



بررسی سیستم کنترل پرواز موشک

امیرحسین امینی

ناصر پریز

کارشناس ارشد برق دانشگاه فردوسی مشهد

استادیار دانشکده برق دانشگاه فردوسی مشهد

am_am33@stu.um.ac.ir

n-pariz@ferdowsi.um.ac.ir

چکیده: در این مقاله به بررسی یکی از روش های متداول برای بهبود پایداری در سیستم کنترل پرواز موشک که همان طراحی کنترل کننده های مطلوب برای کانال های چرخ (roll)، اوج-ارتفاع (pitch)، سمت (yaw) می باشد پرداخته شده است. که برای این منظور ابتدا باید مدل دینامیکی موشک را برای هر کانال بطور مجزا بدست آورد. مساله قابل توجه در این مقاله در طراحی کنترل کننده برای سیستم کنترل پرواز موشک آن است که با توجه به دو مرحله ای بودن موشک و علاوه بر این وابستگی مدل دینامیکی موشک به سرعت، وزن و دیگر پارامترهای موشک که در طول پرواز تغییر می کنند مدل دینامیکی موشک در طول پرواز ثابت باقی نمی ماند. بنابراین طراحی سیستم کنترل پرواز باید به گونه ای انجام شود که نخست پایداری حرکت موشک در طول پرواز حفظ شود و دوم سیستم کنترل پرواز بهترین کارایی خود را در حالت ماندگار موشک که بیشترین زمان پرواز را بخود اختصاص می دهد، داشته باشد. و در آخر نتایج حاصل از شبیه سازی مدل خطی شده موشک را با نتایج حاصل از شبیه سازی غیرخطی مقایسه می کنیم.

کلمات کلیدی: اتوپایلوت، زاویه فراز، زاویه سمت، زاویه چرخش

۱- مقدمه

تقریباً در تمامی موشکها سیستم هدایت و کنترل به دو بخش مجزا تقسیم می شود. بخش اول که حلقه داخلی را تشکیل می دهد سیستم کنترل پرواز نامیده می شود و وظیفه پایدار سازی حرکت موشک و کنترل آن را بر عهده دارد. بخش دوم سیستم هدایت موشک است که حلقه خارجی را تشکیل می دهد این بخش در هر لحظه با توجه به موقعیت موشک و هدف فرمانهای هدایتی لازم را به سیستم کنترل پرواز اعمال می کند. می دانیم که سیستم هدایت موشک، شتاب جانبی، جهت بردار سرعت و یا جهت گیری موشک را به گونه ای تعیین می کند که موشک به نحو مناسبی هدف را دنبال کند و سیستم کنترل پرواز با تغییر زاویه نیروی پیشران یا زاویه بالکها و یا با روشهای مختلف دیگری فرمانهای سیستم هدایت را دنبال می کند در موشک مورد مطالعه، فرمانهای هدایتی شامل ارتفاع موشک زاویه فراز و سمت موشک است و سیستم کنترل پرواز حرکت موشک را در سه کانال زاویه چرخ، زاویه سمت و زاویه اوج-ارتفاع کنترل می کند.

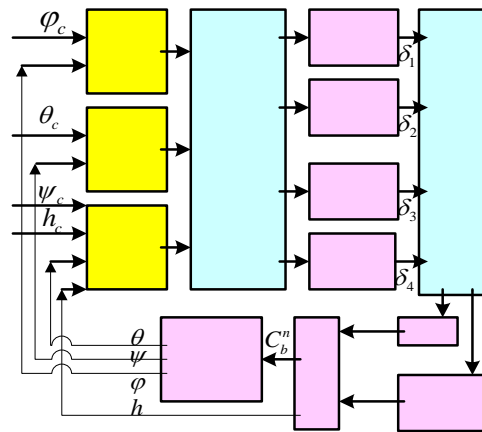
با توجه به مدل دینامیکی استخراج شده اگر موشک حول محور طولی خود متقارن باشد حرکت موشک در کانالهای سمت اوج تأثیری بر حرکت در کانال چرخ ندارند. بنابراین دینامیک کانال چرخ کاملاً از دینامیک دو کانال دیگر مستقل است.

علاوه بر این در صورتیکه حرکت موشک در کانال چرخ به حالت ماندگار خود رسیده باشد، حرکت موشک در دو کانال سمت و اوج-ارتفاع نیز از یکدیگر و از حرکت در کانال چرخ مستقل می شود. از آنجا که معمولاً دینامیک موشک در کانال چرخ بسیار سریعتر از دینامیک موشک در کانالهای دیگر است، حرکت موشک در کانال چرخ خیلی زود به حالت ماندگار خود می رسد.

بنابراین حرکت موشک در کانالهای سمت و اوج-ارتفاع را نیز می توان مستقل از هم فرض کرد. با توجه به مطالب گفته شده در سیستم کنترل پرواز برای کنترل حرکت در هر یک از کانالهای چرخ، سمت، اوج-ارتفاع از یک کنترل کننده مستقل استفاده می شود. بنابراین به همین منظور در پیوست مدل دینامیکی خطی شده حرکت در هر یک از سه کانال یاد شده بطور جداگانه بدست آمده است. در

شکل (۱-۱) نمودار جعبه ای سیستم کنترل پرواز را نمایش می دهد، همانگونه که در شکل (۱-۱) مشاهده می شود. سیستم کنترل پرواز زوایای چرخ، سمت و فراز(اوج) موشک را با استفاده از ماتریس دوران که در سیستم ناوبری اینرسی بدست می آید محاسبه می کند و ارتفاع موشک را نیز مستقیماً از خروجی سیستم ناوبری اینرسی دریافت می کند. خروجی سیستم کنترل پرواز در کانالهای چرخ، سمت و کانال زاویه اوج-ارتفاع به ترتیب زوایای شهره، بالابر و سکان هستند که

با تلفیق آنها مقادیر مطلوب چهار بالک موشک بدست می آید. در این پروژه سیستم کنترل پرواز موشک را در هر یک از کانالهای چرخ سمت و اوج-ارتفاع بطور جداگانه بررسی می کنیم و برای بررسی صحت مدل دینامیکی استخراج شده در پیوست نتایج حاصل از شبیه سازی مدل خطی شده موشک را با نتایج حاصل از شبیه سازی غیرخطی مقایسه می کنیم.



Autopilot of Roll

Autopilot of Yaw

Calculation of Wing Angle's of Missile

شکل (۱-۱): نمودار جعبه‌ای سیستم کنترل پرواز موشک مورد مطالعه

۲- سیستم کنترل پرواز در کانال چرخ

مدل دینامیک Pitch در کانال چرخ در بخش (ب-۳) از پیوست بدست آمده است همانگونه که در رابطه (ب-۷) مشاهده می‌شود با فرض تقارن موشک زاویه چرخ توسط زاویه شهیره بالکها کنترل می‌شود. جدول (۱-۱) مقادیر قطبها و بهره تابع تبدیل زاویه بالک شهیره به زاویه چرخ موشک را در فواصل زمانی مختلف از زمان شلیک که از برنامه شبیه سازی استخراج شده‌است نمایش می‌دهد. دینامیک کانال چرخ دارای دو قطب در صفر و سمت چپ محور موهومی است همانطور که در جدول (۱-۱) مشاهده می‌شود هم بهره و هم قطب غیر صفر سیستم حلقه بسته با زمان تغییر می‌کند. اما از ثانیه پنجم شلیک به بعد مدل دینامیکی تقریباً ثابت باقی می‌ماند. برای کنترل حرکت موشک در کانال چرخ از یک کنترل کننده عددی PID با ضرایب ثابت استفاده شده است. جدول (۲-۱) ضرایب PID Euler Angle's کننده را نمایش می‌دهد.

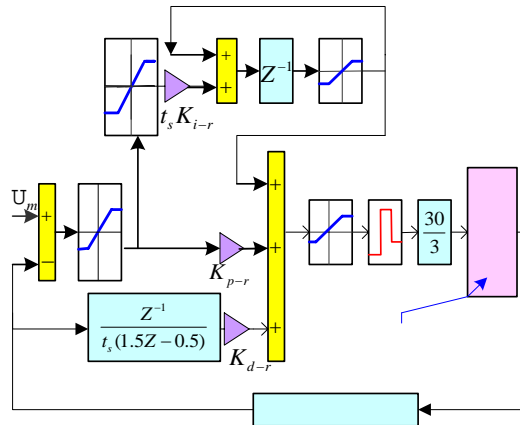
جدول (۱-۱): پارامترهای تابع تبدیل زاویه شهیره به زاویه چرخ در فواصل زمانی مختلف از زمانی شلیک

زمان (ثانیه)	سرعت (متر بر ثانیه)	ضریب	قطبها (رادیان بر ثانیه)
0.8	98.76	-11.00	0.0 , -7.844
2.6	238.7	-76.86	0.0,-21.10
5.6	265.1	-299.6	0.0,-24.74
13.2	275.1	-327.6	0.0,-25.81
21	280.6	-344.1	0.0,-26.43
30.5	283.9	-354.6	0.0,-26.83
51.6	286.5	-363.9	0.0,-27.22

پریود نمونه برداری کنترل کننده برابر ۰/۱ ثانیه انتخاب شده است. افزایش پریود نمونه برداری به بیش از ۰/۰۲ ثانیه باعث ناپایداری کنترل کننده می‌شود. شکل (۲-۱) نمودار جعبه‌ای کنترل کننده کانال چرخ را نمایش می‌دهد. همانگونه که در شکل (۲-۱) مشاهده می‌شود برای محاسبه سرعت زاویه‌ای از روی زاویه، برای حذف اثر نویز اندازه گیری از یک فیلتر پایین گذر استفاده شده است. همچنین برای جلوگیری از اشباع انتگرالگیر در اثر اشباع محرک بالکها با استفاده از یک عنصر محدود کننده خروجی انتگرالگیر محدود شده است.

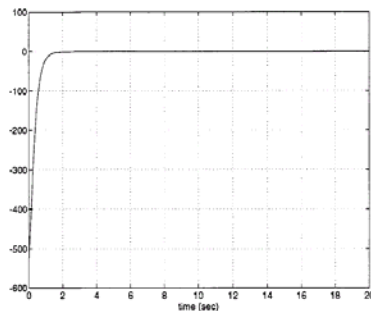
جدول (۲-۱): جدول ضرایب کنترل PID کانالهای مختلف

	ضریب مشتقگیر	ضریب انتگرالگیر	ضریب تناسبی
کانال چرخ	$k_{d-r} = -0.06$	$k_{i-r} = -0.25$	$k_{p-r} = -0.4$
کانال سمت	$k_{d-y} = 0.5$	$k_{i-y} = 0.5$	$k_{p-y} = 1.0$
کانال فراز	$k_{d-p} = -0.5$	$k_{i-p} = 0.0$	$k_{p-p} = -1.0$

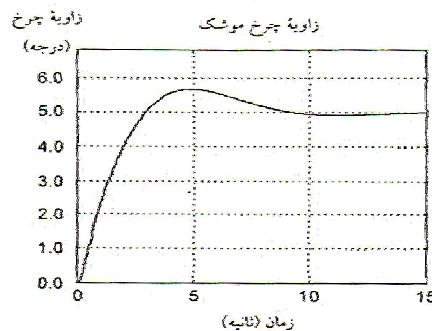


شکل (۳-۱): نمودار جعبه‌ای کنترل کننده کانال چرخ

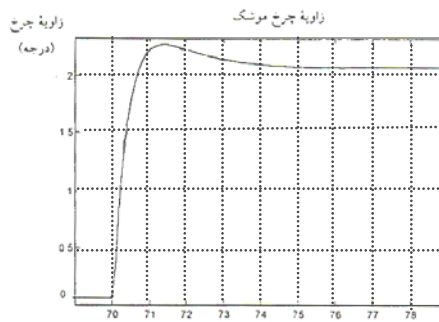
شکل (۳-۱) پاسخ پله زاویه چرخ را به ازای دینامیک سیستم در ثانیه‌های ۵۰ و ۰/۸ بعد از شلیک نشان می‌دهد. همان گونه که در شکل (۳-۱) مشاهده می‌شود کنترل کننده کانال چرخ در تمام طول پرواز پایدار است اما در لحظات اولیه پرواز دینامیک نسبتاً کندتری دارد. برای بررسی مدل دینامیکی بدست آمده برای کانال چرخ در شبیه سازی غیرخطی نیز یک ورودی پله به زاویه چرخ اعمال شده است شکل (۴-۱) پاسخ سیستم غیرخطی را به ورودی پله زاویه چرخ نمایش می‌دهد. همانگونه که مشاهده می‌شود زمان نشست پاسخ زاویه چرخ در شبیه سازهای مدل خطی شده و مدل غیرخطی در حالت ماندگار موشک تقریباً ۰/۶ ثانیه است و نتایج شبیه سازیها تا حد زیادی مشابه هستند. بنابراین مدل بدست آمده رفتار موشک را در کانال چرخ بخوبی مدل می‌کند. پهنای باند موشک در کانال چرخ در حالت نهایی تقریباً ۱/۳ هرترتاست.



شکل (۳-۱) الف: پاسخ کانال چرخ به ورودی $5/0 \cdot u(t)$ درجه با مدل دینامیکی ثانیه ۵۰



شکل (۳-۱) ب: پاسخ کانال چرخ به ورودی $5/0 \cdot u(t)$ درجه با مدل دینامیکی ثانیه ۰/۸



شکل (۴-۱): پاسخ زاویه چرخ به ورودی زاویه چرخ برابر $u(t) = 20$ درجه (شبیه سازی سیستم غیرخطی)

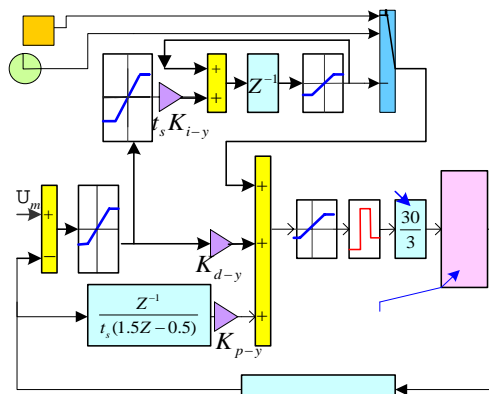
۳- سیستم کنترل پرواز در کانال سمت

مدل دینامیکی حرکت در زاویه سمت در بخش (۲-۴) از پیوست بدست آمده است. همانگونه که گفته شد با فرض آنکه حرکت در کانال چرخ به حالت ماندگار خود رسیده باشد زاویه سمت به واسطه زاویه سکان کنترل می شود. جدول (۳-۱) مقادیر قطبها و صفرها و بهره تابع تبدیل زاویه سکان را به زاویه سمت نمایش می دهد:

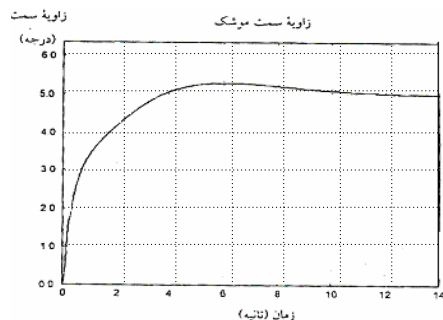
جدول (۳-۱): پارامترهای تابع تبدیل زاویه سکان به زاویه سمت در فواصل زمانی مختلف از زمان شلیک

زمان (ثانیه)	سرعت (متر بر ثانیه)	بهره	صفرها (رادیان بر ثانیه)	قطبها (رادیان بر ثانیه)
0.8	98.76	1.464	-0.2857	$0.00, 0.434252 \pm 2.351525i$
2.6	238.7	9.903	-0.7065	$0.00, 1.086134 \pm 5.921390i$
5.6	265.1	41.15	-0.6374	$0.00, 0.552542 \pm 4.973872i$
13.2	275.1	44.91	-0.6632	$0.00, 0.574338 \pm 5.164909i$
21	280.6	47.09	-0.6790	$0.00, 0.587290 \pm 5.275897i$
30.5	238.9	48.43	-0.6892	$0.00, 0.595485 \pm 5.342763i$
51.6	286.5	49.51	-0.6992	$0.00, 0.603000 \pm 5.394981i$

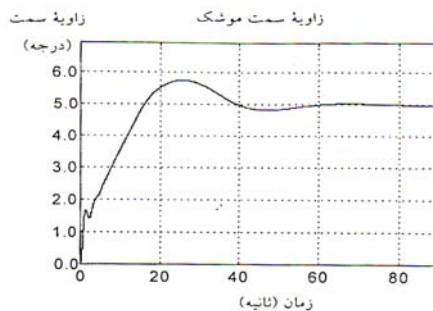
شکل (۵-۱) نمودار جعبه‌ای کنترل کننده کانال سمت را نشان می دهد. ساختار کنترل کننده در کانال سمت کاملاً مشابه کنترل کننده کانال چرخ است با این تفاوت که در لحظات اولیه پرواز موشک، برای تضمین پایداری موشک جزء انتگرالگیر از حلقه خارج می شود و کنترل کننده بصورت یک کنترل کننده PD عمل می کند. برای بررسی رفتار موشک در کانال سمت نیز پاسخ زاویه سمت را به ورودی پله بررسی می کنیم شکل (۶-۱) پاسخ پله زاویه سمت را به ازای دینامیک سیستم در ثانیه های ۵۰ و ۰/۸ بعد از شلیک نشان می دهد همانگونه که در شکل (۶-۱) مشاهده می شود کنترل کننده کانال سمت نیز در تمام طول پرواز پایدار است و مانند کانال چرخ در لحظات اولیه پرواز دینامیک بسیار کندی دارد. برای بررسی درستی مدل دینامیکی بدست آمده برای کانال سمت نیز در شبیه سازی غیر خطی نیز یک ورودی پله به زاویه سمت اعمال شده است. شکل (۷-۱) پاسخ سیستم غیرخطی را به ورودی پله زاویه سمت نمایش می دهد همانگونه که مشاهده می شود در کانال سمت هم نتایج شبیه سازی های مدل خطی شده و مدل غیرخطی بدست آمده برای کانال سمت را تایید می کنند. زمان نشست پاسخ زاویه سمت در حالت ماندگار موشک تقریباً ۲/۵ ثانیه است. پهنای باند موشک در کانال سمت در حالت ماندگار تقریباً ۰/۲۵ هرتز است.



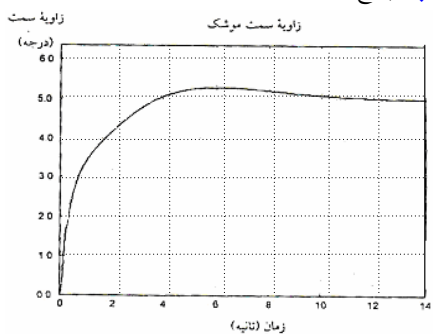
شکل (۵-۱): نمودار جعبه‌ای کنترل کننده کانال سمت



شکل (۶-۱) الف: پاسخ کانال سمت به ورودی $u(t)$ ۵/۰ درجه با مدل دینامیکی ثانیه ۵۰



شکل (۶-۱) ب: پاسخ کانال سمت به ورودی $u(t)$ ۵/۰ درجه با مدل دینامیکی ثانیه ۰/۸



شکل (۷-۱): پاسخ زاویه سمت به ورودی زاویه سمت برابر $u(LV_0)$ ۲۰+۵/۰ درجه (شبه سازی سیستم غیر خطی)

۴- سیستم کنترل پرواز در کانال اوج - ارتفاع

مدل موشک در کانال زاویه اوج با صرف نظر از اثر جاذبه زمین کاملاً مانند مدل موشک در کانال زاویه سمت است برای مدلسازی رفتار موشک در کانال ارتفاع نیز رفتار ارتفاع موشک بر حسب تابع تبدیل زاویه فراز در پیوست بدست آمد.

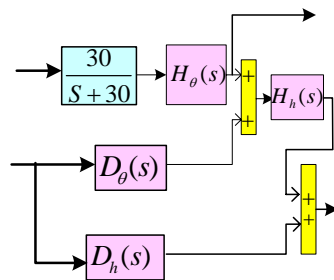
جدول (۴-۱): قطبها و صفرها و بهره تابع تبدیل زاویه فراز به ارتفاع موشک را نمایش می دهد.

زمان	سرعت	بهره	صفرها	قطبها
0.8	98.76	-0.945	-5.501, 4.297, -0.352	0, -0.286, -0.279
2.6	238.7	-0.964	-13.96, 10.64, -0.875	0, -0.729, -0.706
5.6	265.1	-0.879	-14.56, 13.06, -0.720	0, -0.713, -0.637
13.2	275.1	-0.880	-15.12, 13.56, -0.749	0, -0.742, -0.663
21	280.6	-0.882	-15.44, 13.85, -0.767	0, -0.760, -0.679
30.5	238.9	-0.884	-15.63, 14.02, -0.778	0, -0.771, -0.689
51.6	286.5	-0.888	-15.78, 14.16, -0.790	0, -0.783, -0.699

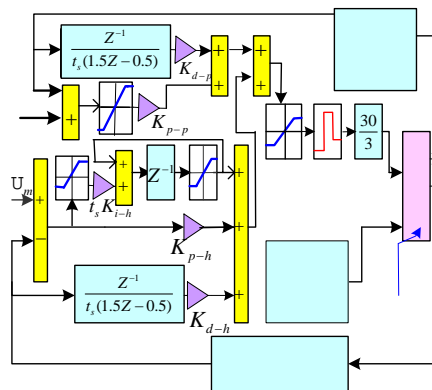
رفتار موشک در کانال زاویه اوج - ارتفاع تا حد زیادی با رفتار موشک در دو کانال دیگر متفاوت است. این مسئله از آنجا ناشی می شود که در درجه اول حرکت موشک در زاویه فراز و ارتفاع مستقل نیست و هر دو تنها با یکی از زوایای بالک کنترل می شود و در درجه دوم برخلاف کانالهای چرخ و سمت جاذبه زمین بر حرکت موشک در کانال زاویه فراز - ارتفاع تاثیر می گذارد. شکل (۸-۱) مدل دینامیکی کانال اوج - ارتفاع را نمایش می دهد. از آنجا که در این موشک هدایت بر

مبنای ارتفاع موشک انجام می‌شود، آنچه اهمیت دارد آن است که ارتفاع موشک فرمان ورودی ارتفاع را دنبال کند و ورودی زاویه فراز در حقیقت به عنوان یک ورودی کمکی برای کاهش اثر اغتشاشهای وارد بر سیستم مثل اثر جاذبه بکار می‌رود. توجه به این نکته خالی از لطف نیست که بدلیل وابستگی دینامیک زاویه فراز و ارتفاع هر دو آنها نمی‌توانند مقادیر ورودی را در آن واحد بدون خطای حالت ماندگار دنبال نمایند. بنابراین اگر در کنترل کننده مربوط به هر دو آنها از جزء انتگرالگیر استفاده شود در هر حال یکی از آنها در حالت شیب قرار می‌گیرد. از آنجا که همانطور که گفته شد هدف آن است که موشک در کانال ارتفاع مسیر مشخصی را دنبال کند. جزء انتگرالگیر از کنترل کننده کانال زاویه فراز حذف می‌شود. با توجه به آنچه که گفته شد کنترل کننده کانال اوج - ارتفاع شامل دو طبقه است حلقه داخلی که حرکت موشک را در کانال زاویه فراز کنترل می‌کند. یک کنترل کننده PD با ضرایب ثابت است. منحنی زاویه فراز مطلوب بر حسب زمان به نحوی انتخاب می‌شود که با توجه به منحنی مطلوب ارتفاع بر حسب زمان برآیند نیروی پیشران، نیروی بالابر و نیروی جاذبه زمین شتاب لازم را برای حرکت موشک بر روی منحنی مطلوب ارتفاع فراهم آورد بعنوان مثال وقتی موشک در ارتفاع ثابت از سطح دریا حرکت می‌کند. زاویه فراز به نحوی انتخاب می‌شود که نیروی جاذبه زمین با نیروی آیرودینامیکی بالابر جبران شود. استفاده از این مسئله باعث افزایش سرعت پاسخ کانال ارتفاع به ورودی مطلوب می‌شود و علاوه بر این از افتادن موشک در آب جلوگیری می‌کند. در حلقه خارجی کنترل کانال اوج - ارتفاع نیز از یک کنترل کننده PID استفاده شده است. فرمان زاویه بالک از مجموع خروجی کنترل کننده PD زاویه فراز و کنترل کننده PID ارتفاع بدست می‌آید. شکل (۹-۱) نمودار جعبه‌ای کنترل کننده را در کانال اوج - ارتفاع نمایش می‌دهند.

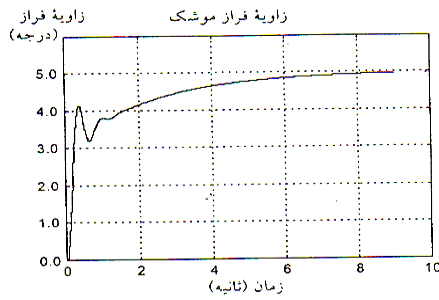
بررسی حلقه کنترل کانال اوج - ارتفاع نشان می‌دهد که در لحظات اولیه شلیک به دلیل سرعت کم موشک کنترل کننده PID کانال ارتفاع باعث ناپایداری حرکت موشک می‌شود. به همین دلیل در لحظات اولیه پس از شلیک حلقه خارجی کنترل کننده در کانال اوج - ارتفاع بسته نمی‌شود و موشک تنها در کانال زاویه اوج یک منحنی از پیش تعیین شده را دنبال می‌کند. پس از آنکه سرعت موشک به سرعت نهایی خود نزدیک شده حلقه خارجی نیز بسته می‌شود و ارتفاع موشک منحنی از پیش تعیین شده را تعقیب می‌کند. از آنجا که در کانال اوج - ارتفاع فرمانهای ورودی زاویه فراز و ارتفاع بر هر دو خروجی زاویه فراز و ارتفاع اثر می‌گذارند. و علاوه بر نیروی جاذبه بر حرکت موشک در کانال ارتفاع تاثیر می‌گذارد، برای بررسی رفتار موشک در کانال اوج - ارتفاع پاسخ زاویه فراز و ارتفاع موشک را به ورودی پله‌ای در زاویه فراز و ورودی پله ارتفاع بررسی می‌کنیم. شکل (۱۰-۱) پاسخ موشک در کانال اوج را در حالتی که حلقه خارجی بسته نشده است به ازای دینامیک موشک در تائیه‌های ۵۰ و ۰/۸ نمایش می‌دهد. در اینجا اثر نیروی جاذبه و نیروی پیشران موشک در کانال اوج در نظر گرفته نشده است



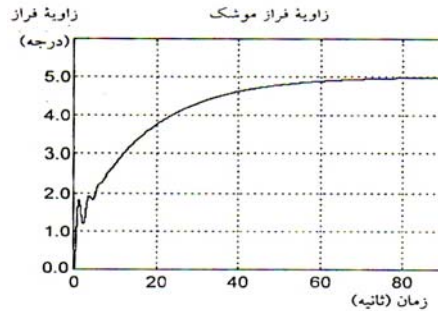
شکل (۸-۱): نمودار جعبه‌ای دینامیک کانال زاویه فراز



شکل (۹-۱): نمودار جعبه‌ای کنترل کننده کانال زاویه فراز - ارتفاع



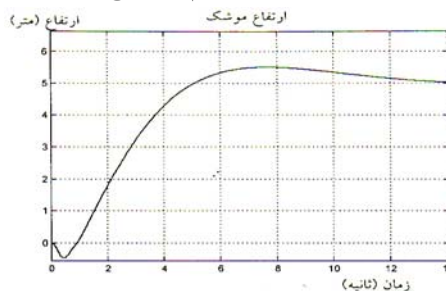
شکل (۱۰-۱) الف: پاسخ حلقه داخلی کنترل کننده کانال اوج - ارتفاع به ورودی $u(t)$ $5/0$ درجه به ازای دینامیک موشک در ثانیه $0/8$ از زمان شلیک



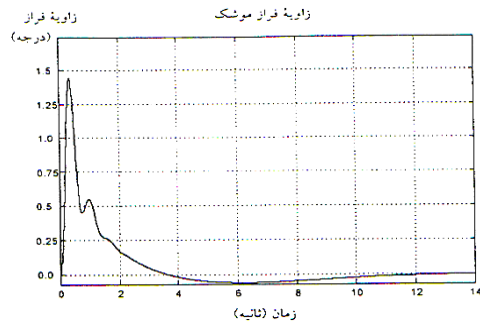
شکل (۱۰-۱) ب: پاسخ حلقه داخلی کنترل کننده کانال اوج - ارتفاع به ورودی $u(t)$ $5/0$ درجه به ازای دینامیک موشک در ثانیه $0/8$ از زمان شلیک

شکل (۱۱-۱) پاسخ موشک در کانال اوج - ارتفاع به ورودی ارتفاع و ورودی زاویه فراز را وقتی حلقه خارجی بسته است و بدون در نظر گرفتن اثر نیروی جاذبه و نیروی پیشران بر حرکت موشک (به ازای دینامیک موشک در ثانیه های $5/0$ و $0/8$) نمایش می دهد، همانگونه که در شکل (۱۱-۱) ج و (۱۱-۱) د مشاهده می شود بستن حلقه خارجی کنترل کننده در ثانیه های اول پرواز که سرعت موشک خیلی کمتر از مقدار نهایی آن است باعث ناپایداری موشک می شود. علاوه بر این همانگونه که می دانیم، خروجی زاویه فراز در حالت ماندگار فرمان ورودی زاویه فراز را دنبال نمی کند بلکه در حالتی که ارتفاع موشک به حالت ماندگار خود رسیده است، خروجی زاویه فراز به نحوی است که اثر نیروهای خارجی وارد بر موشک را جبران کند از آنجا که در شکل (۱۱-۱) ه از اثر نیروهای خارجی صرف نظر شده است، زاویه فراز به سمت صفر میل می کند. مطلب قابل ملاحظه دیگر آن است که دینامیک حرکت موشک در کانال اوج - ارتفاع نسبت به کانالهای دیگر کندتر است و اثر تغییر زاویه فراز با ثابت زمانی بسیار بزرگی در خروجی ارتفاع ظاهر می شود، بنابراین قدرت مانور موشک در کانال ارتفاع بسیار کم است.

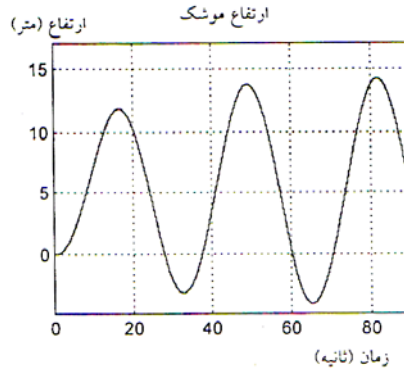
در شکل (۱۲-۱) و (۱۳-۱) اثر نیروی جاذبه بر حرکت موشک در کانال اوج - ارتفاع نمایش داده شده است. شکل (۱۲-۱) رفتار ارتفاع و زاویه فراز موشک در پاسخ به ورودی پله ای ارتفاع را نمایش می دهد. همانگونه که در شکل (۱۲-۱) الف مشاهده می شود، ابتدا ارتفاع موشک در اثر نیروی جاذبه وارد بر موشک کاهش می یابد اما با گذشت زمان زاویه فراز افزایش می یابد و نیروی بالابر حاصل از آن علاوه بر جبران اثر نیروی جاذبه نیروی لازم را برای دنبال کردن فرمان ارتفاع فراهم می آورد. همانگونه که در شکل (۱۲-۱) ب مشاهده می شود بر خلاف شکل (۱۱-۱) ب مقدار ماندگار زاویه فراز به صفر میل نمی کند و مقدار نهایی آن به گونه ای است که نیروی بالابر حاصل از آن اثر نیروی جاذبه را جبران نماید. در شکل (۱۳-۱) رفتار ارتفاع و زاویه فراز موشک را در پاسخ به ورودی پله ای زاویه فراز نمایش می دهد. در این شکل پس از آنکه حرکت موشک در کانال ارتفاع به حالت ماندگار خود رسید، یک ورودی پله ای به زاویه فراز اعمال شده است در اینجا نیز ورودی زاویه فراز برای کنترل کننده مانند یک اغتشاشی عمل می کند و خروجی سیستم به تدریج به مقادیر نهایی خود قبل از اعمال ورودی باز می گردند.



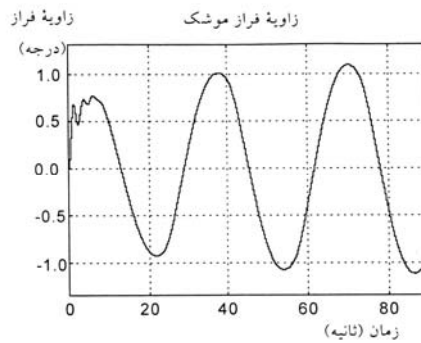
شکل (۱۱-۱) الف: پاسخ خروجی ارتفاع کنترل کننده کانال اوج - ارتفاع به ورودی ارتفاع $u(t)$ $5/0$ متر به ازای دینامیک موشک در ثانیه $5/0$ از زمان شلیک (بدون در نظر گرفتن اثر نیروی جاذبه و نیروی پیشران)



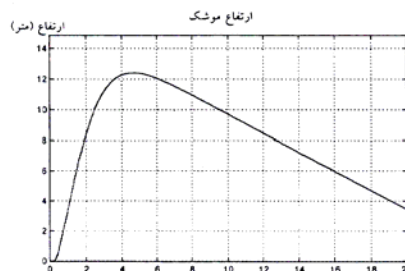
شکل (۱۱-۱) ب: پاسخ خروجی زاویه فراز کنترل کننده کانال اوج - ارتفاع به ورودی ارتفاع $u(t)$ ۵/۰ متر به ازای دینامیک موشک در ثانیه ۵۰ از زمان شلیک (بدون در نظر گرفتن اثر نیروی جاذبه و نیروی پیشران)



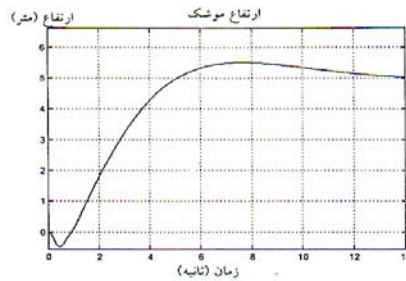
شکل (۱۱-۱) ج: پاسخ خروجی ارتفاع کنترل کننده کانال اوج - ارتفاع به ورودی ارتفاع $u(t)$ ۵/۰ متر به ازای دینامیک موشک در ثانیه ۰/۸ از زمان شلیک (بدون در نظر گرفتن اثر نیروی جاذبه و نیروی پیشران)



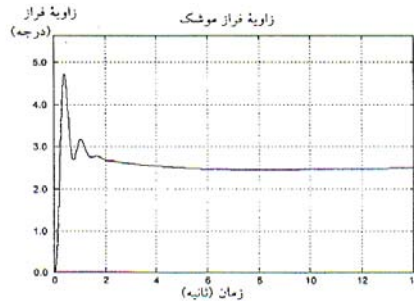
شکل (۱۱-۱) د: پاسخ خروجی زاویه فراز کنترل کننده کانال اوج - ارتفاع به ورودی ارتفاع $u(t)$ ۵/۰ متر به ازای دینامیک موشک در ثانیه ۰/۸ از زمان شلیک (بدون در نظر گرفتن اثر نیروی جاذبه و نیروی پیشران)



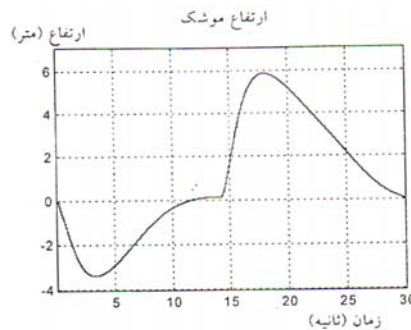
شکل (۱۱-۱) ه: پاسخ خروجی ارتفاع کنترل کننده کانال اوج - ارتفاع به ورودی ارتفاع $u(t)$ ۵/۰ متر به ازای دینامیک موشک در ثانیه ۵۰ از زمان شلیک (بدون در نظر گرفتن اثر نیروی جاذبه و نیروی پیشران)



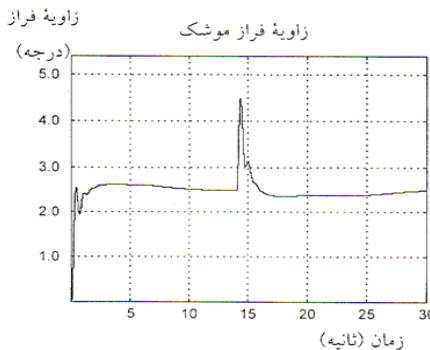
شکل (۱۲-۱) الف: پاسخ ارتفاع به ورودی ارتفاع $u(t)$ متر $5/0$ (با در نظر اثر جاذبه)



شکل (۱۲-۱) ب: پاسخ زاویه فراز به ورودی ارتفاع $u(t)$ متر $5/0$ (با در نظر اثر جاذبه)



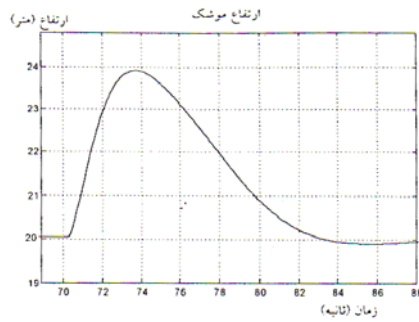
شکل (۱۳-۱) الف: پاسخ ارتفاع موشک به ورودی زاویه فراز $u(t-14)$ $5/0$ درجه (با در نظر گرفتن اثر جاذبه)



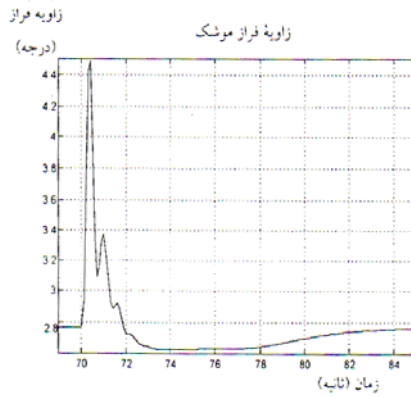
شکل (۱۳-۱) ب: پاسخ زاویه فراز به ورودی زاویه فراز $u(t-14)$ $5/0$ درجه (با در نظر گرفتن اثر جاذبه)

برای بررسی صحت مدل بدست آمده برای کانال اوج-ارتفاع و همچنین بررسی رفتار واقعی موشک در کانال اوج-ارتفاع در شبیه سازی غیر خطی حرکت موشک به حالت پایدار خود رسید یک ورودی پله ای به هر یک از ورودی های ارتفاع و زاویه فراز اعمال شده است شکل (۱۴-۱) پاسخ ارتفاع و زاویه فراز موشک را به این ورودی ها نمایش می دهد. با مقایسه شکل (۱۴-۱) الف با شکل (۱۱-۱) الف مشاهده می شود که زمان نشست پاسخ ارتفاع موشک به ورودی پله ای ارتفاع در هر دو شبیه سازی مدل خطی شده و شبیه سازی غیر خطی تقریباً ۱۰ ثانیه است.

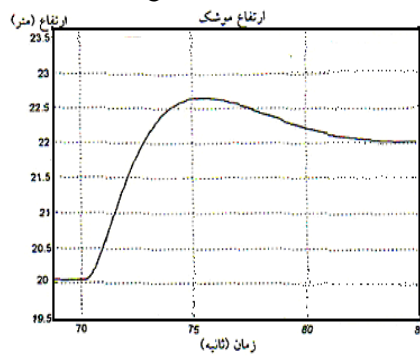
مقدار ماندگار زاویه فراز برای جبران سازی اثر نیروی جاذبه هم در هر دو شبیه سازی مدل خطی شده و شبیه سازی غیر خطی با توجه به شکلها ی (۱۲-۱) ب و (۱۴-۱) ب تقریباً برابر $2/6$ درجه است شباهت پاسخ شبیه سازی مدل خطی شده با شبیه سازی مدل غیر خطی بدست آمده را تایید می کند. پهنای باند موشک در کانال ارتفاع تقریباً برابر 0.6 هرتز است.



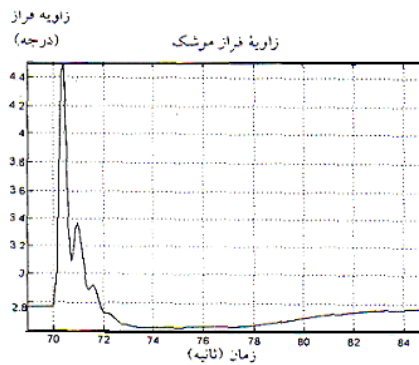
شکل (۱-۴) الف: پاسخ ارتفاع موشک به ورودی ارتفاع $u(t-70) \cdot 2/0 + 20$ متر در شبیه سازی غیر خطی



شکل (۱-۴) ب: پاسخ زاویه فراز موشک به ورودی ارتفاع $u(t-70) \cdot 2/0 + 20$ متر در شبیه سازی غیر خطی



شکل (۱-۴) ج: پاسخ ارتفاع موشک به ورودی زاویه فراز $u(t-70) \cdot 5/0$ درجه در شبیه سازی غیر خطی



شکل (۱-۴) د: پاسخ زاویه فراز موشک به ورودی زاویه فراز $u(t-70) \cdot 5/0$ درجه در شبیه سازی غیر خطی

نتیجه گیری:

استفاده از این روش کنترل امکان تخمین زمان روشن شدن رادار را در حین پرواز و براساس موقعیت و سرعت هدف موشک فراهم می آورد و این مسئله باعث افزایش برخورد موشک با هدف می شود.

پیشنهادها:

۱- تصحیح ساختار کنترل پرواز موشک و استفاده از کنترل کننده های مقاوم برای بهبود عملکرد سیستم کنترل پرواز.

۲- بررسی قدرت اهداف دریایی مختلف درازکارانداختن رادار موشک و بهینه کردن زمان روشن شدن رادار بر اساس قدرت هدف درازکارانداختن رادار در فاصله زمانی مشخص.

منابع و مأخذ:

- [1] D. Chwa, J. Y. Choi & J. H. Seo, "Compensation of Actuator Dynamics in Nonlinear Missile Control", *IEEE Trans. Cont. Sys. Technol.*, vol. 12, no. 4, pp. 620-626, July 2004
- [2] Dongkyoung Chwa and Jin Young Choi, "Observer-Based Control for Tail-Controlled Skid-to-Turn Missiles Using a Parametric Affine Model", *IEEE Trans. Cont. Sys. Technol.*, vol. 12, no. 1, pp. 167-175, July 2004
- [3] Fu-Kuang Yeh, Hsiuan-Hau Chien & Li-Chen Fu, "A Midcourse Guidance Law for Missiles with Thrust Vector Control", in *2001 The American Control Conference*, pp. 2357-2362.
- [4] Jae-Hyuk Oh & In-Joong Ha, "Missile Autopilot Design via Functional Inversion and Time-Scaled Transformation, *IEEE Trans. Aerospace and Elec. Sys.*, vol. 33, no. 1, pp.64-76, 1997.
- [5] D. Serakos, "Nonlinear Control for a Tall-Fin Controlled Missile", 1995.
- [6] Paul Zarchan, "Ballistic Missile Defense Guidance and Control Issues", *Science & Global Security*, 1998, Volume 8, pp. 99-124
- [7] Ju-Il Lee & In-Joong Ha, "Autopilot Design for Highly Maneuvering STT Missiles via Singular Perturbation-Like Technique", *IEEE Trans. Cont. Sys. Technol.*, vol. 7, no. 5, pp. 527-541, Sep. 1999.
- [8] V. Fromion, G. Scorletti & G. Ferreres, "Nonlinear performance of a PI controlled missile: an explanation", in *1997 IEEE Conference on Decision and Control*, pp. 4198-4203.
- [9] D.K. Chwa, J. Y. Choi & J. H. Seo, "Nonlinear Observer for Tail-Controlled Skid-to-Turn Missiles", in *15th Triennial World Congress (2002 IFAC)*, pp. 1-6.

پیوست :

در این پیوست مدلی برای کنترل موشک بدست می آوریم همانگونه که می دانیم سیستم کنترل پرواز وظیفه پایدارسازی و کنترل موشک در سه کانال چرخ، سمت، اوج-ارتفاع را برعهده دارد. هدف از این پیوست بدست آوردن تابع تبدیلی است که فرمانهای کنترلی یعنی زوایای بالکها را به زوایای چرخ و سمت و همچنین ارتفاع موشک مربوط می کند برای این منظور ابتدا معادلات دینامیکی حاکم بر موشک را بررسی میکنیم و پس از آن با استفاده از قوانین دینامیکی حاکم بر موشک مدل حرکت موشک رادار سه کانال یاد شده بدست می آوریم.

۱) بررسی معادلات حرکت موشک:

حرکت موشک در فضای یک حرکت باشد درجه آزادی است که از شش معادله نیروی گشتاور تبعیت می کند. این معادلات شامل سه معادله نیرو و سه معادله گشتاور هستند. نیروهای وارد بر موشک شامل دودسته نیروهای گرانشی و نیروهای غیر گرانشی هستند. نیروهای غیر گرانشی نیز خود شامل نیروهای حاصل از موتور و نیروهای آیرودینامیک هستند اگر F_g^I نیروی گرانشی وارد بر موشک در دستگاه مختصات اینرسی و F_A^B, F_T^B به ترتیب بردار نیرو حاصل از موتور و نیروهای آیرودینامیکی در دستگاه مختصات بدنی باشند، معادلات نیرو در دستگاه مختصات بدنی به شکل زیر است:

$$v^B = \begin{bmatrix} v_x^B \\ v_y^B \\ v_z^B \end{bmatrix} = \frac{1}{M_s} \left[F_{ng}^B + C_l^B F_g^I \right] - \frac{w_{IB}^B}{M_s} \times v^B \quad (پ-۱)$$

در رابطه بالا M_s جرم موشک است. به همین صورت معادلات گشتاور که برای تعیین موقعیت دورانی جسم بکار می رود بصورت زیر هستند.

$$w_{IB}^B = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{I_x} [(M_{ng})_x + qr(I_y - I_z)] \\ \frac{1}{I_y} [(M_{ng})_y + pr(I_z - I_x)] + X_{BC}(F_{ng})_z \\ \frac{1}{I_z} [(M_{ng})_z + qp(I_x - I_y)] - X_{BC}(F_{ng})_y \end{bmatrix} \quad (پ-۲)$$

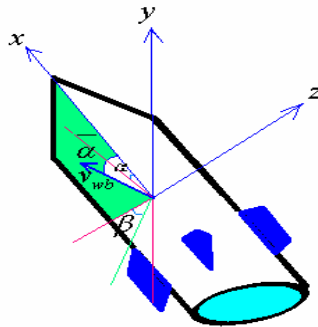
که در رابطه فوق داریم: $M_{ng}^B = M_A^B + M_T^B$

در رابطه بالا M_A^B و M_T^B به ترتیب گشتاور آیرودینامیکی و گشتاور ناشی از نیروی موتور هستند. همچنین I_x, I_y, I_z ممان اینرسی حول محورهای X, Y, Z در دستگاه مختصات بدنی و X_{BC} فاصله مرکز جرم لحظه ای موشک تا مرکز مختصات دستگاه بدنی می باشند. برای حل معادلات حرکت موشک در هر لحظه با

انتگرالگیری از معادله (پ-۲) سرعت زاویه ای و به کمک آن ماتریس دوران جسم یعنی C_I^B بدست می آید. برای بدست آوردن موقعیت جسم، با محاسبه نیروهای وارد بر جسم و داشتن ماتریس دوران از رابطه (پ-۱) انتگرالگیری میشود و موقعیت جسم بر حسب زمان بدست می آید. علاوه بر این F_T^B در رابطه (پ-۱) و M_T^B در رابطه (پ-۲) نیرو و گشتاور حاصل از موتور هستند که معمولاً به صورت تابعی از زمان روشن شدن موتور در دسترس هستند. بنابراین تنها مجهول باقیمانده از روابط (پ-۱) و (پ-۲) نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی وارد بر موشک است که باید در هر لحظه محاسبه شوند.

۲) محاسبه نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی

برای بدست آوردن نیروهای آیرودینامیکی وارد بر جسم، ابتدا با در اختیار داشتن سرعت موشک نسبت به ذرات هوا بدست می آید. اگر سرعت موشک نسبت به ذرات هوا را با v_{wb} نمایش دهیم، زوایایی را که تصویر بردار v_{wb} روی صفحات $y-x, z-x$ با محور x می سازند با α, β و زاویه بردار v_{wb} با محور x را با $\bar{\alpha}$ نمایش داده می شود. $\alpha, \beta, \bar{\alpha}$ به ترتیب زاویه حمله^۱، زاویه حمله جانبی^۲، زاویه حمله کلی گفته میشود.



شکل (۱-۲): جهت بردار سرعت در دستگاه مختصات بدنی موشک

نیروهای آیرودینامیکی وارد بر جسم به صورت تابعی بر حسب زوایای بالکها یعنی زاویه بالا^۳، زاویه سکان^۴، زاویه شهیره^۵ بدست می آیند با فرض کوچک بودن زوایای α, β نیروها و گشتاورهای آیرودینامیکی بر حسب ضرایب آیرودینامیکی که خود تابعی از سرعت جسم نسبت به ذرات هوا هستند به صورت زیر بدست می آیند:

$$\begin{aligned} (F_A^B)_x &= qS \left[C_{X0} + C_{X\bar{\alpha}} \bar{\alpha}^2 + C_{X\delta_e} \delta_e^2 + C_{X\delta_\alpha} \delta_\alpha^2 + C_{X\delta_r} \delta_r^2 \right] \\ (F_A^B)_y &= qS \left[C_{Y\beta} \beta + C_{Y\delta_r} \delta_r + C_{Yr} \frac{rD}{2V} \right] \\ (F_A^B)_z &= qS \left[C_{Z\alpha} \alpha + C_{Z\delta_e} \delta_e + C_{Zq} \frac{qD}{2V} \right] \\ (M_A^B)_x &= qSD \left[C_{L\delta_\alpha} \delta_\alpha + C_{Lp} \frac{pD}{2V} \right] \\ (M_A^B)_y &= qSD \left[C_{M\alpha} \alpha + C_{M\delta_e} \delta_e + C_{Mq} \frac{qD}{2V} \right] \\ (M_A^B)_z &= qSD \left[C_{N\beta} \beta + C_{N\delta_r} \delta_r + C_{Nr} \frac{rD}{2V} \right] \end{aligned} \quad \text{(پ-۳)}$$

در رابطه بالا q حد دینامیکی نامیده میشود و به صورت زیر تعریف میشود:

$$q = \frac{1}{2} \rho v^2 \quad \text{(پ-۴)}$$

در رابطه بالا ρ چگالی هوا و v اندازه بردار v_{wb} است. D, S نیز در رابطه (پ-۳) به ترتیب سطح مقطع و قطر خارجی بدنه جسم هستند، ضرایب دینامیکی $C_{X0}, C_{X\bar{\alpha}}, C_{X\delta_\alpha}, C_{X\delta_e}, C_{X\delta_r}, \dots$ با روشهای آزمایشگاهی و یا با انجام محاسبات آیرودینامیکی، بر حسب اندازه سرعت جسم نسبت به ذرات هوا بدست می آیند.

۳) بدست آوردن مدل دینامیکی ساده شده موشک در کانال چرخ

با صرف نظر از گشتاور ناشی از نیروی پیشران موتور موشک و با استفاده از روابط (پ-۲) و (پ-۳) داریم:

¹ Angle Of Attack

² Side-Slip

³ Elevator

⁴ Rudder

⁵ Aileron

$$I_{Xp} = (M_A^B)_X + qr(I_Y - I_Z) \quad (پ-۵)$$

$$(M_A^B)_X = K_{m\delta_a} \delta_a + K_{mp} P$$

که K_{mp} و $K_{m\delta_a}$ از رابطه زیر بدست می آیند:

$$K_{m\delta_a} = (qSD)C_{L\delta_a} \quad (پ-۶)$$

از

$$K_{mp} = (qSD)\left(\frac{D}{2V}\right)C_{Lp}$$

آنجا که در موشک مورد نظر ممانهای اینرسی حول محور Z, Y در دستگاه بدنی برابر هستند با تلفیق روابط (پ-۴) و (پ-۵) تابع تبدیل زاویه شهیره (δ_a) به زاویه چرخ (φ) نسبت به دستگاه مختصات جغرافیایی با صرف نظر از دوران دستگاه مختصات جغرافیایی بصورت زیر بدست می آید:

$$\varphi(S) = \frac{K_{m\delta_a}}{S(SI_X - K_{mp})} \delta_a(S) = H_\varphi(S) \delta_a(S) \quad (پ-۷)$$

۴) بدست آوردن مدل دینامیکی ساده شده موشک در کانال سمت

حرکت موشک در کانال سمت به وسیله زاویه سکان بالکها (δ_r) کنترل میشود و از اثر زوایای شهیره و بالابر بالکها بر حرکت در کانال سمت صرف نظر میشود با استفاده از روابط (پ-۱) (پ-۲) (پ-۳) روابط زیر بدست می آید:

$$(M_A^B)_Z = K_{m\beta} \beta + K_{m\delta_r} \delta_r + K_{mr} r \quad (پ-۸)$$

$$(F_A^B)_Y = K_{f\beta} \beta + K_{f\delta_r} \delta_r + K_{fr} r \quad (پ-۹)$$

$$I_Z r = (M_A^B)_Z + pq(I_X - I_Y) - X_{BC}(F_A^B)_Y \quad (پ-۱۰)$$

$$M_S v_Y = (F_A^B)_Y + (F_g^B)_Y - M_S v_X r \quad (پ-۱۱)$$

در روابط بالا داریم:

$$K_{m\beta} = (qSD)C_{N\beta}$$

$$K_{m\delta_r} = (qSD)C_{N\delta_r}$$

$$K_{mr} = (qSD)\left(\frac{D}{2V}\right)C_{Nr} \quad (پ-۱۲)$$

$$K_{f\beta} = (qS)C_{Y\beta}$$

$$K_{f\delta_r} = (qS)C_{Y\delta_r}$$

$$K_{fr} = (qS)\left(\frac{D}{2V}\right)C_{Yr}$$

با فرض آنکه حرکت موشک در کانال چرخ پایدار شده باشد، با صرف نظر از تاثیر زاویه چرخ موشک در دینامیک زاویه سمت آن وبا توجه به اینکه فرض می کنیم که $pq = 0$ و $(F_g^B)_Y = 0$ ، در این صورت زاویه حمله جانبی موشک از رابطه زیر بدست می آید:

$$\beta = \text{Arctg}\left(\frac{v_g}{v_x}\right) \quad (پ-۱۳)$$

بنابراین با کمی تقریب داریم:

$$\beta = \frac{v_Y}{v} = \frac{1}{M_S v} [(F_A^B)_Y - M_S v r] \quad (پ-۱۴)$$

با جایگزینی رابطه (پ-۹) در رابطه (پ-۱۴) داریم:

$$\beta = \frac{1}{M_S v} [K_{f\beta} \beta + K_{f\delta_r} \delta_r + (K_{fr} - M_S v_X) r] \quad (پ-۱۵)$$

با تلفیق رابطه بالا با روابط (پ-۸) و (پ-۱۰) تابع تبدیل زائیه سکان بالها به زاویه سمت موشک (نسبت به دستگاه مختصات جغرافیایی) با صرف نظر از دوران محورهای دستگاه مختصات جغرافیایی به صورت زیر بدست می آید:

$$(پ-۱۶)$$

$$\frac{\psi(s)}{\delta_r(s)} = H_\psi(s) = \frac{K_{m\delta_r} - X_{BC}K_{f\delta_r}}{I_Z S}$$

$$S + \frac{K_{m\beta}K_{f\delta_r} - K_{f\beta}K_{m\delta_r}}{M_s v (K_{m\delta_r} - X_{BC}K_{f\delta_r})}$$

$$S^2 + \left(\frac{X_{BC}K_{f\delta_r} - K_{nr}}{I_Z} - \frac{K_{f\beta}}{M_s v} \right) S + \frac{K_{f\beta}K_{nr} - K_{m\beta}(K_{fr} - M_s v)}{M_s v I_Z}$$

۵) بدست آوردن مدل دینامیکی ساده شده موشک در کانال اوج و ارتفاع

مدل دینامیکی موشک در کانال اوج مانند مدل دینامیکی موشک در کانال سمت است. با این تفاوت که بر خلاف کانال سمت در کانال اوج اثر نیروی گرانش قابل صرف نظر کردن نیست. از آنجاکه زاویه اوج و ارتفاع موشک وابستگی زیادی به هم دارند و علاوه بر این کنترل هر دو آنها تنها با یک ورودی کنترل زاویه بالا بر بالکها انجام میشود. بجای مدل دینامیکی مستقل موشک در کانال ارتفاع، برای حرکت موشک در کانالهای اوج و ارتفاع از یک مدل دینامیکی مشترک بدست می آید. با استفاده از روابط (پ-۱) و (پ-۲) و (پ-۳) به روابط زیر می رسیم:

$$(M_A^B)_Y = K_{m\alpha} \alpha + K_{m\delta_e} \delta_e + K_{mq} q \quad (\text{پ-۱۷})$$

$$(F_A^B)_Z = K_{f\alpha} \alpha + K_{f\delta_e} \delta_e + K_{fq} q \quad (\text{پ-۱۸})$$

$$I_Y q = (M_A^B)_Y + pr(I_Z - I_X) + X_{BC}(F_A^B)_Z \quad (\text{پ-۱۹})$$

$$M_s v_Z = (F_A^B)_Z + (F_g^B)_Z + M_s v_X q \quad (\text{پ-۲۰})$$

در روابط بالا داریم:

$$K_{m\alpha} = (qSD)C_{M\alpha}$$

$$K_{m\delta_e} = (qSD)C_{M\delta_e}$$

$$K_{mq} = (qSD)\left(\frac{D}{2V}\right)C_{Mq}$$

$$K_{f\alpha} = (qS)C_{Z\alpha}$$

$$K_{f\delta_e} = (qS)C_{Z\delta_e}$$

$$K_{fq} = (qS)\left(\frac{D}{2V}\right)C_{Zq}$$

(پ-۲۱)

بازهم با فرض آنکه حرکت موشک در کانال چرخ پایدار شده باشد، با صرف نظر از تاثیر زاویه چرخ موشک در دینامیک زاویه سمت آن و با توجه به اینکه فرض می کنیم که $(F_g^B)_Z = M_s g$ و $pr = 0$ ؛ به علاوه زاویه حمله از رابطه زیر بدست می آید:

$$\alpha = \text{Arctg}\left(\frac{v_Z}{v_X}\right) \quad (\text{پ-۲۲})$$

با کمی تقریب داریم:

$$\alpha = \frac{v_z}{v} = \frac{1}{M_s v} \left[(F_A^B)_Z + M_s g - M_s v q \right] \quad (\text{پ-۲۳})$$

با تلفیق روابط (پ-۱۷) تا (پ-۲۳) و کمی محاسبات و با صرف نظر از دوران دستگاه مختصات جغرافیایی داریم:

(پ-۲۴)

$$\theta(s) = \frac{K_{m\delta_r} + X_{BC} K_{f\delta_r}}{I_Y S} + \frac{S + \frac{K_{m\alpha} K_{f\delta_e} - K_{f\alpha} K_{m\delta_r}}{M_s v (K_{m\delta_e} - X_{BC} K_{f\delta_e})}}{S^2 - \left(\frac{X_{BC} K_{f\delta_e} + K_{m\alpha}}{I_Y} - \frac{K_{f\alpha}}{M_s v} \right) S + \frac{K_{f\alpha} K_{m\alpha} - K_{m\alpha} (K_{f\alpha} + M_s v)}{M_s v I_Y}} \delta_e(s) + \frac{M_s g X_{BC}}{I_Y S} \frac{S - \frac{-K_{m\alpha} - X_{BC} K_{f\alpha}}{M_s v X_{BC}}}{S^2 - \left(\frac{X_{BC} K_{f\delta_e} + K_{m\alpha}}{I_Y} - \frac{K_{f\alpha}}{M_s v} \right) S + \frac{K_{f\alpha} K_{m\alpha} - K_{m\alpha} (K_{f\alpha} + M_s v)}{M_s v I_Y}} = H_\theta(s) \delta_e(s) + D_\theta(s)$$

رابطه بالا زاویه اوج (نسبت به دستگاه مختصات جغرافیایی) به ورودی زاویه بالابرابالکها را نمایش می دهد جزء دوم رابطه اغتشاشی است که از نیروی جاذبه زمین ناشی میشود. برای بدست آوردن مدل دینامیکی رفتار ارتفاع، با استفاده از رابطه (پ-۲۳) داریم:

$$v_Z = \alpha v \quad (\text{پ-۲۵})$$

v_Z در رابطه بالا سرعت موشک در راستای محور Z است (در دستگاه مختصات بدنی). برای بدست آوردن سرعت در دستگاه مختصات جغرافیایی داریم:

$$v^N = C_B^N v^B \quad (\text{پ-۲۶})$$

همچنین C_B^N بر حسب زوایای اوایلر یعنی φ, θ, ψ به صورت زیر در می آید:

$$C_B^N = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \cos(\psi) & -\cos(\varphi) \sin(\psi) + \sin(\varphi) \sin(\theta) \cos(\psi) \\ -\cos(\varphi) \sin(\psi) & -\cos(\varphi) \cos(\psi) + \sin(\varphi) \sin(\theta) \sin(\psi) \\ -\sin(\theta) & \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ \sin(\varphi) \sin(\psi) + \cos(\varphi) \sin(\theta) \cos(\psi) \\ -\sin(\varphi) \cos(\psi) + \cos(\varphi) \sin(\theta) \sin(\psi) \\ \cos(\varphi) \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (\text{پ-۲۷})$$

با فرض آنکه زاویه چرخ تقریباً برابر صفر باشد و با فرض کوچک بودن زاویه فراز موشک داریم:

$$h' = -v_D \quad (\text{پ-۲۸})$$

$$v_D = -\theta v_x + v_Z$$

با تلفیق رابطه فوق با رابطه (پ-۲۵) و با کمی تقریب رابطه زیر بدست می آید:

$$\dot{h} \cong v(\theta - \alpha) = v\gamma \quad (\text{پ-۲۹})$$

γ در رابطه بالا زاویه مسیر پرواز^۶ نامیده می شود. با استفاده از روابط (پ-۲۸) و (پ-۲۳) و (پ-۲۴) داریم:

$$h(s) = \frac{-K_{f\alpha}}{M_s S \left(S - \frac{K_{f\alpha}}{M_s v} \right)} \left[\left(S + \frac{K_{f\alpha}}{K_{f\alpha}} \right) + \frac{K_{f\delta_e}}{K_{f\alpha}} \frac{1}{H_\theta(s)} \right] \theta(s) + \frac{K_{f\delta_e}}{M_s S \left(S - \frac{K_{f\alpha}}{M_s v} \right)} \left[\frac{D_\theta(s)}{H_\theta(s)} - \frac{M_s g}{K_{f\delta_e}} \right] = H_h(s) \theta(s) + D_h(s) \quad (\text{پ-۳۰})$$

با بدست آوردن تابع زاویه اوج نسبت به ارتفاع موشک، مدل دینامیکی در کانال اوج-ارتفاع نیز کامل میشود.

^۶ Flight Path Angle