پنجمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران
هفدهم الی نوزدهم شهریورماه ۱۳۸۳

کمترین مربعات فازی تعمیم یافته

مجید ناصری نژاد[۱]
Majid – naserinejad@yahoo.com

چکیده

در رگرسیون معمولی با استفاده از روش کمترین مربعات معمولی پارامترهای مدل رگرسیون خطی به راحتی قابل برآورد هسستند . اما اگر در مدل رگرسیونی ، مشاهدات مربوط به متغیرهای مستقل و وابسته اعداد فازی باشند طبیعی است که از روش کمترین مربعات فازی به جای کمترین مربعات معمولی استفاده شود .

در این مقاله با استفاده از یک متر مناسب در فضای اعداد فازی مسئله کردن مجموع مربعات فاصله مشاهدات از مقادیر برآورد شده آنها مورد بررسی قرار می گیرد .

واژه گان اصلی : رگرسیون فازی ، عدد فازی، فاصله بین دو عدد فازی .

۱- مقدمه

رگرسیون فازی در یک تقسیم بندی کلی به دو حالت زیر تقسیم می گردد:

الف- مدل رگرسیون امکانی : اگر ارتباط بین متغیرها فازی فرض شود یعنی ضرائب معادله رگرسیونی، فازی و متغیرها معمولی در نظر گرفته شوند با مدل رگرسیون با ضرائب فازی یا رگرسیون امکانی روبرو هستیم .

ب- مدل رگرسیون با مشاهدات فازی : اگر در مدل رگرسیون، متغیرها (و یا مشاهدات مربوط به متغیرها) اعداد فازی باشند با چنین مدلی روبرو هستیم که چنین مدلی را رگرسیون بروش کمترین مربعات فازی نیز می نامند .

مقاله حاضر به بررسی رگرسیون بروش کمترین مربعات می پردازد . روش کمترین مربعات فازی در سال ۱۹۸۸ برای اولین بار توسط دیاموند [۲] (برای حالت خاص اعداد فازی مثلثی) ارائه شد. و روشی مشابه شیوه کمترین مربعات معمولی است ولی با تعریف فاصله بین دو عدد فازی و کمینه کردن مجموع مربعات فاصله مشاهدات از مقادیر بر آورد شده آنها معادلاتی مشابه معادلات نرمال در روش کمترین مربعات معمولی بدست می آید .

در سال ۱۹۶۶، مامینگ[۳]، فریدمن[۴] و کاندل[۵] روش کمترین مربعات فازی را برای تمامی اعداد فازی گسترش دادند که مقاله حاضر به بررسی حالت تعمیم یافته می پردازد .

۱- دانشجوی دوره کارشناسی ارشددانشکده علوم ریاضی ـ دانشگاه صنعتی اصفهان

2-Diamond
3-Maming
4-Fridman
5- Kandel

پوری [1] و راسکو[2] [۵] فضای اعداد فازی را با استفاده از تکنیک نشانیدن به صورت یک فضا باناخ در آورند و نتایج مربوط به شیوه کمترین مربعات فازی (بررسی شده توسط دیاموند برای حالت خاص اعداد فازی مثلثی) برای تمامی اعداد فازی را تعمیم و گسترش دادند .

در بخش ۲، مقدمات ریاضی و نتایج نظری مورد نیاز برای گسترش و تعمیم مدل ارائه خواهد شد سپس در بخش ۳، روش کمترین مربعات فازی تعمیم یافته برپایه این نتایج مورد بررسی قرار می گیرد و برای روشن شدن موضوع به ارائه و حل مثالی عددی خواهیم پرداخت .

۲- مفاهیم و مقدمات اولیه

قرار می دهیم :

$E^1 = \{u :| R \to [0,1]$ تابع u در شرایط زیر صدق کند}

۱) نرمال بودن ، یعنی $x_0 \in| R$ موجود باشد به طوریکه : $U(x_0)=1$

۲) u یک مجموع فازی محدب باشد یعنی :

$$U(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \mathrm{Min}(u(x),u(y)) \quad ,x,y \in| R, 0 \leq \lambda \leq 1$$

۳) u، قطعه به قطعه پیوسته باشد یعنی : $\limsup\limits_{x \to t} u(x) = u(t)$

۴) $[u]^0 = \{t \in| R : u(t) > 0\}$ فشرده باشد .

فضای تابعی E^1، فضای اعداد فازی نامیده می شود و هر $u \in E^1$ را یک عدد فازی می نامیم.

مثال ۱ :

$$U_2(t) = \begin{cases} 1 + \dfrac{t-x}{\underline{\delta}}, x - \underline{\delta} \leq t < x \\ 1 + \dfrac{x-t}{\overline{\delta}}, x \leq t \leq x + \overline{\delta} \\ 0,0.\omega \end{cases} \qquad U_1(t) = \begin{cases} 0 & ,t < 0 \\ \sin t, & 0 \leq t \leq \pi \\ 0 & ,t > \pi \end{cases}$$

u_1 و u_2 را اعداد فازی نامیم . $u_2 = (x, \underline{\delta}, \overline{\delta})$ را یک عدد فازی مثلثی گوئیم .

مثال ۲ : عدد فازی L-R به صورت زیر تعریف می شود :

$$u(t) = \begin{cases} L\left(\dfrac{m-t}{\alpha}\right), t \leq m, \alpha > 0 \\ R\left(\dfrac{m-t}{\beta}\right), t > m, \beta > 0 \end{cases}$$

1-Puri
2-Ralescu

که در آن L و R توابعی غیر صعودی از $|R^+$ به $[0,1]$ می باشد و $L(0) = R(0) = 1$
و این عدد فازی را به صورت $u = (m,\alpha,\beta)_{LR}$ نمایش می دهیم. m را مقدار نمایی (میانه) ، β,α را به ترتیب پهنـای چپ و پهنای راست عدد فازی u می نامیم .

اگر $L(t) = R(t) = \begin{cases} 1-t, 0 \le t \le 1 \\ 0, t > 1 \end{cases}$ در این صورت u یک عدد فازی مثلثی نامیده می شود .

برای $u \in E^1$ $0 \le r \le 1$ تعریف می کنیم :

$$[u]^r = \begin{cases} \{t \mid u(t) \ge r\}, 0 < r \le 1 \\ \{t \mid u(t) > 0\}, r = 0 \end{cases} \qquad (۱)$$

بنابراین $[u]^r$ (مجموع r – سطح) برای هر $0 \le r \le 1$ یک فاصله بسته است .

تعریف ۱ : فرض کنید $K \in |R, U, V \in E^1$

$$[u+v]^r = [u]^r + [v]^r \overset{\Delta}{=} \left\{ a+b : a \in [u]^r, b \in [v]^r \right\} \qquad (۲)$$

$$[KU]^r = K[u]^r \overset{\Delta}{=} \left\{ Ka : a \in [u]^r \right\} \qquad (۳)$$

تعریف ۲ : برای $K \in |R, U, V \in E^1$ مجموع U+V و حاصلضرب اسکالر KU را به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$(u+v)(x) = \sup\left\{ r : x \in [u+v]^r \right\} \qquad (۴)$$

$$(KU)(x) = \sup\left\{ r : x \in [KU]^r \right\} \qquad (۵)$$

مثال ۳ : اعداد فازی V , U را به صورت زیر تعریف می کنیم .

$$u(x) = \begin{cases} 2(x-1), 1 \le x < 1.5 \\ -2(x-2), 1.5 \le x \le 2 \\ 0, 0.w \end{cases} \qquad v(x) = \begin{cases} 4(x-2), 2 \le x < 2.25 \\ -4(x-2.5), 2.25 \le x \le 2.5 \\ 0, 0.w \end{cases}$$

بنابراین u+v و $\frac{1}{2}u$ اعداد فازی اند با توابع عضویت زیر :

$$(u+v)(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}(x-3), 3 \le x < 3.75 \\ -\frac{4}{3}(x-4.5), 3.75 \le x \le 4.5 \\ 0, 0.w \end{cases} \qquad \left(\frac{1}{2}u\right)(x) = \begin{cases} 4(x-0.5), 0.5 \le x < 0.75 \\ -4(x-1), 0.75 \le x \le 1 \\ 0, 0.w \end{cases}$$

به راحتی مشاهده می شود که اگر $K \in |R, u, v \in E^1$ آنگـاه (u+v) , (Ku) نیـز اعـداد فـازی انـد . بنـابراین E^1 یـک مخروط محدب نامیده می شود .

فرض کنید $\overline{u}(r),\underline{u}(r)$ به ترتیب نمایش دهنده نقاط ابتدایی و انتهایی فاصله بسته $[u]^r$ باشند در این صورت :

۱) $\underline{u}(r)$ تابعی کراندار، از چپ پیوسته و غیر نزولی بر [۱ و ۰] است .

۲) $\overline{u}(r)$ تابعی کراندار، چپ پیوسته و غیر صعودی بر [۱ و ۰] است.

۳) $0 \le r \le 1, \underline{u}(r) \le \overline{u}(r)$

عکس این موضوع نیز صحیح است . توابع دلخواه $b(r)$, $a(r)$ را که به ترتیب شرایط ۱ و ۲ را برآورد می کنند . در نظر بگیرید هم چنین برای $a(r) \le b(r), 0 \le r \le 1$ در این صورت عدد فازی یکتای $u \in E^1$ موجود است به طوریکه $b(r)$, $a(r)$ به ترتیب برابر $\overline{u}(r),\underline{u}(r)$ هستند .

تعریف ۳ : تابع $\|.\| : E^1 \to \mathbb{R}^+$ را یک نرم روی E^1 نامیم هرگاه این تابع در سه خاصیت زیر صدق کند :

$$
\begin{aligned}
&1) \forall u \in E^1, \|u\| \ge 0, \|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0 \\
&2) \forall u \in E^1, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda u\| = |\lambda| \|u\| \\
&3) \forall u \in E^1, \|u + v\| \le \|u\| + \|v\|
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

تعریف ۴: فرض کنید $(E^1, \|.\|)$ یک فضای خطی نرمدار باشد E^1 را یک فضای باناخ نامیم هرگاه E^1 تحت متر متناظر بانرم $\|.\|$ فضایی کامل باشد به عبارتی دیگر اگر $\{u_i\}$ دنباله ای کوشی در E^1 باشد آنگاه $u_0 \in E^1$ یافت شود به گونه ای که : $\lim_{i\to\infty} u_i = u_0$ یا $\lim_{i\to\infty} (\|u_i - u_0\|) = 0$.

فرض کنید $\overline{C}[0,1]$ نمایش دهنده کلاس توابع حقیقی مقدار و کراندار بر $[0,1]$ باشد به طوریکه بر $[0,1]$ از چپ پیوسته و برای $t \in [0,1]$ دارای حد راست و در $t=0$ پیوستگی راست داشته باشد.

واضح است که $\overline{C}[0,1]$ یک فضای تابعی خطی است .

تعریف می کنیم $j(E^1), j : E^1 \to \overline{C}[0,1] \times \overline{C}[0,1]$ یک مخروط محدب است و

$$j(\alpha u + \beta v) = \alpha j(u) + \beta j(v) \qquad u, v \in E^1, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \tag{۷}$$

قضیه ۱ :

الف) $\overline{C}[0,1]$ با نرم تعریف شده به صورت $\int_0^1 f^2(r)dr^{\frac{1}{2}}$ یک فضای باناخ است .

ب) $\overline{C}[0,1] \times \overline{C}[0,1]$ با نرم تعریف شده به صورت $\|f,g\| = [\int_0^1 (f^2(r) + g^2(r))dr]^{\frac{1}{2}}$ یک فضای باناخ است .

اثبات [۸]: فرض کنید $j(v) = (\underline{v}, \overline{v}), j(u) = (\underline{u}, \overline{u}), u, v \in E^1$ در این صورت متر D را در E^1 به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$D^2(u,v)=\int_0^1(\underline{u}(r)-\underline{v}(r))^2\,dr+\int_0^1(\overline{u}(r)-\overline{v}(r))^2\,dr \tag{۸}$$

چون j یکریخت است از کامل بودن $\overline{C}[0,1]\times\overline{C}[0,1]$ نتیجه می شود که E^1 با متر تعریف شده در (۸) کامل است یعنی (E^1, D) یک فضای باناخ است .

تعریف ۵: فرض کنید V یک مخروط محدب بسته در E^1، u عضوی دلخواه از E^1 باشد اگر عدد فازی $v_0\in V$ وجود داشته باشد که برای هر $v\in V$

$$P(u,v_0,v)=\int_0^1[(\underline{u}(r)-\underline{v_0}(r))(\underline{v_0}(r)-\underline{v}(r))+(\overline{u}(r)-\overline{v_0}(r))(\overline{v_0}(r)-\overline{v}(r)]dr\ge 0$$

آنگاه گوییم u بر V، v_0 عمود است .

قضیه ۲ : فرض کنید V یک مخروط محدب بسته در E^1 باشد . برای هر $u\in E^1$ عدد فازی یکتای $v_0\in V$ وجود دارد به طوریکه : $D(u,v_0)\le D(u,v),\forall v\in V$

قبل از ارائه اثبات قضیه ۲، به دو لم زیر توجه کنید :

لم ۱ : به ازای هر u,v,w دلخواه در E^1 داریم :

$$D^2(u,v)=2D^2(u,w)+2D^2(v,w)-4D^2(w,\frac{1}{2}(u,v) \tag{۹}$$

اثبات : [۱]

لم ۲ : فرض کنید V یک مخروط محدب بسته در E^1، u عضوی دلخواه در E^1 باشد .

الف) اگر عدد فازی $v_0\in V$ وجود داشته باشد که برای هر $v\in V$ ، $D(u,v_0)<D(u,v)$ آنگاه v_0 یکتاست .

ب) شرط لازم و کافی برای آنکه $v_0\in V$ یکتا عنصری باشد که $D(u,v)$ را به ازای هر $v\in V$ مینیمم کند آن است که u بر V v_0- عمود باشد .

اثبات : ابتدا قسمت (ب) لم را اثبات می کنیم .

کفایت : فرض کنید عدد فازی $D(u,v), v_0\in V$ را به ازای هر $v\in V$ مینیمم می کند و u بر V ، v_0- عمود است نشان می دهیم که v_0 یکتاست .

$$D^2(u,v)=\int_0^1[\underline{u}(r)-\underline{v}(r)]^2\,dr+\int_0^1[\overline{u}(r)-\overline{v}(r)]^2\,dr$$

$$= \int_0^1 [\underline{u}(r) - \underline{v_0}(r) + \underline{v_0}(r) - \underline{v}(r)]^2 dr + \int_0^1 [\overline{u}(r) - \overline{v}_0(r) + \overline{v_0}(r) - \overline{v}(r)]^2 dr$$

$$= \int_0^1 [\underline{u}(r) - \underline{v}_0(r)]^2 dr + \int_0^1 [\overline{u}(r) - \overline{v_0}(r)]^2 dr + \int_0^1 [\underline{v_0}(r) - \underline{v}(r)]^2 dr + \int_0^1 [\overline{v_0}(r) - \overline{v}(r)]^2 dr$$

$$+ 2\int_0^1 [(\underline{u}(r) - \underline{v}_0(r)(\underline{v_0}(r) - \underline{v}(r)) + (\overline{u}(r) - \overline{v_0}(r))(\overline{v}_0(r) - \overline{v}(r)]dr$$

$$= D^2(u, v_0) + D^2(v_0, v) + 2P(u, v_0, v) \qquad (۱۰)$$

چون u بر V ، v_0- عمود است پس $P(u, v_0, v) \geq 0$ و در نتیجه :

$$D^2(u, v) \geq D^2(u, v_0) + D^2(v_0, v) \qquad \forall v \in V$$

اگر $v' \neq v_0$ آنگاه $D(u, v') > D(u, v_0), D^2(v_0, v') > 0$ یعنی v' نمی تواند D(u,v) را مینیمم کنـد در نتیجه v_0 یکتاست .

لزوم: فرض کنید به ازای هر $v_0 \in V, u \in E^1$ یکتا عدد فازی باشد که برای هر $v \in V$, D(u,v)را مینیمم می کنـد نشان خواهیم داد که u بر V ، v_0- عمود است .

برهان خلف : فرض کنید u بر V ، v_0- عمود نباشد یعنی برای تعدادی $v \in V$ داریم : $P(u, v_0, v) = -\lambda, \lambda > 0$
تعریف کنید $0 \leq \lambda' \leq 1$ $v' = (1 - \lambda')v_0 + \lambda' v$ واضح است که $v' \in V$ چون V محدب است .

$$D^2(u, v') = \int_0^1 [\underline{u}(r) - (1 - \lambda')\underline{v_0}(r) - \lambda'\underline{v}(r)]^2 dr + \int_0^1 [\overline{u}(r) - (1 - \lambda')\overline{v}_0(r) - \lambda'\overline{v}(r)]^2 dr$$

$$= \int_0^1 [\underline{u}(r) - \underline{v_0}(r) + \lambda'(\underline{v_0}(r) - \underline{v}(r))]^2 dr + \int_0^1 [\overline{u}(r) - \overline{v}_0(r) + \lambda'(\overline{v}_0(r) - \overline{v}(r))]^2 dr$$

$$= \int_0^1 [\underline{u}(r) - \underline{v_0}(r)]^2 dr + \lambda'^2 \int_0^1 [\underline{v_0}(r) - \underline{v}(r)]^2 dr + \int_0^1 [\overline{u}(r) - \overline{v}_0(r)]^2 dr$$

$$+ \lambda'^2 \int_0^1 [\overline{v}_0(r) - \overline{v}(r)]^2 dr + 2\lambda' P(u, v_0, v$$

$$= D^2(u, v_0) + \lambda'^2 D^2(v_0, v) + 2\lambda' P(u, v_0, v)$$

$$= D^2(u, v_0) + \lambda'^2 D^2(v_0, v) - 2\lambda'\lambda \qquad (۱۱)$$

برای λ' به اندازه کافی کوچک ، بعنوان مثـال $\lambda' < \dfrac{2\lambda}{D^2(v_0, v)}$ داریـم $D(u, v') < D(u, v_0)$ یعنـی v_0 نمـی تواند، D(u,v) را به ازای هر $v \in V$ مینیمم کند و این با فرض متناقض است بنابراین u بر V ، v_0- عمود است .

اثبات الف) اگر $D(u,v),v_0$ را به ازای هر $v \in V$ مینیمم کند بنابر قسمت (ب) لم u بر V ، v_0- عمود است پس v_0 یکتاست .

اثبات قضیه ۲ : یکتای v_0 به راحتی از لم ۲ نتیجه می شود کافی است موجود بودن v_0 را برای هر $u \in E^1$ نشان دهیم
اگر $u \in V$ در این صورت قرار می دهیم $v_0 = u$
اما اگر $u \notin V$ تعریف می کنیم $\delta = \inf\{D(u,v), v \in V\}$ فرض کنید $\{v_i\}$ دنباله ای از اعداد فازی در V باشد به طوریکه $\lim\limits_{i\to\infty} D(u,v_i) = \delta$.
با استفاده از رابطه (۹) در لم ۱ داریم:

$$D^2(v_i,v_j) = 2D^2(v_i,u) + 2D^2(v_j,u) - 4D^2\left(\frac{1}{2}(v_i,v_j),u\right)$$

برای تمامی j,i ها ، عنصر $\frac{1}{2}(v_i,v_j)$ متعلق به V یک مخروط محدب است پس

$$D(\frac{1}{2}(v_i,v_j),u) \geq \delta \quad \text{و} \quad 0 \leq D^2(v_i,v_j) \leq 2D^2(v_i,u) + 2D^2(v_j,u) - 4\delta^2 \xrightarrow{i,j\to\infty} 0$$

و در نتیجه $\lim\limits_{i,j\to\infty} D(v_i,v_j) = 0$ و این خاصیت دنباله کشی است یعنی دنباله $\{v_i\}$ یک دنباله کشی است از طرف دیگر چون فضای متری (E^1, D) کامل است و V بسته است پس $v_0 = \lim\limits_{i\to\infty} v_i$ نیز عضوی از V است .

نتیجه۱ : فرض کنید N یک عدد صحیح و V یک مخروط بسته در $E^1 \times \ldots \times E^1 = (E^1)^N$ باشد در فضای $(E^1)^N$ ، عناصر به صورت $u = (u_1, \ldots u_N)$ هستند که در آن u_i ها یعنی مولفه های u عناصر E^1 اند.
مربع فاصله دو عضو متعلق به $(E^1)^N$ را با D_N^2 نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$D_N^2(u,v) = \sum_{i=1}^{N} D^2(u_i,v_i), u,v \in (E^1)^N \tag{۱۲}$$

نتیجه ۲ : فرض کنید V یک مخروط محدب بسته در $(E^1)^N$ باشد برای هر $u \in (E^1)^N$ عدد فازی یکتای $v_0 \in V$ موجود است به طوریکه : $D_N(u,v_0) \leq D_N(u,v), \forall v \in V$

۳- کمترین مربعات برای داده های فازی

مدل رگرسیون خطی ساده زیر را در نظر بگیرید :

$$y = a + bx \qquad \begin{matrix} x,y \in E^1 \\ a,b \in \mathbb{R} \end{matrix} \tag{۱۳}$$

روش کمترین مربعات برای داده های فازی با توجه به متر تعریف شده (۱۲) به حل مسائل زیر منجر می شود :

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^{N} D^2(a+bx_i, y_i) \qquad \begin{array}{l} x_i, y_i \in E^1 \\ a,b \in \mathbb{R} \end{array} \tag{۱۴}$$

دو حالت زیر را مورد بررسی قرار می دهیم :

۳-۱) $b > 0$

$$r(a,b) = \sum_{i=1}^{N} D^2(a+bx_i, y_i) = \sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (a+b\underline{x}_i(r) - \underline{y}_i(r))^2 dr + \int_0^1 (a+b\overline{x}_i(r) - \overline{y}_i(r))^2 dr\right] \tag{۱۵}$$

با مشتق گیری از رابطه (۱۵) نسبت به b ,a (همانند کمترین مربعات معمولی) خواهیم داشت :

$$\left.\frac{\partial r(a,b)}{\partial a}\right|_{a_+,b_+} = 0 \Rightarrow 2Na_+ + b_+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{x}_i(r) + \overline{x}_i(r)dr\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{y}_i(r) + \overline{y}_i(r))dr\right] \tag{۱۶}$$

$$\left.\frac{\partial r(a,b)}{\partial a}\right|_{a_+,b_+} = 0 \Rightarrow a_+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{x}_i(r) + \overline{x}_i(r))dr\right] = b_+\sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{x}^2_i(r) + \overline{x^2}_i(r))dr\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{x}_i(r)\underline{y}_i(r) + \overline{x}_i(r)\overline{y}_i(r))dr\right] \tag{۱۷}$$

این دستگاه دو معادله دو مجهول را با (S_+) و اگر جواب مورد قبول داشته باشد جوابها را با b_+,a_+ نمایش می دهیم .

۳-۲) $b < 0$

$$r(a,b) = \sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (a+b\overline{x}_i(r) - \underline{y}_i(r))dr^2 + \int_0^1 (a+b\underline{x}_i(r) - \overline{y}_i(r))dr^2 + \right] \tag{۱۸}$$

با مشتق گیری از رابطه (۱۸) نسبت به b,a خواهیم داشت :

$$\left.\frac{\partial r(a,b)}{\partial a}\right|_{a_-,b_-} = 0 \Rightarrow 2Na_- + b_-\sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{x}_i(r) + \overline{x}_i(r)dr\right] = \sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{y}_i(r) + \overline{y}_i(r))dr\right]$$

(۱۹)

$$\left.\frac{\partial r(a,b)}{\partial a}\right|_{a_-,b_-} = 0 \Rightarrow a_-\sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{x}_i(r) + \overline{x}_i(r))dr\right] = b_-\sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{x}^2_i(r) + \overline{x^2}_i(r))dr\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{N}\left[\int_0^1 (\underline{x}_i(r)\overline{y}_i(r) + \overline{x}_i(r)\underline{y}_i(r))dr\right] \tag{۲۰}$$

این دستگاه دو معادله دو مجهولی را به (S_-) و اگر جواب مورد قبول داشته باشد جوابها را با b_-, a_- نمایش می دهیم .

تعریف ۶: اگر همه داده ها در یک مجموعه داده ای مانند هم نباشند مجموعه داده ها را غیر تباهیده گوئیم .

لم ۳ : برای هر مجموعه داده غیر تباهیده داریم : $b_+ \geq b_-$

اثبات : [۲ و ۱]

تعریف ۷: مجموعه داده های فازی $1 \le i \le N, (x_i, y_i)$ را گره دار گوئیم اگر $b_- \ge 0$ یا $b_+ \le 0$
اگر $b_+ \ge b_- \ge 0$ آنگاه مجموعه داده ها را گره دار مثبت و اگر $b_- \le b_+ \le 0$ مجموعه داده ها را گره دار منفی گوئیم .

قضیه ۳ : اگر مجموعه داده های فازی گره دار باشند آنگاه مساله (۱۴) دارای یک جواب یکتاست. اگر مجموعه داده ها گره دار مثبت باشند جواب یکتای مساله توسط حل دستگاه (S_+) بدست آید و اگر مجموعه داده ها گره دار منفی باشند جواب یکتا توسط حل دستگاه (S_-) داده می شود .

اثبات : فرض کنید که مجموعه داده ها گره دار مثبت باشند یعنی $b_+ \ge b_- \ge 0$ اما اگر $b_- \ge 0$ آنگاه دستگاه معادلات (S_-) دارای جواب قابل قبول برای مساله (۱۴) نیست پس (S_+) جواب قابل قبول مساله است .
برای حالتی که مجموعه داده ها گره دار منفی باشند استدلال مشابهی به کار می رود .

نکته ۱ : توجه کنید برای بعضی از مجموعه داده ها امکان دارد داشته باشیم $b_+ > 0 > b_-$. در این حالت مساله دارای دو جواب قابل قبول است ولی هر دوی b_+, b_- مقادیر نزدیک صفر هستند و این یعنی رابطه خیلی ضعیف بین متغیر مستقل و متغیر وابسته وجود دارد .

۴- مثال عددی

مثال ۴: مشاهدات فازی زیر را در نظر بگیرید .

$$\underline{x}_1(r) = \sqrt{r} \;,\; \overline{x}_1(r) = 2 - \sqrt{r} \qquad \underline{y}_1(r) = 1 + r^2 \;,\; \overline{y}_1(r) = 3 - r^2 \quad 0 \le r \le 1$$

$$\underline{x}_2(r) = 2 + r^2 \;,\; \overline{x}_2(r) = 4 - \sqrt{r} \qquad \underline{y}_2(r) = 3 + \sqrt{r} \;,\; \overline{y}_2(r) = 5 - \sqrt{r} \quad 0 \le r \le 1$$

$$\underline{x}_3(r) = 4 + r^2 \;,\; \overline{x}_3(r) = 6 - r^2 \qquad \underline{y}_3(r) = 6 + r^2 \;,\; \overline{y}_3(r) = 8 - \sqrt{r} \quad 0 \le r \le 1$$

$$S_+ : \begin{matrix} 6a_+ + 17.66b_+ = 25.66 \\ 17.66a_+ + 70.1b_+ = 96.84 \end{matrix} \Rightarrow (a_+, b_+) = (0.814, 1.176)$$

$$S_- : \begin{matrix} 6a_- + 17.66b_- = 25.66 \\ 17.66a_- + 70.1b_- = 93.157 \end{matrix} \Rightarrow (a_-, b_-) = (1.412, 0.973)$$

چون $b_+ \ge b_- \ge 0$ پس داده ها گره دار مثبت اند و جواب قابل قبول به صورت زیر است :

$$a = a_{+} = 0.814, b = b_{+} = 1.176 \Rightarrow y = 0.814 + 1.176x$$

۵- نتیجه گیری

هنگامیکه در مدل رگرسیون ، مشاهدات مربوط به متغیر مستقل و وابسته اعداد فازی اند با استفاده از یک تابع متر مناسب در فضای اعداد فازی پارامترهای مدل رگرسیون خطی ساده به روش کمترین مربعات فازی به راحتی قابل بر آورد هستند .

۶- مراجع

[1] Ma Ming , M.Fridman and A.Kandel, General fuzzy least squares, Fss,88 (1997), 107-118.
[2] Diamond, Fuzzy least squares , IS, 46 (1988) , 141 – 157.
[3] Diamond and P.Kloeden, Metric spaces of fuzzy sets, Fss, 35 (1990) , 241 – 249.
[4] Goetschel and W.Voxman , Elementary calcuius, Fss, 18 (1986), 31 – 43.
[5]A.L.Puri and D.A.Ralescu, Differentials for fuzzy functions, J.Math. Anal . Appl. 91 (1983), 552 – 558 .
[6] Wu cong-xin and Ma Ming , Embedding Problem of fuzzy number space: Part I, Fss, 44 (1991), 33-38.
[7] Wu cong-xin and Ma Ming , Embedding Problem of fuzzy number space : Part III , Fss 46 (1992) , 281 – 286.
[8] K.yosida, Functional Analysis (sprinter – Verlage , Berlin, 1965)
[۹] طاهری ، سید محمود، آشنایی با نظریه مجموعه های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی مشهد، ۱۳۷۸.