بررسی الگوریتم MUSIC و MVDR

سید محمد علی محمدی: **Email: S-m-ali- mohammadi@yahoo.com**

چکیده:

از جمله الگوریتم های بسیار مهم ونیز کاربرد در بسیاری از مباحث بخصوص در مخابرات سیار و موبایل، الگوریتم MUSIC می باشد. در محیطی که اطلاعاتی از زوایای مربوط به کاربران هم فرکانس نداریم می توانیم با این الگوریتم برای استخراج سیگنالهای مربوطه شان اقدام کرده و بعد از آنکه اطلاعاتی از موقعیت زاویه ای کاربران بدست آوریم،از شکل دهنده آن از نوع MVDR استفاده می کنیم.

کلمات کلیدی: MUSIC، MVDR، ماتریس همبستگی، نماد

۱- مقدمه

روشهای زیر فضا بر دو ویژگی ماتریس همبستگی داده ها، R_x، استوارند: اول آنکه، فضای گسترده شده توسط بردارهای ویژه R_x که به دو زیر فضای سیگنال و نویز تقسیم می شوند. دوم آنکه، زیر فضای نویز بر بردارهای جهت نمای a_i (یعنی ستونهای ماتریس $A(\theta)$) عمود است. با بکاربردن بیان برداری، می توان خروجی آرایه را بفرم ماتریسی و بصورت رابطه (۳-۱) درآورد:

$$x(t) = As(t) + n(t) \quad (۱)$$

که در آن A، یک ماتریس $N \times L$ و :

$$x(t) = [x_1(t), x_2(t), ..., x_N(t)]^T \quad (۲)$$

$$s(t) = [s_1(t), s_2(t), ...s_L(t)]^T \quad (۳)$$

و با فرض آنکه مؤلفه های نویز $\{n_i, i = 1, ..., N\}$ که از سنسورهای مختلف دریافت شده اند، از نظر آماری مستقل و سفید بوده با واریانس δ_n^2 باشند درآنصورت ماتریس همبستگی داده، R_x، به صورت زیر در می آید:

$$R_x = E\{x(t)x^H(t)\} = ASA^H + \delta_n^2 I = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e_i e_i^H = Q\Lambda Q^H \quad (۴)$$

که در آن $S = E\{ss^H\}$، عبارتست از ماتریس کوواریانس سیگنال و I بیان کننده ماتریس واحد می باشد. ماتریس Λ قطری بوده و عناصر قطر آن شامل مقادیر ویژه R_x و ستونهای ماتریس Q از بردارهای ویژه ماتریس R_x تشکیل یافته است. با فرض آنکه مقادیر ویژه بر روی قطر Λ از بزرگ به کوچک مرتب شده باشند یعنی:

$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_L \geq \lambda_{L+1} = ... = \lambda_N$ که در اینصورت خواهیم داشت:

$$\Lambda = diag[\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_L, ...\lambda_N] = diag[\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_L, \delta_n^2, \delta_n^2, ...\delta_n^2]$$
$$Q = [q_1, q_2, ...q_L, q_{L+1}, ...q_N] \qquad (۵)$$

برای $i > L$ می توانیم بنویسیم $R_x q_i = \delta_n^2 q_i$ از طرف دیگر $R_x q_i = (ASA^H + \delta_n^2 I) q_i$ که از دو طرف رابطهٔ اخیر نتیجه می شود که $ASA^H q_i = 0$ و این معادل است با:

$$A^H q_i = 0 \leftrightarrow q_i^H a(\theta_k) = 0 \qquad i = L+1, L+2, ..., N; = 1, 2, ...L \qquad (۶)$$

رابطه (۶) به فرض صحت ناهمبسته بودن منابع سیگنال نتیجه گیری شده است. رابطه $q_i^H a(\theta_k) = 0$ اشعار می دارد که بردارهای ویژه $a(\theta_k), k = 1, 2, ..., L$ عمودند. از همین جا نتیجه می شود که بردارهای ویژه R_x شامل $\{q_1, q_2, ..., q_L\}$ زیر فضای سیگنال را می گسترند و بنابراین بردارهای جهت نمای $a(\theta_k)$ در این فضا قرار دارند.

بنابراین اگر زاویه θ یکی از جهت های ورود باشد خواهیم داشت:

$$\sum_{i=L+1}^{N} \left| q_i^H a(\theta) \right|^2 = 0$$

و در نتیجه عبارت $P_{MUSIC} = \dfrac{1}{\sum_{i=L+1}^{N} \left| q_i^H a(\theta) \right|^2}$ یک قله به وجود می آورد. این روش بنام MUSIC نامیده می شود. برای صحت عملکرد روش MUSIC، باید شرایط زیر برقرار باشد:

- $N \geq L+1$ تا (زیر فضاهای سیگنال و نویز تفکیک شوند).

- منابع سیگنال همبسته نباشند تا ماتریس S ناویژه و دارای مرتبه کامل L باشد. اگر S ویژه باشد مقادیر ویژه سیگنال به مقادیر ویژه نویز نفوذ کرده و تفکیک زیر فضاها دشوار میشود.

- طول داده های x(t) یعنی M بزرگ باشد تا تقریب $R_x = \dfrac{1}{M} \sum_{k=1}^{M} x(k) x^H(K)$ دقیق باشد.

- SNR بزرگ باشد تا مقادیر ویژه نیز فضای نویز یعنی λ_i ، $L+1 \leq i \leq N$ از مقادیر ویژه زیرفضای سیگنال یعنی λ_i ، $1 \leq i \leq L$ ، قابل تفکیک باشند.

۲: صفر کردن وفقی با توجه به اطلاعات زاویه ای کاربران

در بخش قبل روشی را برای تخمین AOA مربوط به L سیگنال، بیان کرده ایم. حال می خواهیم با توجه به اطلاعات زاویه ای که از کاربران داریم، به صفر کردن منابع تداخلی پرداخته و وزنهای بهینه ای را برای آنتن رشته ای، برای این منظور بدست آوریم.

شکل سیگنال مربوط به N عنصر آنتن رشته ای و همچنین وزنهای مربوطه را می توان به ترتیب بصورت برداری و به فرم زیر بیان کرد:

$$x = [x_1, x_2, ..., x_N]^T$$
$$w = [w_1, w_2, ..., w_N]^T \quad (۷)$$

برای خروجی آنتن رشته ای داریم:

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} w_i x_i = w^H x(t) \quad (۸)$$

برای حصول به وزنهای بهینه، از روند هدایت نماد، بهره می گیریم به این صورت که بهینه سازی وزنها را به گونه ای انجام می دهیم که خروجی آرایه در حالت کلی مینیمم شده مگر برای سیگنالهای مورد نظر و مطلوب که با گین مخصوصی تقویت و عبور داده شوند. چنین روندی را می توان بصورت زیر بیان کرد:

$w^H a = r$: تابعی از $w^H R_x w$: مینیمم. (۹)

که r ثابت بوده و a معرف بردار هدایت در جهت دید (جهت مطلوب و مورد نظر) می باشد.

با استفاده از روش لاگرانژ برای حل معادلهٔ (۹) به رابطهٔ زیر می رسیم:

$$w_{opt} = r \frac{R_x^{-1} a}{a^H R_x^{-1} a} \quad (۱۰)$$

لازم به ذکر است برای حالتی که r=1 باشد در آنصورت چنین شکل دهنده نمادی را MVDR می نامیم.

مطالعات عددی بیشتر، نشان می دهد که برای تفکیک زاویه ای تا 1°، یک تعداد زیادی عناصر مورد نیاز می باشند تا آنکه عمل حذف تداخلهای هم کانال به خوبی صورت گیرد.

۳- نتایج شبیه سازی MUSIC، MVDR

در این قسمت به بررسی الگوریتم MUSIC از طریق نتایج شبیه سازی می پردازیم. آنتن رشته ای را با N عنصر (متغیر) و به صورت ULA و در محیطی با ۳ منبع سیگنال ناهمبسته در زوایای $8^\circ, 5^\circ, 2^\circ$ قرار گرفته است در نظر می گیریم. نسبت سیگنال به تداخل (SNR) را برابر ۲۰ دسی بل در نظر می گیریم. شکل (۱) نمایش لگاریتمی طیف توان مربوط به الگوریتم MUSIC و برای مدل آورده شده با N=8 عنصر را نشان می دهد.

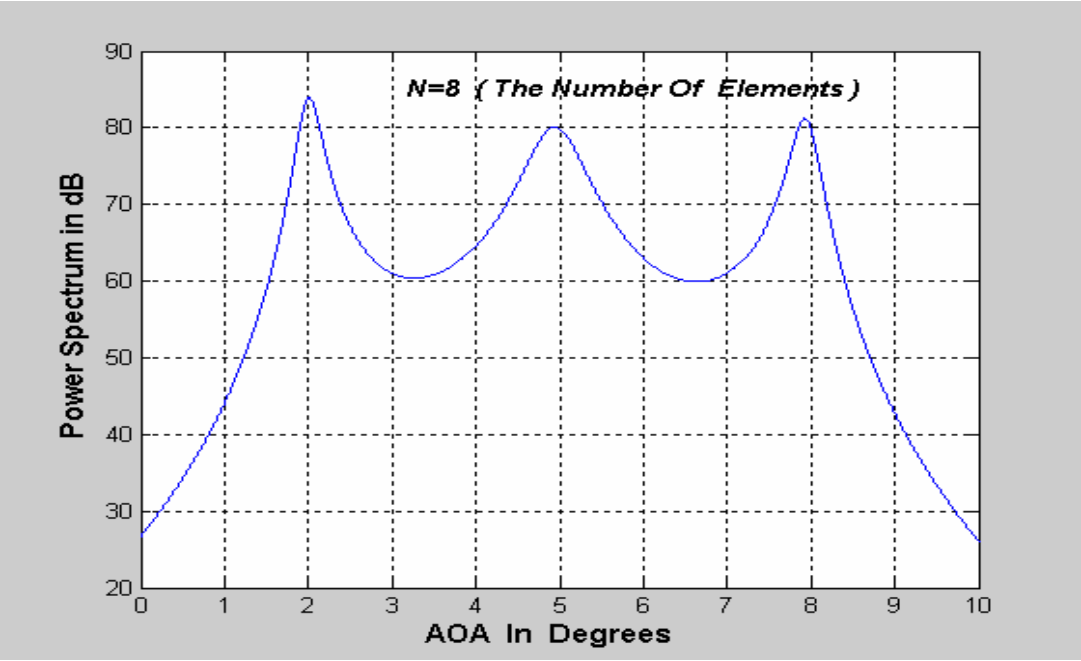
مشاهده میکنیم که الگوریتم MUSIC برای حالت با N=20 عنصر، مطلوب تر عمل می کند.

الگوریتم MUSIC برای استخراج سیگنالهایی بسیار نزدیک به یکدیگر وحتی در محیطی با SNR کم می تواند به خوبی عمل کند. این پدیده را می توان در شکل زیر که دو سیگنال هم کانال، یکی در زاویه 2^0 و دیگری در زاویه 2.8^0 قرار دارند، مشاهده کرد. تعداد عناصر آرایه برابر با N=8 در نظر گرفته شده است.

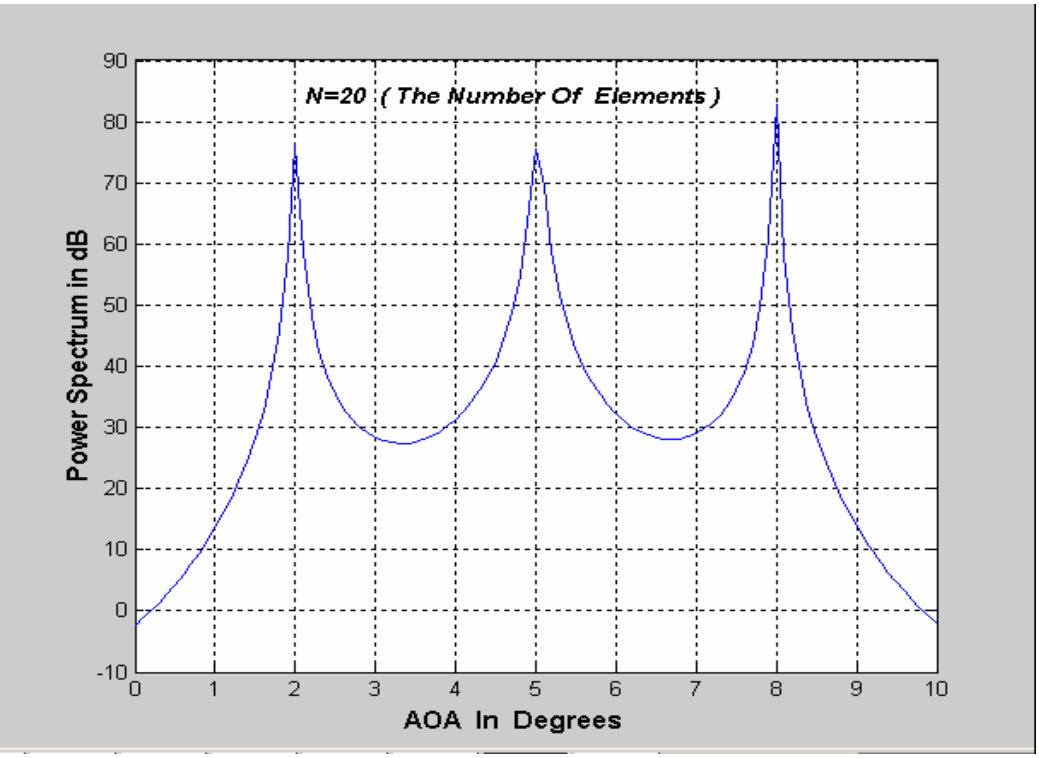
شبیه سازیهای بیشتر نشان می دهد که برای استخراج سیگنالهایی که در یک فاصله زاویه ای 1^0 یا کمتر قرار دارند. تعداد بیشتری از عناصر آرایه مورد نیاز بوده زیرا همچنان که سیگنالها در نزدیکی یکدیگر قرار می گیرند، ماتریس همبستگی به یک ماترس منفرد (singular)، نزدیکتر می شود، پس از آنکه از الگوریتم MUSIC برای تعیین جهت منابع استفاده کرده ایم، یک شکل دهندهٔ نماد از نوع MVDR طراحی و شبیه

سازی می کنیم که از اطلاعات زوایای کاربران استفاده کرده و بردار وزنی را تنظیم می کند که میانگین توان خروجی آرایه، به صورت شکل زیر ترسیم می شود،

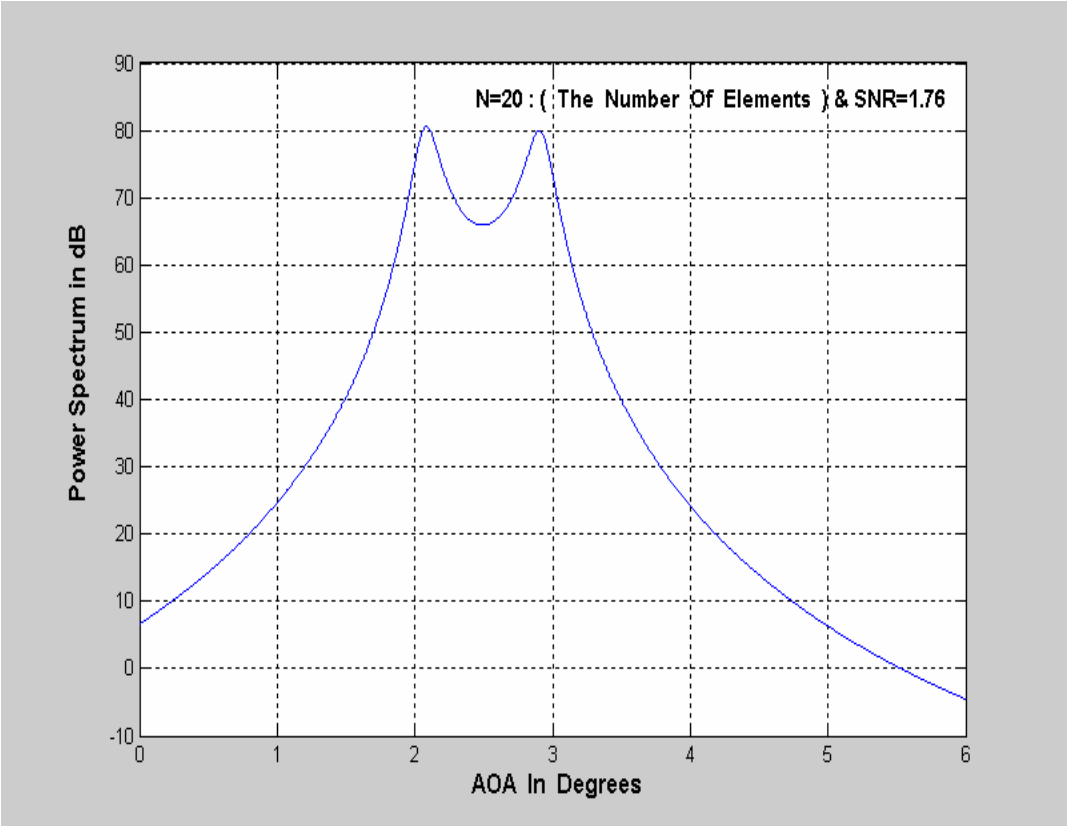
مشاهده می کنیم که عملکرد سیستم به ازای N=4، نامطلوب بوده در حالی که به ازای N=32 بهترین عملکرد مربوط به سیستم را خواهیم داشت.



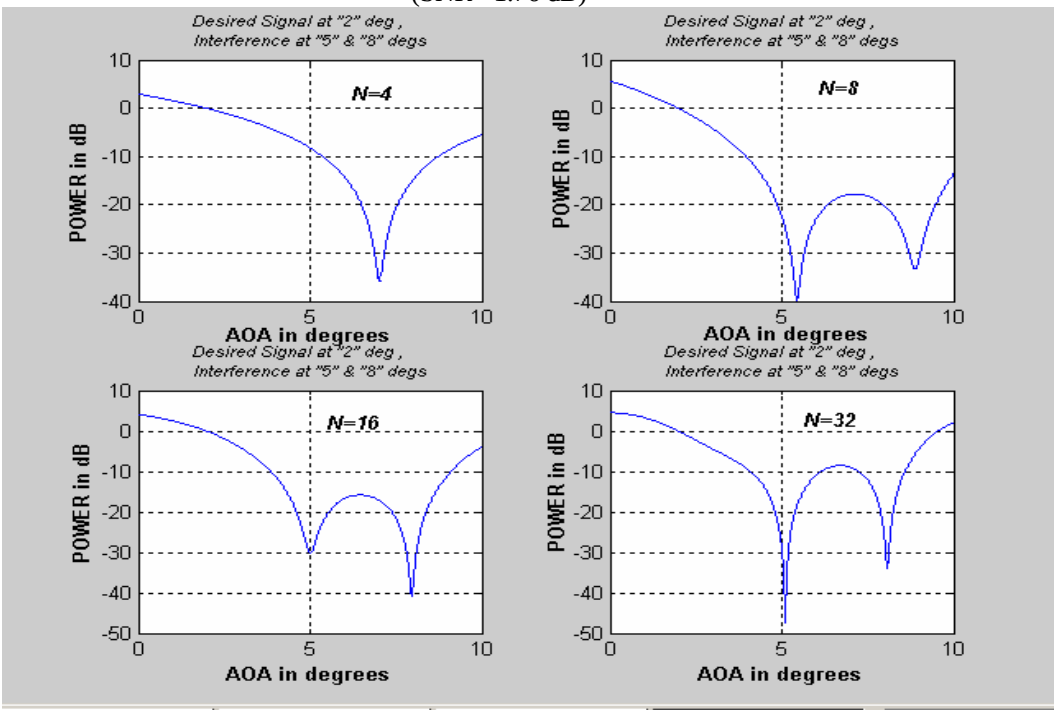
شکل ۱ طیف توان الگوریتم MUSIC به ازای تعداد عناصر ۸ (SNR= 20 dB)



شکل ۲ طیف توان الگوریتم MUSIC به ازای تعداد عناصر ۲۰ (SNR= 20 dB)



شکل ۳- بررسی قابلیت تفکیک الگوریتم MUSIC در استخراج سیگنالهای هم کانال نزدیک به یکدیگر (SNR= 1.76 dB)



شکل ۴- بیان الگوریتم MVDR در قالب توان خروجی آرایه (برحسب دسی بل)