# بررسی تاریخچه توابع حقیقی مثبت و اهمیت آن در نظریه کنترل

**مجتبی حکیمی مقدم**
**دانشگاه آزاد اسلامی واحد گناباد**
mojtaba_hakimi@yahoo.com

**حمید خالوزاده**
**دانشگاه خواجه نصیر الدین طوسی**
h_khaloozadeh@kntu.ac.ir

**چکیده**

مرور تاریخچه توابع حقیقی مثبت مبین این حقیقت است که منشأ راهیابی این توابع به عرصه کنترل و فلسفه تعریف توابع اکیداً حقیقی مثبت کمتر مورد توجه اندیشمندان قرار گرفته است و این واقعیت عامل اصلی گرایش به سمت فضای حالت و غفلت از حوزه فرکانس در این زمینه بوده است. از طرفی یک ابزار اصلی در فضای حالت لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف است، این لم نسخه های متعددی دارد که تنها برخی از آنها معادل تعریف توابع اکیداً حقیقی مثبت در حوزه فرکانس است، لذا تا مدتها پس از معرفی توابع اکیداً حقیقی مثبت قضیه ای که مبین شرایط لازم و کافی برای این توابع باشد ارائه نشد. در حال حاضر نیز با اینکه دانشمندان کنترل در تعریف توابع اکیداً حقیقی مثبت در حوزه فرکانس با هم اتفاق نظر دارند، اما در بیان شرایط لازم و کافی معادل برای این توابع، اختلاف نظر وجود دارد و قضایای متعددی بیان شده است که در جزئیات تفاوتهایی با هم دارند. عموم این قضایا مبتنی بر ابزار موجود در فضای حالت بخصوص لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف به اثبات رسیده است. علاوه بر این بررسی گفته های بسیاری از صاحب نظران کنترل در زمینه توابع اکیداً حقیقی مثبت نشان می دهد که آنها هویت این توابع را ناشی از نظریه مدار و شبکه های تلفاتی می دانند، در حالیکه مفهوم شبکه تلفاتی بر اساس تعریف توابع اکیداً حقیقی مثبت معرفی شده است. در این مقاله این واقعیات را مورد بحث قرار می دهیم.

**کلمات کلیدی:** توابع اکیداً حقیقی مثبت، شبکه های تلفاتی، دیدگاه حوزه فرکانس

## ۱- مقدمه

در این مقاله زمینه های اولیه اهمیت پیدا کردن توابع حقیقی مثبت در نظریه کنترل مرور می شود. در واقع حل مسأله پایداری مطلق لوری و تعمیم آن به نظریه فراپایداری توسط پوپوف، موجبات ظهور این مفهوم را در عرصه کنترل فراهم آورد. در طراحی و آنالیز سیستمهای غیر خطی، اغلب مفید و امکان پذیر است که سیستم را به یک زیر سیستم خطی و یک زیر سیستم غیر خطی تجزیه کنیم. اگر تابع یا ماتریس تبدیل زیر سیستم خطی حقیقی مثبت باشد آنگاه خواص مهمی دارد که ممکن است منجر به تولید تابع لیاپانوف برای کل سیستم گردد [۹].

یکی از مهم ترین نتایج کار پوپوف در سال ۱۹۶۱ این بود که یک سیستم خطی نامتغیر با زمان فراپایدار است اگر و فقط اگر حقیقی مثبت باشد و بطور مجانبی فراپایدار است اگر و فقط اگر اکیداً حقیقی مثبت باشد. کار پوپوف مبتنی بر حوزه فرکانس بود، اما معیار حوزه فرکانسی او پس از مدت کوتاهی توسط یاکوبوویچ و کالمن بصورت چند نامساوی ماتریسی در فضای حالت تفسیر شد که امروزه به لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف معروف است.

مرور تاریخچه توابع حقیقی مثبت مبین این حقیقت است که منشأ راهیابی این توابع به عرصه کنترل و فلسفه تعریف توابع اکیداً حقیقی مثبت کمتر مورد توجه اندیشمندان قرار گرفته است و این واقعیت عامل اصلی گرایش به سمت فضای حالت و غفلت از حوزه فرکانس بوده است. یک ابزار اصلی در فضای حالت لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف است، این لم نسخه های متعددی دارد که تنها برخی از آنها معادل تعریف توابع اکیداً حقیقی مثبت در حوزه فرکانس است، به همین دلیل تا مدتها پس از معرفی توابع اکیداً حقیقی مثبت قضیه ای که مبین شرایط لازم و

کافی برای این توابع باشد ارائه نشد. در حال حاضر نیز با اینکه دانشمندان کنترل در تعریف توابع اکیداً حقیقی مثبت در حوزه فرکانس با هم اتفاق نظر دارند، اما در بیان شرایط لازم و کافی معادل برای این توابع، اختلاف نظر وجود دارد و قضایای متعددی بیان شده است که در جزئیات تفاوتهایی با هم دارند. عموم این قضایا مبتنی بر ابزار موجود در فضای حالت بخصوص لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف به اثبات رسیده است. علاوه بر این بررسی گفته های بسیاری از صاحب نظران کنترل در زمینه توابع اکیداً حقیقی مثبت نشان می دهد که آنها هویت این توابع را ناشی از نظریه مدار و شبکه های تلفاتی می دانند، در حالیکه مفهوم شبکه تلفاتی بر اساس تعریف توابع اکیداً حقیقی مثبت معرفی شده است. مفاهیم تابع اکیداً حقیقی مثبت و شبکه تلفاتی هر دو برآمده از کارهای انجام گرفته در نظریه کنترل و در ارتباط با پایداری مطلق در دهه های ۱۹۶۰ و ۱۹۷۰ بوده است و لذا هر دو مفهوم برای دانشمندان نظریه مدار کاملاً نا آشناست.

## ۲- نظریه فراپایداری پوپوف در سیستمهای خطی نامتغیر با زمان

در بکارگیری نظریه پایداری لیاپانوف مشکلی وجود دارد و آن عدم وجود رویه ای کلی برای ساختن توابع لیاپانوف است. از میان تلاش های اولیه ای که برای برطرف کردن این مشکل صورت گرفت می توان به روش پایداری مطلق لوری[1] (۱۹۵۱) اشاره نمود. لوری و همکارانش برای سیستم هایی که شامل یک بخش خطی و یک بخش غیر خطی بدون حافظه در حلقه پسخور بودند, تابع لیاپانوف با یک معادله جبری مرکب از یک ساختار درجه دوم و انتگرال بخش غیر خطی بنا نهادند. اولین نتایج این بود که غیر خطی باید به بخش معینی از صفحه متعلق باشد و رقابت برای پیدا کردن یک رویه برای حل معادله جبری بود. برای یک دهه رقابتهایی انجام گرفت و بالاخره مسأله پایداری مطلق لوری با یک معیار حوزه فرکانسی توسط پوپوف (۱۹۶۰ و۱۹۶۲) حل گردید [۶]. در سال ۱۹۶۳ پوپوف مفهوم فرا پایداری را به عنوان یک توسعه طبیعی از پایداری مطلق معرفی کرد. معادل معیار حوزه فرکانسی پوپوف توسط یاکوبوویچ (۱۹۶۲) و کالمن (۱۹۶۳) در ساختار فضای حالت بصورت یک لم که متشکل از چند نامساوی ماتریسی بود، بیان گردید. امروزه این لم به یک ابزار اساسی در نظریه کنترل تبدیل شده است و معروف به لم حقیقی مثبت یا لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف است. شروط حوزه فرکانس معیار پوپوف و معیار دایروی هر دو مبتنی بر مفهوم تابع حقیقی مثبت استوارند و لم کلیدی فوق این مفهوم را به وجود تابع لیاپانوف مرتبط می سازند. از دید امروز سهم اساسی معیار پوپوف معرفی غیر فعال بودن یا حقیقی مثبت بودن در کنترل پسخور بوده است. برای یک تحقق می نیمال فضای حالتی $(A, B, C)$ از تابع تبدیل $G(s)$ این لم نشان می دهد که حقیقی مثبت بودن $G(s)$ و بخصوص محدودیت حوزه فرکانسی $\mathrm{Re}[G(j\omega)] \ge 0$ معادل وجود یک $P = P^T > 0$ است بطوریکه

$$\begin{aligned} A^T P + PA &\le 0 \\ PB &= C^T \end{aligned} \qquad (۱-۱)$$

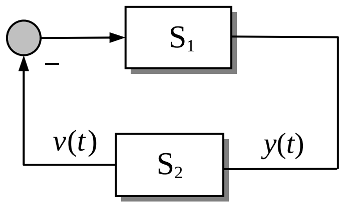
بنابراین غیر فعال بودن $G(s)$ به این معنی است که $P$ نه تنها رابطه لیاپانوف را برآورده می کند بلکه بطور همزمان محدودیت درجه نسبی را که یک شرط ورودی- خروجی است و نیز پایداری صفر ها را تضمین می نماید. ماتریس $P$ در واقع بخش درجه دوم تابع لیاپانوف در مسأله لوری را می سازد, بنابراین هر روندی که برای حل معادلات (۱-۱) بکار رود برای ساختن تابع لیاپانوف نیز می تواند مورد استفاده قرار گیرد.

یک سیستم فراپایدار با توجه به شکل (۱-۳) بصورت زیر تعریف می شود:

[1] - Lurie

**تعریف ۱-۱** [۷] سیستم $S_1$ فرا پایدار نامیده می شود اگر هر سیستم حلقه بسته با ساختار شکل (۱-۳) و با هر بلوک $S_2$ که رابطه (۱-۲) را بر آورده کند، پایدار باشد. ($S_1$ و $S_2$ می توانند سیستمهای غیر خطی یا متغیر با زمان باشند. )

$$\int_0^t y(\tau)v(\tau)d\tau \geq 0\,;\,\forall t \geq 0 \tag{۲-۱}$$



شکل ۱ سیستم پسخوری فرا پایدار

فرض کنید بلوک $S_1$ در شکل (۱-۳) سیستم کنترل پذیر و رویت پذیر

$$S_1 : \begin{cases} \dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \\ y(t)=Cx(t)+Du(t) \end{cases} \tag{۳-۱}$$

باشد.

قضایای اصلی پوپوف بصورت زیر بیان می شود.

**قضیه ۱-۱ (فراپایداری)** [۷]: سیستم $S_1$ در رابطه (۱-۳) فرا پایدار است اگر و فقط اگر تابع تبدیل

$$G(s) = D + C(sI - A)^{-1} B \tag{۷-۱}$$

حقیقی مثبت باشد.

پوپوف پس از مطرح کردن مفهوم فرا پایداری و برای مشخص کردن دسته ای از سیستمهای خطی که بطور مجانبی فرا پایدار هستند، تعریف توابع اکیداً حقیقی مثبت را معرفی نمود.

**قضیه ۱-۲ (فراپایداری مجانبی)** [۷]: سیستم $S_1$ در رابطه (۱-۳) بطور مجانبی فرا پایداری است اگر و فقط اگر تابع تبدیل $G(s)$ در رابطه (۱-۷) اکیداً حقیقی مثبت باشد.

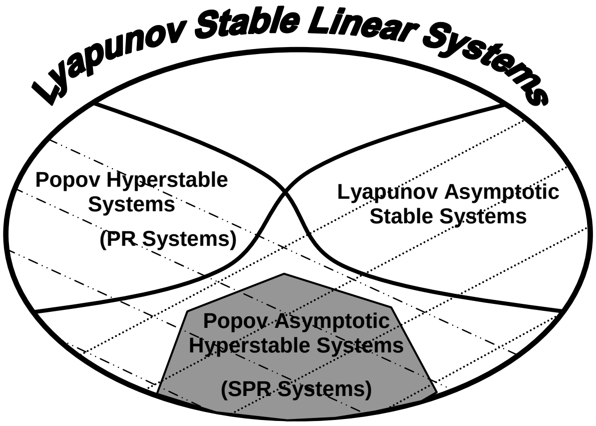
## ۳- مقایسه پایداری لیاپانوفی و فراپایداری پوپوفی

در رده بندی مفاهیم پایداری، فراپایداری پوپوف قویتر از پایداری لیاپانوف و فراپایداری مجانبی پوپوف قویتر از پایداری مجانبی لیاپانوفی است. در واقع اگر یک سیستم خطی فراپایدار باشد قطعاً پایدار لیاپونوف نیز خواهد بود ولی عکس این حکم صحیح نیست، به همین ترتیب اگر یک سیستم خطی فراپایدار مجانبی باشد قطعاً دارای پایداری مجانبی لیاپونوفی خواهد بود ولی از پایداری مجانبی لیاپونوفی نمی توان فراپایداری مجانبی را استنتاج کرد و حتی از پایداری مجانبی لیاپانوفی نمی توان فراپایداری پوپوف را نتیجه گیری نمود، بعنوان مثال سیستم با تابع تبدیل

$$G(s) = \frac{s-1}{s^2+s+1} \tag{۱۱-۲}$$

دارای پایداری مجانبی لیاپانوفی است ولی فراپایدار $(PR)$ نیست، زیرا فراپایداری علاوه بر پایداری قطبها، مستلزم پایداری صفرها نیز می باشد.

شکل (۱-۴) ارتباط بین پایداری و فراپایداری را نمایش می دهد، طبق شکل سیستمهای فراپایدار مجانبی $(SPR)$، زیر مجموعه ای از سیستمهای فراپایدار $(PR)$ و سیستمهای پایدار مجانبی هستند.




شکل ۱-۴ ارتباط بین پایداری لیاپانوفی و فراپایداری پوپوفی

بطورکلی یک سیستم خطی فراپایدار سه ویژگی اساسی دارد که عبارتند از: پایداری قطبها، پایداری صفرها و اینکه اختلاف تعداد قطبها و صفر ها نباید از یک بیشتر باشد. دو ویژگی اخیر یعنی پایداری دینامیکهای صفر و محدودیت درجه نسبی از مفاهیم هندسه دیفرانسیل بوده و ابزارهای اصلی در بررسی ساختار ورودی- خروجی سیستمهای خطی و غیر خطی هستند و با پسخور ثابت تغییر نمی کنند، به همین دلیل کنترل سیستم با دینامیک های صفر ناپایدار به مراتب مشکل تر از کنترل سیستم با دینامیک های صفر پایدار است [۶].

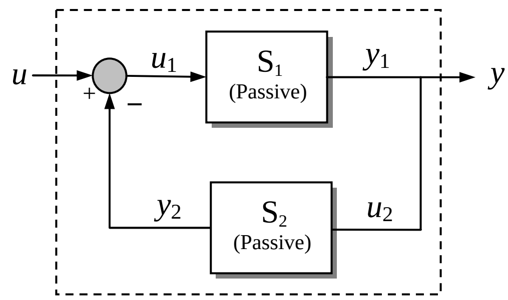
لم زیر یکی از مهمترین نتایج کاربردی توابع اکیداً حقیقی مثبت می باشد:

**لم ۱-۱** [۵] سیستم پسخور شکل (۱-۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید $S_1$ یک سیستم خطی و تغییر ناپذیر با زمان با تابع تبدیل اکیداً حقیقی مثبت و تحقق می نیمال $(A,\ B,\ C)$ باشد و $S_2$ تابع بدون حافظه $y_2 = h(t, e_2)$ باشد بطوریکه که $y_2 e_2 = uh(t,u) \geq 0, \forall u \in R, \forall t \geq 0$ و نیز $h$ نسبت به $t$ پیوسته قطعه ای و نسبت به $e_2$ لیپ شیتز محلی است. مبدأ این سیستم حلقه بسته پایدار مجانبی یکنواخت جامع است.

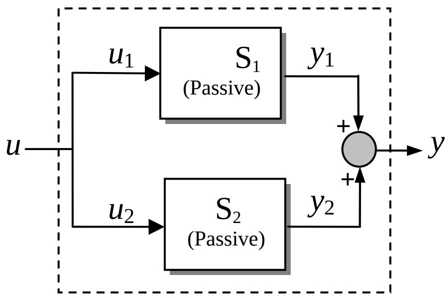
نظریه فراپایداری از دیر باز در کنترل تطبیقی مدل مرجع مورد استفاده بوده است. روش مستقیم لیاپانوف و قضیه فرا پایداری پوپوف وقتیکه به مسأله کنترل تطبیقی اعمال می گردند نتایج یکسانی را می دهند. مقایسه روی بردار مدل خطا وقتی که ورودی مدل بطور یکنواخت کراندار است نشان می دهد که پایداری و پایداری مجانبی دقیقاً تحت همان شرایطی که برای فرا پایداری و فرا پایداری مجانبی لازم است حاصل می گردد. اگر ورودی مدل خطا نتواند به طور یکنواخت کراندار فرض شود، مسأله با هیچ کدام از این دو روش بطور کامل قابل حل نیست. با این حال در بیشتر مواقع استفاده از نظریه فرا پایداری ساده تر از نظریه لیاپانوف است زیرا نیازی به جستجو برای یک تابع لیاپانوف نخواهد بود [۶].

بدلیل کارهای با ارزشی که در سال ۱۹۷۱ توسط ویِلمز و سپس در سال ۱۹۷۵ توسط دسور و ویدیاساگار انجام گرفت، امروزه بجای اصطلاح فراپایداری از غیر فعال بودن[۲] و بجای اصطلاح فراپایداری مجانبی از تلفاتی بودن[۳] استفاده می شود [۸].

دو ویژگی ترکیبی سیستمهای غیر فعال یا فراپایدار که باعث رونق این نظریه در کنترل پسخور شده است عبارتند از اینکه: ترکیب دو سیستم غیر فعال, در ساختار پسخور منفی مطابق شکل (۱-۵) و نیز ترکیب موازی دو سیستم غیر فعال, مطابق شکل (۱-۶) یک سیستم غیر فعال را نتیجه می دهد [۸ و ۹].




شکل ۱-۵ اتصال پسخوری سیستمهای غیر فعال




شکل ۱-۶ اتصال موازی سیستمهای غیر فعال

### ۴- تاریخچه توابع تبدیل حقیقی مثبت

مفهوم توابع حقیقی مثبت یا $PR$ در ارتباط با تحقق پذیری امپدانس $Z(s)$ با المانهای مثبت مقاومت، سلف و خازن مطرح شد و شرط کفایت و بسیاری از خواص آن توسط اُتُ برون[۴] در سال ۱۹۳۰ استخراج گردید، او اثبات کرد که هر تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی، امپدانس نقطه تحریک یک شبکه تک قطبی خطی، غیر فعال، فشرده، دوجانبه و نامتغیر با زمان است؛ اگر و فقط اگر حقیقی مثبت باشد [۱و۲].

پوپوف اولین کسی بود که به ارتباط بین تحقق پذیری در نظریه مدارهای الکتریکی و پایداری در نظریه کنترل پی برد. او مسأله پایداری مطلق لوری را که برای یک دهه موضوع اصلی بحث در محافل علمی بود، در سال ۱۹۶۱ بطور کامل حل نمود و سپس نظریه فراپایداری را در سال ۱۹۶۳ بعنوان تعمیمی از پایداری مطلق بنیان نهاد. به نظر می رسد مفهوم تابع تبدیل اکیداً حقیقی مثبت یا $SPR$ بوسیله پوپوف معرفی شده است و فلسفه طرح این تعریف مشخص کردن آن دسته از سیستمهای خطی نامتغیر با زمان بوده است که بطور مجانبی فرا پایدار هستند، به عبارت دیگر او اثبات کرد که یک سیستم خطی نامتغیر با زمان فراپایدار است اگر و فقط اگر $PR$ باشد و بطور مجانبی فراپایدار است، اگر و فقط اگر $SPR$ باشد [۱۰]. در حقیقت $SPR$ بودن قوی ترین نوع پایداری را برای یک سیستم خطی نامتغیر با زمان بیان می دارد و لذا این مفهوم خیلی سریع در زمینه های مختلف کنترل بخصوص کنترل تطبیقی مدل مرجع مورد استفاده قرار گرفت.

با فاصله کمی پس از انتشار کار پوپوف که در واقع یک معیار حوزه فرکانسی بود، یاکوبوویچ و کالمن کار پوپوف را در فضای حالت دنبال کردند و معادل فضای حالتی حقیقی مثبت بودن را استخراج نمودند که امروزه به لم حقیقی مثبت یا لم کالمن-یاکوبوویچ-پوپوف معروف است. علاوه بر این کالمن نشان داد که حل مسأله معکوس کنترل بهینه بوسیله نظریه فراپایداری به قانون کنترل بهینه $LQR$ منجر می شود [۱۱].

---

2 - Passivity
3 - Dissipativity
4 - Otto Brune

در سال ۱۹۷۳ نارِندرا و تیلور کارهای انجام شده در ارتباط با پایداری مطلق را جمع آوری کردند و مفهوم تابع تبدیل $SPR$ را از دید نظریه مدار تفسیر نمودند و شبکه تلفاتی خاصی را معرفی نمودند که هر المان آن تلفاتی بود. به این ترتیب که امپدانس نقطه تحریک یک شبکه تک قطبی متشکل از مقاومت، سلف تلفاتی و خازن تلفاتی یک تابع تبدیل $SPR$ است و بالعکس هر تابع تبدیل $SPR$ بصورت امپدانس نقطه تحریک یک شبکه المان به المان تلفاتی قابل تحقق است. منظور از سلف تلفاتی، سلفی است که دارای یک مقاومت سری مثبت باشد و منظور از خازن تلفاتی، خازنی است که دارای یک مقاومت مثبت موازی باشد [۱۲و۱۳].

از دیگر کارهای با ارزش نارِندرا و تیلور استخراج یک ویژگی مهم فرکانس بالا برای توابع $SPR$ بود که بطور خفیف یک تفاوت کلیدی توابع $PR$ و $SPR$ را آشکار می کرد [۱۲]. آنها همچنین نشان دادند که از دو بیان غالب موجود در آن زمان یکی مبین شرایط لازم و دیگری تنها مبین شرایط کافی است و هیچکدام مبین شرایط لازم و کافی واقعی برای توابع $SPR$ نیستند [۱۴].

متأسفانه با وجود گذشت بیش از چهار دهه از ظهور مفهوم تابع تبدیل $SPR$ در نظریه کنترل و با وجود اتفاق نظر در تعریف حوزه فرکانسی این توابع، هنوز در مورد شرایط لازم و کافی برای تشخیص این توابع یک اتفاق نظر کلی وجود ندارد و کماکان در کتب و مقالات بیانهای متفاوتی برای شرایط لازم و کافی دیده می شود. اولین قضیه شرایط لازم و کافی برای توابع $SPR$ توسط $Ioannou$ و $Tao$ در سال ۱۹۸۷ ارائه شد [۱۴]. قضایای متفاوت دیگری در کتابهای معروفی همچون کتاب سیستمهای غیرخطی خلیل[5] [۵] و کتاب کنترل غیرخطی اِسلُتین[6] [۹] و کتاب کنترل تطبیقی اَستروم[7] [۳] در این زمینه آمده است که این چهار بیان در جزئیات با هم اختلافهایی دارند، این موضوع در [۱۸] بطور کامل مورد بررسی قرار گرفته است. در کتاب کنترل فازی وانگ[8] [۴] نیز تعریف جدیدی برای این توابع ذکر شده است که دارای ایراد بنیادی است [۱۸]. همچنین از مفهوم سیستمهای تلفاتی معادل با توابع $SPR$ برداشتهای نادرستی صورت گرفته است، بگونه ای که بر سر $SPR$ بودن دسته خاصی از توابع اختلاف نظر بین دانشمندان وجود دارد که از جمله می توان به دیدگاه های مطروحه در مقاله لُزانو[9] [۱۵-۱۷] و کتاب اِسلُتین [۹] اشاره نمود. به نظر می رسد جامع ترین قضیه برای شرایط لازم و کافی در تشخیص توابع SPR قضیه زیر باشد.
**قضیه** [۱۸] تابع تبدیل گویا با ضرایب حقیقی

$$G(s) = k\,\frac{b(s)}{a(s)} = k\,\frac{s^m + b_1 s^{m-1} + \ldots + b_m}{s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}\ ,\ k \neq 0$$

$SPR$ است اگر و فقط اگر:

الف. $k > 0$ و $|n-m| \le 1$ و اگر $|n-m| = 1$ آنگاه $a_1 \neq b_1$ .

ب. تمامی قطبهای $G(\mathrm{s})$ دارای بخش حقیقی منفی باشد.

ج. $\mathrm{Re}[G(j\omega)] > 0,\ \forall \omega \in R$

## ۵- نتیجه گیری

به نظر می رسد دو عامل اصلی دور شدن از مفهوم توابع اکیداً حقیقی مثبت گرایش به سمت دیدگاههای فضای حالتی و سعی در معادل سازی مداری این توابع با معرفی شبکه های تلفاتی بوده است. نگاه دقیق به کارهای پوپوف

---

[5] - Khalil
[6] - Slotine
[7] - Astrom
[8] - Wang
[9] - Lozano

در دهه ۱۹۶۰ آشکار می سازد که اکیداً حقیقی مثبت بودن اساساً یک معیـار حـوزه فرکانـسی اسـت و بایـد از ایـن منظر این مقوله را مورد تأمل قرار داد.

## ۶- مراجع


[۱] چارلز دسور و ارنست کوه, "نظریه اساسی مدارها و شبکه ها " جلد دوم, ترجمه پرویز جبه دار مارالانی, انتشارات دانشگاه تهران, ۱۳۷۵.

[۲] وای کای چن, "فیلترهای فعال و غیر فعال", ترجمه محمد مولوی, تهران, مرکز نشر دانشگاهی, چاپ اول, ۱۳۷۷.

[۳] کارل جان استروم, یورن ویتن مارک, " کنترل تطبیقی", ویرایش دوم, ترجمه محمد تقی حمیدی بهشتی, تهران, انتشارات دانشگاه تربیت مدرس, ۱۳۷۷.

[۴] لی وانگ, "سیستمهای فازی و کنترل فازی", ترجمه محمد تشنه لب, نیما صفار پور, داریوش افیونی؛ تهران: دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی, ۱۳۷۸.

[۵] خلیل, "سیستمهای غیرخطی", ویراست دوم, جلد دوم: طراحی و کنترل, ترجمه غلامعلی منتظر, تهران, انتشارات دانشگاه تربیت مدرس, ۱۳۸۰.

[6] P. Kokotovic, M. Arcak, “Constructive nonlinear control: a historical perspective,” Automatica, 37, 637-662, 2001.

[7] K. S. Narendra, L.S. Valavani, “A Comparison of Lyapunov and Hyperstability Approaches to Adaptive Control of Continuous Systems,” IEEE Trans. Aut. Contr.Vol. 25, No. 2, pp. 243-247, April 1980.

[8] I. D. Landau, R. Lozano, M. M’Saad, “Adaptive Control,” Springer. Communications and Control Engineering, 1997.

[9] J.-J. E. Slotine, W. Li, “Applied Nonlinear Control,” Prentice Hall, 1991.

[10] B. D. O. Anderson, “A Simplified Viewpoint of Hyperstability,” IEEE, Trans. Ato. Con. June, 1968.

[11] R. E. Kalman, “When is a Linear Control System Optimal,” trans. ASME, Series D, 86, 1-10, 1964.

[12] K. Narendra and J. Taylor, “Frequency Domain Criteria for Absolute Stability,” New York: Academic, 1973.

[13] J. H. Taylor, “Strictly positive-real functions and the Lefschetz-Kalman Yakubovich (LKY) lemma, ” IEEE Trans. Circuits and system, pp. 310-311, March 1974.

[14] P. Ioannou and G. Tao, “Frequency domain conditions for strictly positive real functions,” IEEE Trans. Automat. Contr., vol.AC-32, pp. 53–54, Jan. 1987.

[15] H. J. Marquez, C. J. Damaren, “comments on: Strictly Positive Real Transfer Functions Revisited, ” IEEE Trans. Auto. Control, vol. 40, no. 3, March 1995.

[16] R. Lozano, S. M. Joshi, “reply to: comments on: Strictly Positive Real Transfer Functions Revisited, ” IEEE Trans. Auto. Control, vol. 40, no. 10, Octo. 1995.

[17] C. Mosquera, L. Leyra, F. Lez, “The robust SPR problem: Design algorithms and new applications, ” elsevier, Signal Processing, 1999. neering, Brigham Young University, 1994.

[18] M. Hakimi-M, MSc Thesis under title “Revision on the strict positive realness, ” Ferdowsi university of Mashhad, Iran, 13 July 2005.