سوپرکارایی براساس مدل SBM در DEA با داده های بازه ای وفازی

عباسعلی نورا[1]،داود فربد[2]، محمدهادی فراهی[3]

چکیده

هدف اصلی دراین مقاله بررسی سوپرکارایی براساس مدلSBM(Slacks-Based Measure) درتحلیل پوششی داده ها (Data Envelopment Analysis)با داده های بازه ای و فازی می باشد. دراغلب مدلهای تحلیل پوششی داده ها (DEA) چندین واحد تصمیم گیرنده (Decision Making Unit) کارا هستند که رتبه بندی واحد های کارا اهمیت خاصی دارد . در این مقاله، رتبه بندی را سوپر کارایی می نامیم .از آنجا که در اکثر مسائل کاربردی داده‌ها نادقیق هستند لذا سوپر کارایی با داده های بازه ای و فازی را نیز که یک کار جدید می‌باشد مورد بررسی قرارمی دهیم .مسأله سوپر کارایی بر اساس مدلهای SBM با داده های بازه ای را با استفاده از روش نور[7] (اقتباس از روش دیمیتریس(Dimitris) [6]) و تبدیل کوپر به برنامه‌ریزی خطی تبدیل نموده و با حل آن تحت بهترین شرایط و بدترین شرایط یک جواب بهین بازه ای به دست می آوریم ، که چون مقدار کارایی در یک بازه قرار دارد لذا رتبه بندی بازه ای را نیز معرفی می کنیم .مساله سوپر کارایی بر اساس مدل SBM با داده های فازی (Fuzzy) را با روش α - برش به یک مدل بازه ای (Interva1)تبدیل کرده، که به روش بازه ای قابل حل می‌باشد.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده ها(DEA)، واحد تصمیم گیرنده (DMU)، سوپر کارایی،Super SBM، بازه ای ، فازی .

۱- مقدمه

یکی از مسایل مهم که برای سیاستگذاران و صاحبنظران اقتصادی از اهمیت بالایی برخوردار است ، مساله اندازه گیری کارآیی (Efficiency) می باشد .روشهای مختلفی برای اندازه گیری کارایی واحدهای تصمیم گیرنده (DMU) ارائه شد که می‌توان آنها را به دو دسته تقسیم کرد : روشهای پارامتری و روشهای غیر پارامتری . فارل(farel) در سال ۱۹۵۷ برای نخستین بار روشهای غیر پارامتری را مطرح کرد. مقاله فارل اساس کار مقاله چارنز ـ کوپر ـ رودز(CCR)(۱۹۷۸) شد آنهاتحلیل اولیه فارل را که در حالت چند ورودی ـ تک خروجی مطرح شد به حالت چند ورودی و چند خروجی تعمیم دادند . پس از آن بنکر ـ چارنز و کوپر (BCC)(۱۹۸۴) مدل BCC را ارائه کردند . این دو مقاله پایه بسیاری از مطالعات تحلیل کارایی شدند و این شاخه از علم تحقیق در عملیات به سرعت پیشرفت کرده و تحت عنوان تحلیل پوششی داده ها (DEA) نامیده شد.دراغلب مدلهای DEA،معمولاً چندین DMU کارا هستند. رتبه بندی بین این DMU های کارا موضوع تحقیقی جالبی است . مدلهای مختلفی برای رتبه بندی DMU ها ی کارا مطرح شده است از قبیل : مدلهای اندرسن و پیترسن (۱۹۹۳) ، دَیل

۱- استادیار، گروه تحصیلات تکمیلی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان
۲- کارشناس ارشد ، گروه تحصیلات تکمیلی، دانشگاه آزاد اسلامی واحد زاهدان
۳- دانشیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

وگرین (۱۹۹۴ و ۱۹۹۳) ، توفالیز و زو (۱۹۹۹) و زو (۲۰۰۱) ، که در این مقاله رتبه بندی را سوپرکارایی می نامیم. سوپر کارایی یک روش برای رتبه بندی واحدهای کارا می باشد که قادر است یک واحدکارا ورأسی مانند o را با مقدار کارایی بزرگتر از یک مشخص کند .در کلیهٔ مدلهای یاد شده از داده های دقیق استفاده شد ،اما از آنجایی که در اغلب مسائل عملی وکاربردی داده ها نادقیق(Imprecise) هستند لذا دراین مقاله علاوه بر سوپرکارایی با داده های بازه ای وفازی ، سوپرکارایی بر اساس مدل SBM با داده های بازه ای وفازی که یک کار جدید می باشد را مورد بررسی قرار می دهیم.

مدل(۱) یک مدل سوپرکارایی با ماهیت ورودی CCR می باشد :

$$\theta_o^{Super^*} = \min \theta_o^{Super}$$

$$s.t$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j x_{ij} \le \theta_o^{Super} x_{io} \qquad (۱)$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j y_{rj} \ge y_{ro}$$

$$\theta_o^{Super^*} \text{ و } \lambda_j (j \neq o) \ge 0$$

بر اساس نظریه ترال (۱۹۹۶) می توان نشان داد که : [9]

a) $\theta_o^{Super} > 1$ «یا» نشدنی است (۱) $\Leftrightarrow DMU_o \in E$

b) $\theta_o^{Super} = 1 \Leftrightarrow DMU_o \in E' \cup F$

E = مجموعه شامل DMU های کارا و راسی

E' = مجموعه شامل DMU های کارا و غیر راسی

F = مجموعه DMU هایی که کارای ضعیف هستند(نقاط مرزی با متغیرهای کمبودغیرصفرهستند)

۱-۱. کاراییSBM (Slacks Based Measure)

برای برآورد کارایی مدل DMUی (x_o, y_o) برنامهٔکسری (۲) را در نظر می گیریم :

$$\min \rho = \frac{1 - \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{s_i^-}{x_{io}}}{1 + \frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s} \frac{s_r^+}{y_{ro}}}$$

$$s.t \qquad (۲)$$

$$x_o = X\lambda + s^-$$

$$y_o = Y\lambda - s^+$$

$$\lambda \ge 0 \;,\; s^- \ge 0 \;,\; s^+ \ge 0$$

تعریف ۱ : DMU ی (x_o, y_o) کارای SBM اگر وفقط اگر $\rho^* = 1$ $(s^{-*} = 0, s^{+*} = 0)$ [5]

۲- سوپر کارایی بر اساس مدل SBM

مجموعه امکان تولید $P \setminus (x_o, y_o)$ را به صورت زیر درنظر بگیریم:

$$P \setminus (x_o, y_o) = \left\{ (x, y) \;\middle|\; x \ge \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j x_j \;,\; y \le \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j y_j \,, y \ge 0, \lambda \ge 0 \right\}$$

زیر مجموعه $\overline{P}\setminus(x_o,y_o)$ ازمجموعه $P\setminus(x_o,y_o)$ را به صورت زیردرنظر می گیریم :

$$\overline{P}\setminus(x_o,y_o)=P\setminus(x_o,y_o)\cap\{x\ge x_o, y\le y_o\}$$

با فرض $X>0$ و $Y>0$ ، $\overline{P}\setminus(x_o,y_o)$ غیر تهی است .

فاصله از (x_o,y_o) تا $(x,y)\in\overline{P}\setminus(x_o,y_o)$ بصورت اندیس δ تعریف شده است:

$$\delta=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{x_{io}}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{y_r}{y_{ro}}} \qquad (۳)$$

از (۳) نتیجه می گیریم که فاصله δ از ۱ کمتر نیست واین فاصله مساوی ۱ می‌شود اگر و فقط اگر $(x_o,y_o)\in\overline{P}\setminus(x_o,y_o)$

بر اساس ملاحظات بالا مدل سوپر کارایی (x_o,y_o) ((x_o,y_o) کارای SBM باشد) را به صورت (۴) تعریف می کنیم :

$[SuperSBM]$

$$\delta^*=\min\ \delta=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{x_{io}}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{y_r}{y_{ro}}}$$

$$\begin{aligned}
&s.t\\
&x\ge\sum_{\substack{j=1\\ j\ne o}}^{n}\lambda_j x_j \qquad (۴)\\
&y\le\sum_{\substack{j=1\\ j\ne o}}^{n}\lambda_j y_j\\
&x\ge x_o \ \text{and}\ \ y\le y_o\\
&y\ge 0,\quad \lambda\ge 0
\end{aligned}$$

قضیه ۲: فرض کنید $(\alpha x_o,\beta y_o)$ به طوری که $0\le\alpha\le 1$ و $\beta\ge 1$ یک DMU با ورودی های کمتر و خروجی های بیشتر از (x_o,y_o) اشد آنگاه مقدارسوپر کارایی $(\alpha x_o,\beta y_o)$ از (x_o,y_o) کمتر نیست .[8]

نکته : این قضیه دارای اهمیت زیادی است .

۱-۲- حل سوپرکارایی بر اساس مدل SBM

با استفاده از تبدیل چارنز ـ کوپر برنامه کسری(۴) را به یک برنامه ریزی خطی تبدیل می کنیم :

$$(LP)\quad \tau^*=\min\ \tau=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{x_{io}}$$

$$\begin{aligned}
&s.t\\
&\tilde{x}\ge\sum_{\substack{j=1\\ j\ne o}}^{n}\tilde{\lambda}_j\tilde{x}_j \qquad (۵)\\
&\tilde{y}\le\sum_{\substack{j=1\\ j\ne o}}^{n}\tilde{\lambda}_j\tilde{y}_j
\end{aligned}$$

$\hat{x} \geq tx_o \ , \quad \hat{y} \leq ty_o$

$\hat{\lambda} \geq 0 \ , \quad \hat{y} \geq 0 \ , \quad t > 0$

با فرض این که $\left(\tau^*, \tilde{x}^*, \tilde{y}^*, \tilde{\lambda}^*, t^*\right)$ جواب بهینه از (۵) باشد آنگاه جواب بهینه برای $[SuperSBM]$ به صورت زیر می شود :

$$\delta^* = \tau^* \quad , \quad \lambda^* = \frac{\tilde{\lambda}^*}{t^*} \ , \quad s^* = \frac{\tilde{x}^*}{t^*} \ , \quad y^* = \frac{\tilde{y}^*}{t^*}$$

۲-۲- سوپرکارایی براساس مدل SBMدرماهیت ورودی

به‌منظور تطبیق نمودن مدل سوپر کارایی برای ماهیت ورودی برنامه را به صورت زیر اصلاح می‌کنیم .

$$[SuperSBM(I)]$$

$$\delta_I = \min \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{x_{io}}$$

$$x \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n}\lambda_j x_j \qquad (۶)$$

$$y \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n}\lambda_j y_j$$

$$x \geq x_o \ , \quad y = y_o$$

$$\lambda \geq 0$$

قضیه زیر را برای مدل داریم:

قضیه۳: اگر ورودی های x_o به $x_o - \Delta x$ کاهش پیدا کند($x_o - \Delta x \geq 0$ ، $\Delta x \geq 0$) آن گاه برای مقدار بهینه $\delta_I^*(\Delta x)$ رابطه زیر برقرار است : $\delta_I^*(\Delta x) \geq \delta_I^*$

قضیه ۴ : $\delta_I^* \geq \delta^*$

۳- سوپرکارایی براساس مدل SBM در DEA باداده های بازه ای وفازی

در این قسمت علاوه بر بررسی یک مدل سوپر کارایی باداده های بازه ای وفازی ،سوپرکارایی بر اساس مدل SBM با داده های بازه ای وفازی را نیز حل می کنیم. در واقع رتبه بندی DMU هایی که کارای SBM هستند را با داده های بازه ای وفازی مورد بررسی قرار می دهیم.

۳-۱- سوپرکارایی با داده های بازه ای

اگر در مدل سوپرکارایی CCR ماهیت ورودی داده ها بازه ای باشند آنگاه مدل (۷)حاصل می گردد:

$$\theta^{Super^*} = \min \theta_o^{Super^*}$$

$$s.t$$

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n}\lambda_j\left[x_{ij}^L, x_{ij}^U\right] \leq \theta_o^{Super^*}\left[x_{io}^L, x_{io}^U\right] \qquad (۷)$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j\left[y_{rj}^{L},y_{rj}^{U}\right]\geq\left[y_{ro}^{L},y_{ro}^{U}\right]$$

$$\theta_o^{Super^*}\ ,\quad \lambda_j(j\neq o)\geq 0$$

با استفاده از روش نور [7] (با اقتباس از روش دیمیتریس (۲۰۰۲) [6])مدل (۷) را حل می‌کنیم .

مدل (۷) را تحت بهترین شرایط (۸) وبدترین شرایط (۹) حل می کنیم لذا داریم :

$$\theta^{Super^{L^*}}=\min\theta_o^{Super^L}$$

$$s.t$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j x_{ij}^{L}\leq\theta_o^{Super^L}x_{io}^{U}\tag{۸}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j y_{rj}^{U}\geq y_{ro}^{L}$$

$$\theta_o^{Super^L}\ \text{و}\ \lambda_j(j\neq o)\geq 0$$

و

$$\min\theta_o^{Super^U}=\theta_o^{Super^{U^*}}$$

$$s.t$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j x_{ij}^{U}\leq\theta_o^{Super^U}x_{io}^{L}\tag{۹}$$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j y_{rj}^{L}\geq y_{ro}^{U}$$

$$\theta_o^{Super^U}\ \text{و}\ \lambda_j(j\neq o)\geq 0$$

هر DMU که با (۷) ارزیابی می گردد ،مقدار کارایی آن در یک بازه قرار دارد که کران پایینی از حل (۸) وکران بالایی از حل (۹) بدست می آید .

۲-۳- سوپرکارایی براساس مدل SBM باداده های بازه ای

اگر در مدل Super SBM داده ها (ورودی وخروجی) بازه ای باشند آنگاه داریم :

$$\delta^*=\min\delta=\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{\left[x_{io}^{L},x_{io}^{U}\right]}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{y_r}{\left[y_{ro}^{L},y_{ro}^{U}\right]}}$$

$$s.t$$

$$x_i\geq\sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j\left[x_{ij}^{L},x_{ij}^{U}\right]\tag{۱۰}$$

$$
\begin{aligned}
&y_r \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \lambda_j \left[y_{rj}^L, y_{rj}^U\right] \\
&x_i \geq \left[x_{io}^L, x_{io}^U\right] \\
&y_r \leq \left[y_{ro}^L, y_{ro}^U\right] \\
&y \geq 0 \\
&\lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

به روش نور(اقتباس ازروش دیمیتریس(۲۰۰۲))مدل(۱۰)راحل می‌کنیم لذا داریم :

تحت بهترین شرایط به صورت(۱۱)می شود :

$$
\begin{aligned}
&\delta^{L^*} = \min\ \delta^L \quad = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\hat{x}_i}{x_{io}^U} \\
&s.t \\
&\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{\hat{y}_r}{y_{ro}^L} = 1 \\
&\hat{x}_i \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \hat{\lambda}_j x_{ij}^L \\
&\hat{y}_i \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \hat{\lambda}_j y_{rj}^U \\
&\hat{x}_i \geq t x_{io}^U \\
&\hat{y}_r \leq t y_{ro}^L \\
&\lambda_j \geq 0 \quad j \neq o \\
&t > 0
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

و تحت بدترین شرایط به صورت (۱۲) می شود:

$$
\begin{aligned}
&\min \delta^U = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\hat{x}_i}{x_{io}^L}\, x \\
&s.t \\
&\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{\hat{y}r}{y_{ro}^U} = 1 \\
&\hat{x}_i \geq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \hat{\lambda}_j x_{ij}^U \\
&\hat{y}_r \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq o}}^{n} \hat{\lambda}_j y_{rj}^L \\
&\hat{x}_r \geq t x_{io}^L \\
&\hat{y}_r \leq t y_{ro}^U \\
&\lambda_j \geq 0, j \neq o \\
&t > 0
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

هر واحد تصمیم گیرنده را که با مدل (۱۰) ارزیابی می کنیم ، مقدار کارایی که برای واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی از این مدل حاصل می شود در یک بازه قرار دارد که کران پایین این بازه را از مدل (۱۱) و کران بالای آن را از مدل (۱۲) می توان بدست آورد .

۳-۳- رتبه بندی

مدل $\left[SuperSBM\right]$ را برای یک DMU زمانی به کار می بریم که DMU کارای SBM باشد .

از طرفی داریم ، یک DMU کارای قوی است اگر $\theta^{L^*} = \theta^{U^*} = 1$ ($\theta^{L^*}, \theta^{U^*}$ به ترتیب مقدار بهینه کران بالا و پایین مدل CCR ماهیت ورودی هستند .)

در نتیجه اگر داده‌ها بازه ای باشند آنگاه داریم : (ρ^* مقار بهی‌نه مدلSBM)

یک DMU وقتی کارای قوی SBM است اگر $\rho^{L^*} = \rho^{U^*} = 1$ ($\rho^{L^*} = \rho^{U^*}$ به طور مشابه از روش نور (اقتباس از دیمیتریس) بدست می آید) .

DMU فقط در کران بالا کارای SBM است اگر $\rho^{U^*} = 1$ و $\rho^{L^*} < 1$

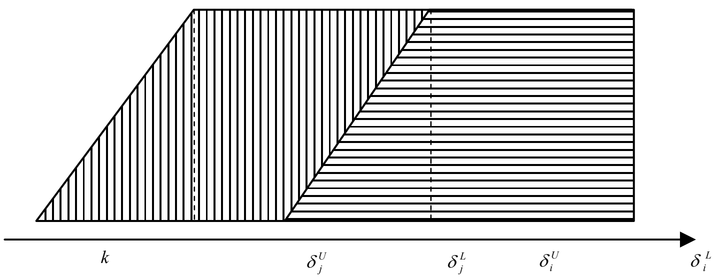
DMU ناکارای SBM است اگر $\rho^{U^*} < 1$

بین DMUهایی که کارای SBM هستند رتبه بندی را انجام می‌دهیم.رتبه بندی بر اساس کران بالا و یا کران پایین انجام می‌شود ، اگر بر اساس کران بالا رتبه بندی کنیم ابتدا توزیع تجمعی یکنواختی را برای هر واحد می‌سازیم .

با فرض $k = \max \delta_i^{U}$ داری‌م :

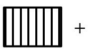
- سه حالت ممکن است اتفاق بیفتد که عبارتند از:

۱- اشتراک بازه ها تهی باشد بطوریکه داشته باشیم :



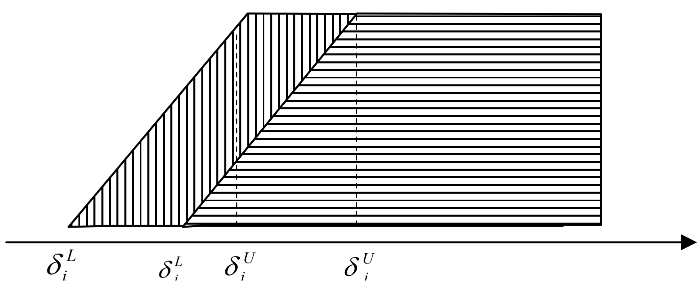
شکل ۱- اشتراک بازه ها تهی

$S_i =$ +

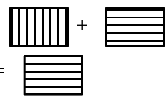
$S_j =$ 

$$\frac{1}{S_j} \geq \frac{1}{S_i} \Rightarrow \quad Rank\left(DMU_j\right) \geq Rank\left(DMU_i\right)$$

۲- اگر $\delta_i^L \leq \delta_j^L$ ، $\delta_i^U \leq \delta_j^U$ ، $\delta_j^L \leq \delta_i^U$ آنگاه داریم :



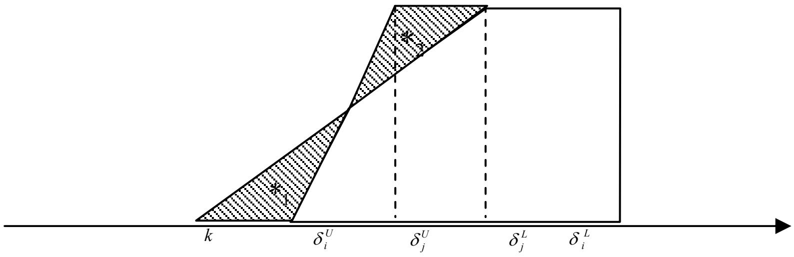
شکل ۲- اشتراک بازه ها مخالف تهی

$S_i =$ 

$S_j =$

$$\frac{1}{S_j} \geq \frac{1}{S_i} \Rightarrow \quad Rank(DMU_j) \geq Rank(DMU_i)$$

۳- اگر $\left[\delta_i^L \;\; \delta_i^U\right] \subseteq \left[\delta_j^L \;\; \delta_j^U\right]$ (DMU_j زیر مجموعه DMU_i) باشد.



شکل ۳- اشتراک بازه ها مخالف تهی و DMU_j زیر مجموعه ی DMU_i

$$if \quad *_1 < *_2 \quad \Rightarrow \quad j \text{ مساحت سطح} > i \text{ مساحت سطح} \Rightarrow Rank(DMU_i) > Rank(DMU_j)$$

$$if \quad *_2 < *_1 \quad \Rightarrow \quad i \text{ مساحت سطح} > j \text{ مساحت سطح} \Rightarrow Rank(DMU_j) > Rank(DMU_i)$$

تبصره : رتبه بندی برای دو واحد قابل تعمیم برای n واحد می‌باشد. ($n > 2$)

مثال: جدول زیر را که شامل پنج DMU که هر کدام دارای دو ورودی و دو خروجی میباشند را در نظر میگیریم .

جدول ۱- داده های بازه ای

DMU_S	ورودی اول	ورودی دوم	خروجی اول	خروجی دوم
D_1	[8 10]	[2 7]	[3 6]	[3 6]
D_2	[3 10]	[1 3]	[5 6]	[4 8]
D_3	[3 6]	[6 9]	[6 8]	[1 8]
D_4	[8 8]	[1 2]	[4 6]	[6 7]
D_5	[2 8]	[3 10]	[5 7]	[2 6]

بازه کارائی بدست آمده به وسیله روش نور و رتبه بندی آن به صورت جدول ۲ می باشد:

جدول۲- بازه کارایی و رتبه بندی(روش نور)

رتبه بندی	روش نور	DMU_S
5	[0.1214 1]	D_1
1	[0.4545 1]	D_2
3	[0.2857 1]	D_3
2	[0.375 1]	D_4
4	[0.2542 1]	D_5

۴-۳- سوپر کارایی بر اساس مدل SBM با داده های فازی

مدل $[SuperSBM]$ را با داده های فازی مثلثی (ورودی‌ها و خروجی‌ها اعداد فازی مثلثی باشند) در نظر می‌گیریم :

$$
\begin{aligned}
&\delta^* = \min\delta = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{\left(x_{io}^L, x_{io}^m, x_{io}^U\right)}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{y_r}{\left(y_{ro}^L, y_{ro}^m, y_{ro}^U\right)}}\\
&s.t\\
&x_i \ge \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j\left(x_{ij}^L, x_{ij}^m, x_{ij}^U\right)\\
&y_r \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j\left(y_{rj}^L, y_{rj}^m, y_{rj}^U\right)\\
&x_i \ge \left(x_{io}^L, x_{io}^m, x_{io}^U\right)\\
&y_r \le \left(y_{ro}^L, y_{ro}^m, y_{ro}^U\right)\\
&y \ge 0\\
&\lambda \ge 0
\end{aligned}
\tag{۱۳}
$$

در ابتدا مدل فازی (۱۳) را با استفاده از روش α ـ برش تبدیل به یک مدل بازه ای می کنیم : بنابراین داریم:

$$
\begin{aligned}
&\delta^* = \min\delta = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{\left(\alpha x_{io}^m + (1-\alpha)x_{io}^L, \alpha x_{io}^m + (1-\alpha)x_{io}^U\right)}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{y_r}{\left(\alpha y_{ro}^m + (1-\alpha)y_{ro}^L, \alpha y_{ro}^m + (1-\alpha)y_{ro}^U\right)}}\\
&s.t\\
&x_i \ge \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j\left(\alpha x_{ij}^m + (1-\alpha)x_{ij}^L, \alpha x_{ij}^m + (1-\alpha)x_{ij}^U\right)\\
&y_r \le \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j\left(\alpha y_{rj}^m + (1-\alpha)y_{rj}^L, \alpha y_{rj}^m + (1-\alpha)y_{rj}^U\right)\\
&x_i \ge \left(\alpha x_{io}^m + (1-\alpha)x_{io}^L, \alpha x_{io}^m + (1-\alpha)x_{io}^U\right)\\
&y_r \le \left(\alpha y_{ro}^m + (1-\alpha)y_{ro}^L, \alpha y_{ro}^m + (1-\alpha)y_{ro}^U\right)\\
&y \ge 0 \;\;،\;\; \lambda \ge 0 \;\;،\;\; 0 \le \alpha \le 1
\end{aligned}
\tag{۱۴}
$$

مدل(۱۴) یک مدل بازه ای است که با انتخاب ساده $\alpha = 0$ تبدیل به مدل (۱۵) می شود :

$$\delta^* = \min\delta = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{x_i}{\left[x_{io}^L, x_{io}^U\right]}}{\frac{1}{s}\sum_{r=1}^{s}\frac{y_r}{\left[y_{ro}^L, y_{ro}^U\right]}}$$

$$\begin{aligned}
&s.t\\
&x_i \geq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j\left[x_{ij}^L, x_{ij}^U\right]\\
&y_r \leq \sum_{\substack{j=1\\ j\neq o}}^{n}\lambda_j\left[y_{rj}^L, y_{rj}^U\right] \qquad (15)\\
&x_i \geq \left[x_{io}^L, x_{io}^U\right]\\
&y_r \leq \left[y_{ro}^L, y_{ro}^U\right]\\
&y \geq 0\\
&\lambda \geq 0
\end{aligned}$$

مدل (۱۵) همان مدل بازه ای (۱۰) است که در بخش ۳-۲ حل شده است .

۴- نتیجه

سوپرکارایی براساس مدلSBM درتحلیل پوششی داده ها باداده های قطعی، بازه ای و فازی با استفاده ازروش نور برای اولین بار در این مقاله ارایه شد و روشی برای رتبه بندی واحدهای تصمیم گیرنده با داده های بازه ای تدوین گردید.

برای رتبه‌بندی مدلهای فازی ابتدا مدل فازی را به بازه‌ای تبدیل کرده و سپس رتبه‌بندی بازه‌ای را اعمال می‌کنیم .
اهمیت موارد مطروحه با طرح مسا له‌ای بیان گردیده است .

مراجع

[۱] فربد، داود. سوپرکارایی براساس مدل SBM درتحلیل پوششی داده‌ها با داده‌های بازه‌ای و فازی، پایان‌نامه کارشناسی ارشد ریاضی کاربردی دانشگاه آزاداسلامی واحد زاهدان درسال ۱۳۸۲، عباسعلی نورا (استاد راهنما)، محمدهادی فراهی (استاد مشاور).

[2]. Andersen , P. , Petersen , N.C, 1993, *A procedure for ranking efficient units in data envelopment analysis*, Management Science 39 , 1261-1264 .

[3]. Cooper,W.W. , Park , K.S., YU.G,1999, *IDEA and AR-IDEA: Models for dealing with imprecise data in DEA* , Management Science 45 , 597 – 607.

[4]. Cooper , W.W., Park , K.S, YU.G, 2000 . *An illustrative application of IDEA(Imprecise Data Envelopment Analysis) to a korean mobile telecommunication company*, Forthcoming in Operations Research .

[5]. Cooper, W.W., Seiford , L.M ., Tone , K. 2000 ., *Data Envelopment Analysis – A comprehensive text models , Applications, Reference and DEA solver software*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht

[6]. Dimitris , K. Despotis , Yiannis .G. Similaris., 2002 , *Data Envelopment Analysis With Imprecise Data* . European Journal of Operational Research 190 , 29-36 .

[7]. Noora ,A.A.,2002, *Interval and Fuzzy Linear Programming* , Presented in Islamic Azad University of Khoramabad .

[8] . Tone ,K.,2002, *A Slacks-Based Measure of Super-Efficiency in Data Envelopment Analysis* . European Journal of Operational Research 143 , 32 – 41

[9] . Zhu , J. , 2001 , *Super Efficiency and DEA Sensitivity Analysis* . European Journal of Operational Research 129 , 443 – 455 .