پنجمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران

هفدهم الی نوزدهم شهریورماه ۱۳۸۳

رگرسیون کمترین مربعات فازی با استفاده از عملگرهای حافظ شکل

تکتم بزرگوار[۱]، سید محمود طاهری[۲]

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

چکیده

در این مقاله به بررسی و کاربرد یک روش جدید در رگرسیون فازی که در آن داده های ورودی، خروجی و ضرایب مدل اعداد فازی هستند، پرداخته می شود. در این شیوه از عملگرهای حافظ شکل که بر اساس T_W(ضعیفترین T- نرم) است، استفاده می شود. همانطور که می‌دانیم چنانچه از عملگر مینیمم به عنوان T- نرم استفاده شود، حاصل ضرب دو عدد فازی لزوماً دارای همان شکل اعداد ضرب شونده نخواهد بود، اما در صورت استفاده از T_W شکل اعداد ضرب شونده حفظ می شود. رویکرد فوق را با استفاده از مجموعه‌ای از داده‌ها در زمینه ی مطالعات مربوط به متغیرهای خاک و همچنین داده هایی در زمینه رنگرزی در صنعت نساجی تشریح می‌کنیم.

واژه های کلیدی: رگرسیون کمترین مربعات فازی – عملگرهای حافظ شکل – ضعیف ترین T- نرم.

۱- مقدمه و تاریخچه

مدل های رگرسیونی برای بررسی ارتباط بین متغیرهای یک سیستم مورد استفاده قرار می گیرند. در این مدل ها بر اساس مشاهدات مربوط به متغیرهای مستقل (توصیفی) و وابسته (پاسخ)، تابعی به منظور پیش بینی متغیر وابسته بنا می شود. متغیرهای مستقل عامل هایی هستند که بر متغیر وابسته مؤثرند. اگر در سیستم مورد مطالعه مشاهدات مربوط به متغیرها فازی باشند یا متغیرها معمولی باشند ولی احساس شود که ارتباط بین آنها مبهم و نادقیق است، طبیعی است که از رگرسیون فازی به جای رگرسیون معمولی استفاده کنیم.

رگرسیون فازی تاریخچه ای بیش از دو دهه دارد. این نوع رگرسیون اولین بار توسط تاناکا ($Tanaka$) و همکاران [۱۳] با عنوان رگرسیون امکانی، مورد بحث و بررسی قرار گرفت. روش آنان توسط بعضی از محققان از جمله پترز ($Peters$) [۱۲]، تاناکا و لی (Lee) [۱۴]، و ین (Yen) و همکاران [۱۶] دنبال شد و گسترش یافت.

از سوی دیگر روش کمترین مربعات نیز برای بررسی مدل های رگرسیون فازی به کار گرفته شده است. این شیوه را، که بررسی حاضر مبتنی برآن است، نخستین بار کلمینس ($Celmins$) [۲] و دیاموند ($Diamond$) [۳و۴] مورد توجه قرار دادند.

در مدل رگرسیون فازی یک متغیره کلی ترین حالت، حالت زیر است

$$(F_4): \quad \widetilde{Y} = \widetilde{A} \oplus (\widetilde{B} \otimes \widetilde{X}) \qquad \widetilde{A}, \widetilde{B}, \widetilde{X} \in F(\Re)$$

۱- دانشجوی کارشناسی ارشد، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

۲- استادیار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه صنعتی اصفهان

که در آن مشاهدات هر دو متغیر فازی هستند و به علاوه ضرایب مدل یعنی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ نیز اعداد فازی می باشند.

دیاموند با تعریف یک متر روی اعداد فازی حالات خاصی از مدل فوق را بر رسی نموده است [۳]. بررسی مدل در حالات کلی به دلیل آن که حاصل ضرب دو عدد فازی، بر پایه‌ی T- نرم های متداول، حافظ شکل اعداد ضرب شونده نیستند یک موضوع چالش برانگیز بوده است. هانگ (Hong) و همکاران [۸] شیوه ای را برای مدل سازی داده های فازی به صورت مدل فوق ارائه دادند که در آن از ضعیف ترین T- نرم (به کوتاهی T_W) برای ضرب دو عدد فازی استفاده شده است. بدین شیوه حاصل ضرب دو عدد فازی LR دارای همان شکلی است که اعداد ضرب شونده دارند.

در مقاله ی حاضر، روش فوق را مورد بررسی قرار می دهیم و از آن برای مدل سازی مجموعه‌ای از داده‌های واقعی استفاده می‌کنیم. در بخش دوم، مفاهیمی مقدماتی مطرح می شود. در این بخش عدد فازی، عدد فازی LR، عدد فازی مثلثی، متر دیاموند، چند گزاره در باره ی T- نرم ها و سپس اعمال حسابی را بر اساس T_W مرور می کنیم. در بخش سوم به بیان مسئله ی مورد بحث می پردازیم. در بخش چهارم، به برازش مدل رگرسیونی می پردازیم که در آن ورودی، خروجی و ضرایب فازی هستند و یک روش جدید را برای به دست آوردن ضرائب مدل مورد بررسی قرار می دهیم. در بخش پنجم دو مثال عددی را، با داده های واقعی، برای تشریح بیشتر موضوع ارائه می دهیم.

۲- مفاهیم اولیه

تعریف ۱: یک مجموعه فازی نرمال، محدب وتک نمایی مانند $\widetilde{A}$ از $\Re$(مجموعه اعداد حقیقی) را که $\widetilde{A}(x)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد، یک عدد فازی گوییم.

تعریف ۲: عدد فازی $\widetilde{A}$ را یک عدد فازی LR گوئیم و به صورت $\widetilde{A}=(a,\alpha,\beta)_{LR}$ نشان می دهیم هرگاه تابع عضویت آن به صورت زیر باشد

$$\widetilde{A}(x)=\begin{cases} R(\frac{x-a}{\beta}) & a\le x\le a+\beta \\ L(\frac{a-x}{\alpha}) & a-\alpha\le x\le a \end{cases}$$

که در آن R و L توابعی غیر صعودی و پیوسته از R^+ به [۰و۱] هستند به طوری که $L(\circ)=R(\circ)=1$ و $L(1)=R(1)=\circ$.

نکته ۱: در حالتی که $L(x)=R(x)=1-x$، عدد فازی $\widetilde{A}$ عدد فازی مثلثی نامیده شده و با نماد $(a,\alpha,\beta)_T$ نشان داده می شود. جنانچه $L=R$ و $\alpha=\beta$ آن گاه، $\widetilde{A}$ عدد فازی متقارن نامیده شده و با نماد $(a,\alpha)_L$نشان داده می شود.

تعریف ۳: فرض کنید که $\widetilde{Y}=(m_y,\alpha_y,\beta_y)_T$ و $\widetilde{X}=(m_x,\alpha_x,\beta_x)_T$ دو عدد فازی مثلثی باشند. آن گاه فاصله بین دو عدد فازی $\widetilde{X}$ و $\widetilde{Y}$ بر پایه ی متر دیاموند به صورت جذر مثبت عبارت زیر تعریف می شود

$$d^2(\widetilde{X},\widetilde{Y})=(m_x-m_y)^2+[(m_x-\alpha_x)-(m_y-\alpha_y)]^2+[(m_x+\beta_x)-(m_y+\beta_y)]^2$$

تعریف ۴: تابع دو متغیره $T(x,y):I*I\rightarrow I$ را یک $T-$نرم گوییم هرگاه در شرایط زیر صدق کند

۱- $T(x,1)=x$

۲- یکنوایی : $x_1\le x_2\,,y_1\le y_2\Rightarrow T(x_1,y_1)\le T(x_2,y_2)$

۳- جابجایی : $T(x,y)=T(y,x)$

۴- شرکت‌پذیری : $T[x,T(y,z)] = T[T(x,y),z]$

گزاره ۱: [۱۰] هر $T-$ نرم در نامساوی $T_W(a,b) \leq T(a,b) \leq T_M(a,b)$ زیر صدق می‌کند، که در آن

$$T_W(a,b) = \begin{cases} a & if \quad b=1 \\ b & if \quad a=1 \\ \circ & o.w \end{cases} \quad , \quad T_M(a,b) = \min(a,b)$$

با استفاده از اصل گسترش [۱۷] که بر اساس یک T- نرم تعریف می شود ، می‌توان اعمال حسابی روی اعداد حقیقی را برای اعداد فازی تعمیم داد. در این باره تعریف ۵ و قضیه ۱ را از[۱۷]، و گزاره های ۲ و۳، و قضیه ۲ را از [۷]، مبتنی بر [۹] و [۱۱]، ذکر می کنیم.

تعریف ۵ : جمع و ضرب دو عدد فازی $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ به صورت مجموعه های فازی با توابع عضویت زیر تعریف می شوند

$$(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B})(z) = \underset{z=x+y}{Sup}\, T(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(y)) \ ,$$

$$(\widetilde{A} \otimes \widetilde{B})(z) = \underset{z=xy}{Sup}\, T(\widetilde{A}(x), \widetilde{B}(y))$$

قضیه ۱: فرض کنید $\widetilde{A} = (m_x, \alpha_x, \beta_x)_{LR}$ و $\widetilde{B} = (m_y, \alpha_y, \beta_y)_{LR}$ دو عدد فازی LR باشند، آنگاه، بر پایه ی T_M،

$$(m_x, \alpha_x, \beta_x)_{LR} \oplus (m_y, \alpha_y, \beta_y)_{LR} = (m_x + m_y, \alpha_x + \alpha_y, \beta_x + \beta_y)_{LR}$$
$$\lambda(m,\alpha,\beta)_{LR} = (\lambda m, \lambda\alpha, \lambda\beta)_{LR} \qquad if \quad \lambda \geq \circ$$
$$\lambda(m,\alpha,\beta)_{LR} = (\lambda m, |\lambda|\beta, |\lambda|\alpha)_{LR} \quad if \quad \lambda < \circ$$

نکته ۲: اگر $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ دو عدد فازی LR باشند، آن گاه، بر پایه ی T_M، $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$ لزوماً یک عدد فازی LR نیست.

گزاره ۲: اگر $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ دو عدد فازی LR باشند، آنگاه، بر پایه ی T_W، $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$ و $\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}$ اعدد فازی LR هستند.

گزاره ۳: T_W تنها $T-$ نرمی است که در حاصل ضرب دو عدد فازی LR، شکل LR اعداد ضرب شونده را حفظ می کند.

قضیه ۲: فرض کنید $\widetilde{A} = (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$ و $\widetilde{B} = (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ دو عدد فازی LR باشند. در این صورت با استفاده از T_W در اصل گسترش

الف :

$$(\widetilde{A} \oplus \widetilde{B}) = (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \oplus (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR} = (a+b, \max(\alpha_A, \alpha_B), \max(\beta_A, \beta_B))_{LR}$$

ب: اگر $L = R$ باشد

$$\begin{aligned}(\widetilde{A} \ominus \widetilde{B}) &= (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \ \Theta\, (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR} \\ &= (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR} \oplus (-b, \beta_B, \alpha_B)_{LR} \\ &= (a-b, \max(\alpha_A, \beta_B), \max(\beta_A, \alpha_B))_{LR}\end{aligned}$$

قضیه ۳: [۶] فرض کنید $\widetilde{A} = (a, \alpha_A, \beta_A)_{LR}$ و $\widetilde{B} = (b, \alpha_B, \beta_B)_{LR}$ دو عدد فازی LR باشند. در این صورت، با استفاده از T_W در اصل گسترش، مقدار $\widetilde{A} \otimes \widetilde{B}$ به صورت زیر به دست می آید

حالت اول. $a > \circ$ و $b > \circ$

$$\widetilde{A} \otimes \widetilde{B} = (ab, \max(\alpha_A b, \alpha_B a), \max(\beta_A b, \beta_B a))_{LR}$$

حالت دوم. $a < \circ$ و $b < \circ$

$$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}=(ab,\max(\beta_A|b|,\beta_B|a|),\max(\alpha_A|b|,\alpha_B|a|))_{LR}$$

حالت سوم. $a=0$ و $b>0$

$$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}=(0,\alpha_A b,\beta_A b)_{LR}$$

حالت چهارم. $a=0$ و $b<0$

$$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}=(0,\beta_A|b|,\alpha_A|b|)_{RL}$$

حالت پنجم . $a=0$ و $b=0$

$$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}=(0,0,0)_{LR}=I_{\{0\}}(x)$$

حالت ششم . برای $a<0$ و $b>0$ و تحت فرض $L=R$:

$$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}=(ab,\max(\alpha_A b,\beta_B|a|),\max(\beta_A b,\alpha_B|a|))_{LL}$$

در حالت خاص **اگر** $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ دو عدد فازی متقارن باشند یعنی $L=R$ و $\alpha_A=\beta_A$ و $\alpha_B=\beta_B$ آنگاه بر اساس T_W

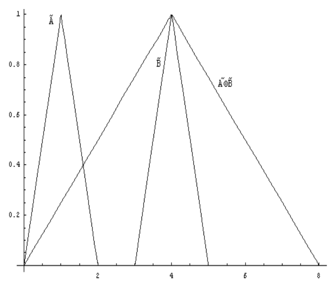
$$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}=(ab,\max(\alpha_A|b|,\alpha_B|a|))_L$$

مثال ۱ الف) فرض کنید $\widetilde{A}=(1,1,1)_T$ و $\widetilde{B}=(4,1,1)_T$. چون $a=1>0$ و $b=2>0$, بنا به حالت اول داریم

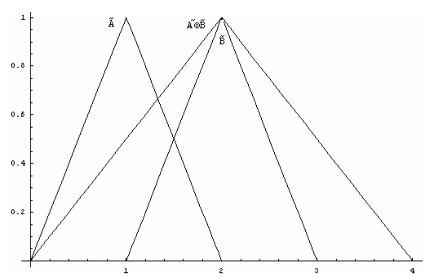
$$(\widetilde{A}\otimes\widetilde{B})=(4,\max(4,1),\max(4,1))_T=(4,4,4)_T$$

ب) فرض کنید $\widetilde{A}=(1,1,1)_T$ و $\widetilde{B}=(2,1,1)_T$. چون $a=1>0$ و $b=2>0$, بنا به حالت اول داریم

$$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}=(2,\max(2,1),\max(2,1))_T=(2,2,2)_T$$



شکل ۱ الف



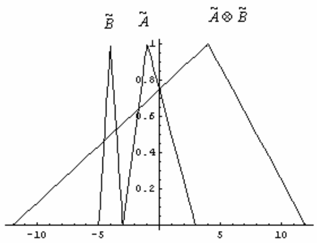
شکل ۱ ب

مثال ۲ الف) فرض کنید $\widetilde{A}=(-1,1,3)_T$ و $\widetilde{B}=(-2,2,1)_T$. چون $a=-1<0$ و $b=-2<0$ بنا به حالت دوم داریم

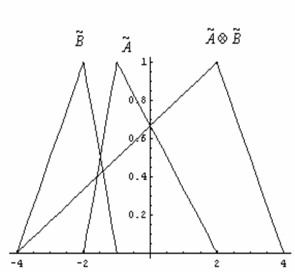
$$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}=(2,\max(3|-2|,|-1|),\max(|-2|,2|-1|))_T=(2,6,2)_T$$

ب) فرض کنید $\widetilde{A}=(-1,2,4)_T$ و $\widetilde{B}=(-4,1,0.5)_T$. چون $a=-1<0$ و $b=-4<0$ بنا به حالت دوم داریم

$$\widetilde{A}\otimes\widetilde{B}=(4,\max(4|-4|,0.5|-1|),\max(|-4|,|-1|))_T=(4,16,8)_T$$



شکل ۲ ب



شکل ۲ الف

۳ـ مدل های مختلف رگرسیون خطی فازی

همانطور که می دانیم مدل های متداول رگرسیون فازی به صورت زیر می باشند، که در آنها یا مشاهدات فازی هستند و یا ضرایب فازی می باشند

$$(F_1):\quad \widetilde{Y} = a \oplus b\widetilde{X} \quad a,b \in \Re \qquad \widetilde{X} \in F(\Re)$$
$$(F_2):\quad \widetilde{Y} = \widetilde{E} \oplus b\widetilde{X} \quad b \in \Re \quad \widetilde{E},\widetilde{X} \in F(\Re)$$
$$(F_3):\quad \widetilde{Y} = \widetilde{A} \oplus \widetilde{B}x \quad x \in \Re \quad \widetilde{A},\widetilde{B} \in F(\Re)$$

مدل کلی تر از سه مدل فوق مدل زیر است که در آن مشاهدات و ضرایب هر دو فازی هستند:

$$(F_4):\quad \widetilde{Y} = \widetilde{A} \oplus (\widetilde{B} \otimes \widetilde{X}) \qquad \widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{X} \in F(\Re)$$

در همه ی این مدل ها فرض می شود که مشاهدات مربوط به متغیر Y نیز اعداد فازی هستند.

۴ـ مدل با ورودی، خروجی و ضرایب فازی

فرض کنید زوج مشاهداتی به صورت $(\widetilde{X}_1,\widetilde{Y}_1)$ و ... و $(\widetilde{X}_n,\widetilde{Y}_n)$ در اختیار داریم که در آنها $\widetilde{X}_i = (x_i,\zeta_i)_L$ و $\widetilde{Y}_i = (y_i,\eta_i)_L$ اعداد فازی متقارن هستند. می خواهیم بر اساس روش کمترین مربعات فازی و با استفاده از متر دیاموند (تعریف ۳) مدل رگرسیونی فازی را به این داده ها برازش دهیم. کلی ترین حالت از مدل های فوق را که مدل F_4 می باشد در نظر می گیریم.

$$(H):\quad \widetilde{Y} = \widetilde{A} \oplus (\widetilde{B} \otimes \widetilde{X}) \quad \widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{X},\widetilde{Y} \in F_{LR}(\Re)$$

دقت کنید که برای ساده شدن محاسبات فرض نموده ایم که $\widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{X},\widetilde{Y}$ اعداد فازی LR متقارن هستند.

معادله کمترین مربعات برای مدل H به صورت زیر است

$$(D):\quad \min \quad r(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} D_{LR}(\widetilde{A} \oplus (\widetilde{B} \otimes \widetilde{X}_i),\widetilde{Y}_i)^2$$

فرض کنید که $\widetilde{A} = (a,\alpha)_L$ و $\widetilde{B} = (b,\beta)_L$. چون

$$\widetilde{A} \oplus (\widetilde{B} \otimes \widetilde{X}_i) = (a + bx_i).\max(\alpha,|b|\xi_i,|x_i|\beta)_L$$

پس داریم

$$D_{LR}{}^2(\widetilde{A} \oplus (\widetilde{B} \otimes \widetilde{X}_i),\widetilde{Y}_i) = [(a+bx_i) - \max(\alpha,|b|\xi_i,|x_i|\beta) - (y_i - \eta_i)]^2$$
$$+ [(a+bx_i) + \max(\alpha,|b|\xi_i,|x_i|\beta) - (y_i + \eta_i)]^2 + (a + bx_i - y_i)^2$$

فرض کنید

$$f(a,b)=\sum_{i=1}^{n}[2(a+bx_i)^2+(y_i-\eta_i)^2+(y_i+\eta_i)^2-2(a+bx_i)(y_i-\eta_i)$$
$$-2(a+bx_i)(y_i+\eta_i)+(a+bx_i-y_i)^2]$$

آنگاه

$$r(\widetilde{A},\widetilde{B})=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}[2(\max(\alpha,|b|\xi_i,|x_i|\beta))^2-4\eta_i\max(\alpha,|b|\xi_i,|x_i|\beta)]$$

برای براورد a، داریم

$$\frac{\partial r}{\partial a}=\frac{\partial f}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}[4(a+bx_i)-2(y_i-\eta_i)-2(y_i+\eta_i)+2(a+bx_i-y_i)]$$
$$=6\sum_{i=1}^{n}(a+bx_i-y_i)=6na+6b\sum_{i=1}^{n}x_i-6\sum_{i=1}^{n}y_i$$
$$\frac{\partial r^2}{\partial^2 a}=\frac{\partial f^2}{\partial^2 a}=6n>0$$

بنابراین براورد مقدار a به صورت $a^*=\bar{y}-b\bar{x}$ به دست می آید که

$$\bar{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i \quad \bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$$

چون max تابعی مشتق‌پذیر نیست, نمی‌توانیم معادلاتی صریح برای b و α و β پیدا کنیم. به منظور به دست آوردن جواب های b^* و α^* و β^* و از بین بردن عامل max تعریف می‌کنیم [۸]:

$$A(i,k)=\begin{cases}\alpha & k=1\\ |b|\xi_i & k=2 \qquad i=1,2,\ldots,n\\ |x_i|\beta & k=3\end{cases}$$

در واقع فرض می‌شود اگر $k=1$ باشد $\max(\alpha,|b|\xi_i,|x_i|\beta=\alpha$, اگر $k=2$ باشد $\max(\alpha,|b|\xi_i,|x_i|\beta=|b|\xi_i$ و اگر $k=3$ باشد $\max(\alpha,|b|\xi_i,|x_i|\beta=|x_i|\beta$ است. حال فرض کنید G مجموعه تمام توابع به صورت

$$g:\quad \{1,2,\ldots n\}\rightarrow\{1,2,3\}$$

باشد. برای هر $g\in G$ تعریف می‌کنیم

$$r_g(\widetilde{A},\widetilde{B})=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}[2(A(i,g(i)))^2-4\eta_i A(i,g(i))]$$

اکنون ضرایب b و α و β را طوری تعیین می‌کنیم که $r_g(\widetilde{A},\widetilde{B})$ مینیمم شود. بنابراین

$$\min r(\widetilde{A},\widetilde{B})=\min_{g\in G}\ \min_{\{b,\alpha,\beta\}} r_g(\widetilde{A},\widetilde{B})$$

مدل با ضرایب دقیق

چنان چه $\alpha=\beta=0$, مدل (H) به مدل زیر تبدیل می‌شود

$$(H_1):\quad \widetilde{Y}=a\oplus(b\otimes\widetilde{X})\quad a,b\in\Re\quad \widetilde{X}\in F(\Re)$$

و

$$r(a,b)=f(a,b)+\sum_{i=1}^{n}[2(|b|\xi_i)^2-4\eta_i|b|\xi_i]$$

مدل با ضریب زاویه ی دقیق

چنان چه $\beta = ۰$, مدل (H) به مدل زیر تبدیل می‌شود

$$(H_2): \quad \tilde{Y} = \tilde{A} \oplus (b \otimes \tilde{X}) \quad b \in \Re \quad \tilde{A}, \tilde{X} \in F(\Re)$$

و

$$r(\tilde{A}, b) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{n} [2\max(\alpha, |b|\xi_i)^2 - 4\eta_i \max(\alpha, |b|\xi_i)]$$

مدل با عرض از مبدأ دقیق

چنان چه $\alpha = ۰$, مدل (H) به مدل زیر تبدیل می‌شود

$$(H_3): \quad \tilde{Y} = a \oplus (\tilde{B} \otimes \tilde{X}) \quad a \in \Re \quad \tilde{B}, \tilde{X} \in F(\Re)$$

و

$$r(a, \tilde{B}) = f(a,b) + \sum_{i=1}^{n} [2(\max(|b|\xi_i, |x_i|\beta))^2 - 4\eta_i \max(|b|\xi_i, |x_i|\beta)]$$

۵ ـ کاربرد در مدل سازی داده‌های نساجی

مثال۴ [۱] (مدل سازی متغیر های رنگرزی) داده‌های جدول ۳ مربوط به داده های مطالعه دو متغیر غلظت رنگ و میزان جذب رنگ توسط پارچه در بخش رنگرزی صنعت نساجی می باشد. در این جدول متغیر $\tilde{X}$ نشان دهنده ی غلظت رنگ(بر حسب گرم در لیتر) و متغیر $\tilde{Y}$ نشان دهنده ی میزان جذب رنگ توسط پارچه(بر حسب $\frac{k}{s}$) است. در جدول ۴ نتایج برازش مدل ها درج شده است. برازش مدل ها طبق روش هایی که در بخش توضیح دادیم انجام شده است. در باره از نرم افزار $S - Pluse$ برای انجام محاسبات استفاده شده است.

جدول۱- ورودی فازی ـ خروجی فازی

$\tilde{X} = (x, \xi)$	$\tilde{Y} = (y, \eta)$
(۰/۸۸ , ۰/۱)	(۱۶/۵, ۱/۶۵)
(۱/۱۳ , ۰/۱)	(۱۸/۶, ۱/۸۶)
(۱/۳۱ , ۰/۱)	(۱۹/۳, ۱/۹۳)
(۱/۹۸ , ۰/۱۵)	(۲۰/۳ , ۲/۰۳)
(۱/۰۲ , ۰/۱)	(۱۷/۳ ,۱/۷۳)
(۱/۲۹ , ۰/۱)	(۲۰/۴ ,۲/۰۴)
(۱/۵۲ ,۰/۱)	(۱۹/۳ , ۱/۹۳)
(۱/۳۳ ,۰/۱)	(۲۱/۹ , ۲/۱۹)
(۱/۷۱ ، ۰/۱)	(۱۵/۹ ، ۱/۵۹)
(۲/۰۰ ، ۰/۱۵)	(۱۸/۳ ، ۱/۸۳)

جدول ۲

مدل	ضرایب	مجموع مانده ها
$H_1 : \tilde{Y} = a \oplus (b \otimes \tilde{X})$	$a =$ ۱۶/۲۵۳ $\quad b =$ ۱/۷۸۳	۱۵۱/۲۶۹
$H_2 : \tilde{Y} = \tilde{A} \oplus (b \otimes \tilde{X})$	$\tilde{A} =$ (۱۷/۵۷۹ , ۱/۸۷۸) $\quad b =$ ۰/۸۴۸	۹۱/۲۵۲
$H_3 : \tilde{Y} = a \oplus (\tilde{B} \otimes \tilde{X})$	$a =$ ۱۷/۵۷۹ $\quad \tilde{B} =$ (۰/۸۴۸ , ۱/۲۴۹)	۹۵/۰۳۶
$H : \tilde{Y} = \tilde{A} \oplus (\tilde{B} \otimes \tilde{X})$	$\tilde{A} =$ (۱۷/۵۷۹ , ۱/۸۲۷) $\quad \tilde{B} =$ (۰/۸۴۸ , ۱/۶۳۶)	۹۰/۹۴۶

همان طور که از جدول ۲ مشاهده می شود مجموع باقیمانده ها، گویای این مطلب است که مدل H بهترین برازش را به داده ها بدست می دهد.

برای محاسبه مجموع مانده ها در جدول۲ ازمعادلات $r(\widetilde{A},\widetilde{B})$ مربوط به هر مدل استفاده شده است.

۶- نتیجه

در مدل رگرسیون با مشاهدات فازی $(\widetilde{X}_i,\widetilde{Y}_i)$، اگر از عملگرهایی براساس T_M استفاده کنیم، نمی‌توانیم برازش خوبی برای داده‌ها براساس مدل

$$\widetilde{Y}=\widetilde{A}\oplus(\widetilde{B}\otimes\widetilde{X})\quad \widetilde{A},\widetilde{B},\widetilde{X},\widetilde{Y}\in F_{LR}(\Re)$$

داشته باشیم، زیرا $\widetilde{B}\otimes\widetilde{X}$ لزوما" یک عدد فازی LR نیست. برای برطرف شدن این مشکل از عملگرهایی براساس T_W استفاده می‌کنیم که این عملگرها در هر دو حالت جمع وضرب شکل عدد را حفظ می‌کنند.

مقایسه‌ی نتایج مدل های H_1 و H_2 بر اساس T_W و بر اساس T_M می تواند از موضوعات آینده برای تحقیق و بررسی باشد.

۷- منابع

[۱] محمدی، جهانگرد؛ طاهری، سید محمود، "برازش توابع انتقالی خاک با استفاده از رگرسیون فازی" (ارائه شده برای چاپ).

[۲] نصیری، مریم، (۱۳۸۱)، "مدل سازی راندمان رنگی پارچه های پلی استر رنگرزی شده با رنگینه های دیسپرس به روش HT با استفاده از رگرسیون فازی"، پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی نساجی، دانشگاه صنعتی اصفهان .

[3] Celmins, A. (1987), "Least squares model fitting to fuzzy vector data", Fuzzy Sets Syst., 22: 260-269.

[4] Diamond, P. (1987), "Least squares fitting of several fuzzy variavbles", Proc. of the Second IFSA Congress, Tokyo, pp: 20-25.

[5] Diamond, P. (1988), "Fuzzy least squares", Inform. Sci. 46: 141-157.

[6] Diamond, P., Korner, R. (1997), "Extended fuzzy linear models and least square estimates", Comput. Math. Appl. 33: 15-32.

[7] Hong, D.H., Do, H.Y. (1997), "Fuzzy system reliability analysis by the use T_W (the weakest t-norm) on fuzzy number arithmetic operations", Fuzzy Sets Syst., 90: 307-316.

[8] Hong, D.H, Lee, S., Do, H.Y. (2001), "Fuzzy linear regression analysis for fuzzy input-output data using shape-preserving operations", Fuzzy Sets Syst., 122: 157-170.

[9] Hong, D.H., Lee, S., Do, H.Y. (2001), "Fuzzy least – squares linear regression analysis using shape preserving operation", Information Sciences, 138: 185-193.

[10] Kolesarova, A. (1995), "Additive preserving the linearity of fuzzy intervals", Tetra Mountains Math. Publ., 6: 75-81.

[11] Ling, C.H. (1965), "Representation of associative functions", Publ. Math. Debrecen, 12: 189-212.

[12] Mesiar, R. (1997), "Shape preserving additions of fuzzy intervals", Fuzzy Sets Syst., 86: 73-78.

[13] Peters, G. (1994), "Fuzzy linear regression with fuzzy intervals", Fuzzy Sets Syst., 63: 45-55.

[14] Tanaka, H., Uejima, S., Asai, K. (1982), "Linear regression analysis with fuzzy model", IEEE Trans. Syst. Man Cybern., 12: 903-907.

[15] Tanaka, H., Lee H., (1999), "Exponential possibility regression analysis by identification method of possibilitic coefficients", Fuzzy Sets Syst., 106, 155-165.

[16] Yang, M. S., Lin, T. S. (2002), "Fuzzy least –squares linear regression analysis for fuzzy input – output data", Fuzzy Sets and Syst., 126: 389-399.

[17] Yen, K.K., Ghoshray, S., Roig, G. (1999), "A linear regression model using triangular fuzzy number coefficient", Fuzzy Sets Syst., 106: 166-177.