن 1و 2 را نشان می دهد. بدلیل حجم کم مخزن اول، شیر این مخزن جهت ارضای شرایط مورد نیاز، به طور کامل باز شده است وحداکثر دبی را دارد.

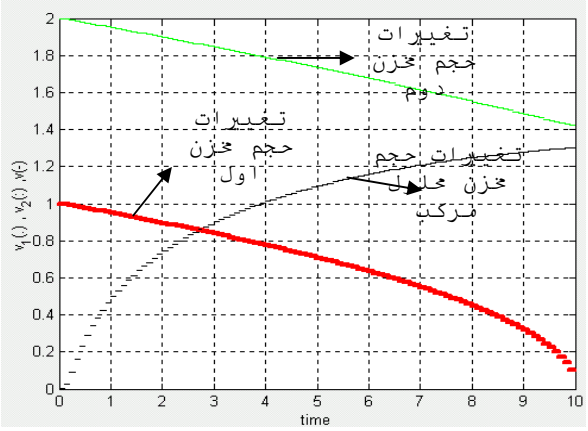


شکل9 : نمودار تغییرات زوایای θ_1, θ_2



شکل10 : نمودار تغییرات متغییر حالت q_1 , q_2

شکل(11) تغییرات حجم مخزن محلول مرکب نسبت به مخازن 1 و 2 را نشان می دهد. علاوه بر آن در این شکل ملاحظه می کنید که مخزن با ثابت زمانی مورد نظر به مقدار نهایی خود رسیده است.



شکل 11 : نمودار تغییرات متغییر حالت v_1 , v_2 , v

8-نتیجه گیری

آنچه که در صنایع متعدد برای کنترل یک سیستم غیر خطی چند متغییره مرسوم است، طراحی کنترلر خطی برای مدل خطی سیستم غیر خطی است. بنابراین بازه کاری این سیستمها در حدود ناحیه خطی سازی می باشد. برای رفع این مشکل در این مقاله با استفاده از راه حل پیشنهادی یک کنترلر غیر خطی چند متغییره طراحی شد. با پیاده سازی این راه حل بر روی یک مجموعه کنترل غلظت و حجم با سه مخزن مجزا که پارامترهای آنها به یکدیگر وابسته بودند، نشان داده شده که این سیستم بخوبی از رفتار مورد انتظار تبعیت کرده است.

9-مراجع:

[1]- دکتر علی خاکی صدیق، " اصول کنترل مدرن"، انتشارات دانشگاه تهران.

[2]- مهندس حجت سبزپوشان، " اصول و اجزا کنترل صنعتی"، انتشارات دانشگاه علم و صنعت ، 1379.

[3]- دکتر ناصر پریز، " جزوه درسی کنترل صنعتی"، انتشارات دانشگاه مشهد ، 1376.

[4]- دکتر ناصر پریز، سید مصطفی قدمی، سید علی علیایی، "کنترل غلظت نمک در یک مخزن"، پایان نامه کارشناسی، دانشگاه فردوسی مشهد.

[5]-Jean-jacques E.slotine, Weiping Li, "Applied Nonlinera Control",1991.