پنجمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران
هفدهم الی نوزدهم شهریورماه ۱۳۸۳

روش حلی برای مسائل برنامه‌ریزی خطی بازه‌ای و برنامه‌ریزی خطی فازی

عباسعلی نورا[۱] , فرانک حسین زاده سلجوقی[۲]
دانشگاه سیستان و بلوچستان ـ دانشکده علوم ـ گروه ریاضی
hsaljooghi@mail.iauzah.ac.ir

چکیده

در مدل سازی مسائل تحقیق در عملیات, عدم قطعیت موجود در بیان داده ها و اطلاعات از سوی تصمیم گیرنده لزوم تجزیه و تحلیل مسائل با ضرایب غیردقیق را موجب می شود. اگر داده ها بصورت یک بازه برآورد شوند, مسائلی تحت عنوان برنا مه ریزی بازه ای ایجادمی کند , که نیاز به تکنیک های حل خاص خود دارند و با روش های مرسوم قابل حل نیستند. اگراعداد بازه ای بعنوان ضرایب یک مسئله برنامه ریزی خطی بکار روند مسئله , برنامه ریزی خطی بازه ای نامیده می شود. عموما روش حل در این موارد بکارگیری مفاهیمی است که بتواند مسئله بازه ای را به مسائلی با ضرایب معمول تبدیل کند. دراین مقاله نیز به بررسی مدلهای برنامه ریزی غیر دقیق با ضرائب بازه ای می پردازیم و ضمن بررسی یکی از روشهای موجود, روشی جدیدبرای حل مسائل بازه ای ارائه می گردد. همچنین با استفاده از مفهوم مجموعه های برش در اعداد فازی , ازروش ارائه شده برای حل برنامه ریزی خطی فازی استفاده شده است که طبق این روش می توان جواب بهینه تابع هدف را بدست آورد و در ادامه این روش با یکی دیگر از روشهای ارائه شده برای حل مسائل برنامه ریزی فازی با استفاده از α-برش مقایسه شده است.

واژه های کلیدی: برنامه ریزی خطی بازه ای و فازی- اعداد بازه ای - اعدادفازی – مجموعه برش فازی

۱- مقدمه

کاربرد موفقیت آمیزمجموعه های فازی درسیستم های کنترل در دهه ۸۰ موجب گسترش وسیع مجموعه های فازی در سایر زمینه ها وکاربردها گردید. استفاده از مجموعه های فازی در برنامه ریزی ریاضی دارای تاریخچه طولانی است . جهش واقعی و ناگهانی دربکارگیری تئوری مجموعه فازی در برنا مه ریزی ریاضی وجود ندارد. تاریخچه برنا مه ریزی ریاضی بسیار غنی است و نتیجه تلاشهای پیوسته و مستمر محققین در این زمینه است . برنامه ریزی ریاضی فازی را می توان به سه دسته عمده تقسیم بندی نمود.

دسته اول برنا مه ریزی ریاضی فازی توسط بلمن(Bellman) و زاده(Zadeh) [۱]بصورت تصمیم گیری و ماکزیمم سازی فازی مطرح گردید. تاناکا (Tanaka) [۲] نیز در زمینه فرمول بندی برنامه ریزی فازی و ارائه یک جواب سازگار برای مسئله و زیمرمن(Zimmerman) [۳] درمسائل برنامه ریزی فازی با چند تابع هدف بحث کرده اند .که درآن مسائل

۱- استادیار, گروه ریاضی, دانشگاه سیستان وبلوچستان
۲- دانشجوی دکتری , گروه ریاضی, دانشگاه سیستان وبلوچستان

تصمیم‌گیری با اهداف و قیود فازی مورد بررسی قرار گرفتند. اهداف و قیود فازی انعطاف تابع هدف و قابلیت تغییر قیود را نشان می دهند به این دلیل این برنامه ریزی را " برنامه ریزی قابل انعطاف " می نامند.

در برنامه ریزی که ضرایب تابع هدف و قیود, مقادیر غیر دقیق باشد و بحثی از فازی بودن هدف وقیود به طورکلی مطرح نیست توسط دوبیس(Dubois)وپرید(Prade)[۴] مطرح گردید. چون دربعضی از مقالات در این مورد, تابع توزیع ضرایب فازی بصورت توزیع امکان در نظرگرفته شده است, این برنامه ریزی "برنامه ریزی امکان " نامیده می شود.

سومین نوع برنامه ریزی که توسط نگوئیتا(Negoita)[۵] ارائه گردید برنا مه ریزی تنومند نام گرفت که در آن الویت های تصمیم گیرنده توسط یک ناحیه تصدیق فازی و یک مقدار تابع هدف آرمانی تعیین می شود.

عموما مدلهای برنامه ریزی فازی برای مسائل" بد تعریف" بکار می روند. مسائلی که مفاهیم وپارامترها دارای ابهام بوده و از دقت لازم برخوردار نیستند. در اینگونه موارد با تبدیل مدل فازی به یک مدل کلاسیک آنرابا تکنیک های معمول بهینه نموده و چون این جواب بهین برای مدل فازی اولیه نبوده, آنرا مجدداً مورد بررسی قرار داده و در صورت بهین نبودن با تعابیر جدید بار دیگر مسئله را حل نموده و روند را تا دستیابی به جواب بهینه ادامه می دهند.

مدلی که در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته است برنامه ریزی نوع دوم است یعنی وقتی در یک مدل ضرائب برنامه ریزی غیر دقیق باشد. در برنامه ریزی ریاضی مرسوم ,ضرایب مسائل عموما توسط افراد خبره با مقادیر دقیق تعین می شوند. ولی در محیط های غیردقیق و نامعین, فرض اطلاعات دقیق افراد خبره بسیار دور از واقعیت بنظر می رسد.بنابراین توسعه واستفاده از روشهای تحقیق در عملیات فازی و آماری برای توصیف و بحث روی مسائل تصمیم گیری واقعی با داده های نادقیق مناسب ومنطقی است. در مدل بکار رفته در این مقاله ,تمامی پارامترها و ضرایب بصورت مقادیر غیردقیق بازه ای در نظر گرفته شده اند که با استفاده از تکنیک های ارائه شده به برنامه ریزی معمولی تبدیل می شوند .سپس با حل یک مدل برنامه ریزی خطی کلاسیک مطلوبترین جواب محاسبه می شود.

۲- برنا مه‌ریزی بازه‌ای

فرم کلی مسائل بازه ای را در نظر بگیرید :

$$\text{(Max) Min} \quad Z=\sum_{j=1}^{n}[c_j^L, c_j^U]x_j$$

s.t.

$$\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}^L, a_{ij}^U]x_j \geq (\leq,=)[b_i^L, b_i^U] \qquad i=1\ ,\ \ldots\ ,\mathrm{m}$$

$$x_j \geq 0 \qquad \mathrm{j}=1\ ,\ldots,\ \mathrm{n} \qquad (۱)$$

اگر $g(\Re)$ مجموعه همه اعداد بازه ای در R باشد,

$$\left[a_{ij}^L, a_{ij}^U\right], \left[c_j^L, c_j^U\right], \left[b_i^L, b_i^U\right] \in g(\Re) \qquad i=1,2,\ldots,m \quad j=1,2,\ldots,n$$

بعبارت دیگر تمامی پارامترهای LP , بصورت بازه ای می باشند .

به مثال زیر که یک برنامه ریزی خطی بازه ای توجه نمائید:

مثال۲-۱- در یک مرغداری ۱۰۰۰ مرغ نگهداری می شود که برای خوراک آنها از دو نوع مواد سویا و ارزن استفاده می گردد. هر مرغ ۱/۳ – ۱ کیلوگرم سویا و ارزن در روز می خورد و روزانه حداقل به۰/۲۳ – ۰/۱۲ کیلوگرم پروتئین و ۰/۰۰۶ – ۰/۰۰۴ کلسیم نیاز دارد. هر کیلوگرم سویا شامل ۵۲-۴۸ درصد پروتئین و ۰/۸- ۰/۵ درصد کلسیم می باشد .هرکیلوگرم ارزن شامل ۱۱/۵ – ۸/۵ درصد پروتئین و ۰/۳ درصد کلسیم است. قیمت هرکیلوگرم سویا بین ۰/۴۲-۰/۳۸ دلار و همچنین قیمت هرکیلوگرم ارزن ۰/۲ دلاراست ارزن و سویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک مرغداری حداقل گردد.

مسئله را به صورت زیر فرموله می گردد:

اگر X_1 مقدار سویا و X_2مقدار ارزن مورد نیاز بر حسب کیلوگرم باشد , داریم :

$$\text{Min}_{\text{s.t.}} \quad Z = [0.38 ,0.42]\, X_1 + [0.2 , 0.2]\, X_2$$

$$X_1 + X_2 = [1 , 1.3] \times 1000$$
$$[0.48 , 0.52]\, X1 + [0.085 , 0.115]\, X_2 \geq [0.21 , 0.23] \times 1000$$
$$[0.005 , 0.008]\, X_1 + [0.003 , 0.003]\, X_2 \geq [0.004 , 0.006] \times 1000 \qquad (۲)$$
$$X_1 , X_2 \geq 0$$

دراین برنامه ریزی خطی تمامی پارمترها اعداد بازه ای هستند که برای حل آن باید مسائل بیشماری را بهینه سازی نمود . لذا از روشهای کلاسیک برنامه ریزی نمی توان آنرا حل نمود و نیاز به ارائه روشهای مناسب تری داریم. دراین مقا له ضمن مرور روش تانگ شوچنگ برای حل مسائل برنامه ریزی بازه ای, روشی جدید را مطرح نموده وضمن حل مسئله فوق به هر دو روش, آنهارا با یکدیگر مقایسه می کنیم .

۳ - روش تانگ شوچنگ

تانگ شوچنگ(Tong Shaocheng) مسئله بازه ای مینیمم سازی را بصورت زیر درنظرگرفت[۶] :

$$\text{Min}_{\text{s.t.}} \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} [c_j^L , c_j^U] x_j \qquad (۳)$$

$$\sum_{j=1}^{n} [a_{ij}^L , a_{ij}^U] x_j \geq [b_i^L , b_i^U] \qquad i = 1 , \ldots , m$$
$$x_j \geq 0 \qquad j = 1 , \ldots , n$$

برطبق عملگرهای اعداد بازه ای [۵] هرنامعادله در مدل(۳) را می توان بصورت 2^{n+1} نامعادله تبدیل نمود.

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n \geq b \quad a_j \in \left\{a_{ij}^L , a_{ij}^U\right\} ,b \in \left\{b_i^L , b_i^U\right\} \quad i = 1,\ldots,m \quad j = 1,\ldots,n$$

بعبارت دیگر بازاء نامعادله iام می توان 2^{n+1} نامعادله ایجاد نمود. اگر مجموعه جوابهای شدنی هر یک از نامعادله های حاصل ازنامعادله iام را با D_i^K نشان دهیم کوچکترین و بزرگترین مجموعه جوابهای ممکنه عبارتست از :

$$\overline{D_i} = \bigcup_{K=1}^{2^{n+1}} D_i^K \qquad \underline{D_i} = \bigcap_{K=1}^{2^{n+1}} D_i^K$$

۳ـ۱ـ تعریف فرمول مشخصه (CF) : اگر $\sum_{j=1}^{n} [a_j^L , a_j^U] x_j \geq [b^L , b^U]$

آنگاه $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b$ که در آن $b \in \left[b^L , b^U\right]$ و $a_j \in \left[a_j^L , a_j^U\right]$ فرمول مشخصه نامعادله فوق نامیده می شود.

۳-۲ – تعریف: اگر برای هر نامعادله $\sum_{j=1}^{n} [a_j^L , a_j^U] x_j \geq [b^L , b^U]$, فرمول مشخصه $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b$ وجود داشته باشد بنحوی که مجموعهٔ جوابهایش $\underline{D}$ یا $\overline{D}$ باشد آنگاه آنرا به ترتیب بزرگترین مقدار بازه جواب نامعادله و کوچکترین مقدار بازه جواب نامعادله نامند.

۳-۳ – قضیه : برای نامعادله $\sum_{j=1}^{n} [a_j^L , a_j^U] x_j \geq [b^L , b^U]$ ثابت کنید که نامعادلات $\sum_{j=1}^{n} a_j^U x_j \geq b^L$ و $\sum_{j=1}^{n} a_j^L x_j \geq b^U$ به ترتیب بزرگترین مقدار بازه و کوچکترین مقدار بازه جواب نامعادله می باشند.

(اثبات در بخش ضمیمه)

بر طبق عملگرهای بازه ای تابع هدف $Z=\sum_{j=1}^{n}\left[c_j^L,c_j^U\right]x_j$ یک عدد بازه ای است وآنرا با Z= [Z_1,Z_2] نمایش می دهیم و چون $(j=1,2,....,n)$ $x_j\geq 0$ دراینصورت $Z_2=\sum_{j=1}^{n}c_j^U x_j$ ، $Z_1=\sum_{j=1}^{n}c_j^L x_j$

با در نظر گرفتن دو برنامه ریزی خطی زیر با توابع هدف Z_1 و Z_2 به ترتیب با قیود بزرگترین و کوچکترین ناحیه جواب مسئله (۳) داریم :

$$\text{Min} \quad Z_2=\sum_{j=1}^{n}c_j^U x_j$$
s.t
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^L x_j\geq b_i^U \qquad i=1,\dots,m$$
$$x_j\geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$
(۵)

$$\text{Min} \quad Z_1=\sum_{j=1}^{n}c_j^L x_j$$
s.t
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^U x_j\geq b_i^L \qquad i=1,\dots,m$$
$$x_j\geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$
(۴)

فرض کنید جوابهای بهین مدل (۴) و (۵)به ترتیب بصورت زیر باشند:

$$x_1',x_2',\dots,x_n',Z_1' \qquad\qquad x_1'',x_2'',\dots,x_n'',Z_2''$$

می توان ثابت نمودکه جوابهای بهین مدل (۳) بصورت جواب بازه ای $\left[Z_1',Z_2''\right]$ می باشد .

اکنون مثال ۲-۱ را که دارای مدل بازه ای (۲) است را به روش فوق حل می کنیم .

Min $Z_2 = 0.42 X_1 + 0.2 X_2$
s.t
$1000\leq X_1+X_2\leq 1300$
$0.48 X_1+0.085X_2\geq 0.23\times 1000$
$0.005X_1+0.003X_2\geq 0.006\times 1000$
$X_1 , X_2\geq 0$
(۷)

Min $Z_1 = 0.38 X_1 + 0.2X_2$
s.t
$1000\leq X_1+X_2\leq 1300$
$0.52X_1+0.11X_2\geq 0.21\times 1000$
$0.008X_1+0.003X_2\geq 0.0004\times 1000$
$X_1 , X_2\geq 0$
(۸)

جوابهای این دو مسئله عبارتست از:

$$X_1'=234.57 \qquad X_2'=765.43 \qquad Z_1=242.22$$
$$X_1''=1050 \qquad X_2''=250 \qquad Z_2=491$$
$$\text{Min } Z=[242.22 , 491]$$

۴- حل مسائل بازه ای به روشی جدید(مدل نور)

بار دیگر فرم کلی مسئله بازه ای را درنظر می گیریم :

$$\text{Min} \quad Z=\sum_{j=1}^{n}[c_j^L,c_j^U]x_j$$
s.t
$$\sum_{j=1}^{n}[a_{ij}^L,a_{ij}^U]x_j\geq[b_i^L,b_i^U] \qquad i=1,\dots,m$$
$$x_j\geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

ویا

$$\text{Min} \quad Z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$
s.t
$$\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\geq b_i \qquad i=1,\dots,m \qquad (۹)$$
$$x_j\geq 0 \qquad j=1,\dots,n$$

که در آن $a_{ij} \in \left[a_{ij}^L, a_{ij}^U\right]$, $c_j \in \left[c_j^L, c_j^U\right]$, $b_i \in \left[b_i^L, b_i^U\right]$ $i = 1,2,\ldots,m$ $j = 1,2,\ldots,n$

اکنون با توجه به مفهوم بازه های محدب از تبدیلات زیر استفاده می کنیم :

$$c_j^L \le c_j \le c_j^U \Rightarrow c_j = \lambda_j c_j^U + (1-\lambda_j)c_j^L = c_j^L + \lambda_j(c_j^U - c_j^L) \qquad 0 \le \lambda_j \le 1 \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$a_{ij}^L \le a_{ij} \le a_{ij}^U \Rightarrow a_{ij} = \beta_{ij} a_{ij}^U + (1-\beta_{ij})a_{ij}^L = a_{ij}^L + \beta_{ij}(a_{ij}^U - a_{ij}^L) \qquad 0 \le \beta_{ij} \le 1$$
$$j = 1,\ldots,n \qquad i = 1,\ldots,m$$

با $b_i^L \le b_i \le b_i^U \Rightarrow b_i = \beta_i b_i^U + (1-\beta_i)b_i^L = b_i^L + \beta_i(b_i^U - b_i^L) \qquad 0 \le \beta_i \le 1 \qquad i = 1,\ldots,m$

جایگزینی عبارات فوق در مدل (۹) داریم:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n}\left[c_j^L + \lambda_j(c_j^U - c_j^L)\right]x_j$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n}\left[a_{ij}^L + \beta_{ij}(a_{ij}^U - a_{ij}^L)\right] x_j \ge b_i^L + \beta_i(b_i^U - b_i^L) \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$
$$0 \le \beta_{ij} \le 1 \qquad j = 1,\ldots,n \; , \; i = 1,\ldots,m$$
$$0 \le \beta_i \le 1 \qquad i = 1,\ldots,m$$
$$0 \le \lambda_j \le 1 \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (۱۰)$$

و یا

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_j(c_j^U - c_j^L)$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^L x_j + \sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_j(a_{ij}^U - a_{ij}^L) - \beta_i(b_i^U - b_i^L) \ge b_i^L \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$
$$0 \le \beta_{ij} \le 1 \qquad j = 1,\ldots,n \; , \; i = 1,\ldots,m$$
$$0 \le \beta_i \le 1 \qquad i = 1,\ldots,m$$
$$0 \le \lambda_j \le 1 \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (۱۱)$$

مدل فوق بدلیل وجود عوامل $\beta_{ij}x_j$ و $\lambda_j x_j$ غیرخطی است که با تغییر متغیر های ذیل به برنامه ریزی خطی تبدیل می شود:

$$p_{ij} = \beta_{ij}x_j \qquad p_j = \lambda_j x_j$$

و چون $x_j \ge 0$ و $0 \le \lambda_j \le 1$ و $0 \le \beta_{ij} \le 1$, بنابراین $0 \le p_{ij} \le x_j$ $\quad$ $0 \le p_j \le x_j$

با اعمال تغییر متغیرهای فوق بر مدل (۱۱) , مدل (۱۲) بدست می آید:

$$Min \quad Z = \sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j + \sum_{j=1}^{n} p_j(c_j^U - c_j^L)$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^L x_j + \sum_{j=1}^{n} p_j(a_{ij}^U - a_{ij}^L) - \beta_i(b_i^U - b_i^L) \ge b_i^L \qquad i = 1,\ldots,m$$

$$p_j \le x_j \qquad j = 1,\ldots,n$$
$$p_{ij} \le x_j \qquad j = 1,\ldots,n$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$
$$p_{ij} \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n \; , \; i = 1,\ldots,m$$

$$p_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n \qquad (۱۲)$$
$$0 \le \beta_i \le 1 \qquad i = 1,\dots,m$$

مدل(۱۲) در واقع همان مدل (۹) است که به صورت خطی تبدیل شده است. چون در مدل (۱۲) $c_j^U - c_j^L \ge 0$ و $p_j \ge 0$ است, هنگامی تابع هدف دارای مینیمم مقدار است که $p_j = 0 \quad \forall j$.همچنین میدانیم با بزرگتر شدن ناحیه شدنی, جواب بهینه بدتر نخواهدشد. بنابراین برای حصول بهترین جواب باید $-\beta_i \le 0 \quad , \quad 0 \le p_{ij} \le x_j$ حداکثر مقدار خود رابگیرد یعنی $p_{ij} = x_j$ و $-\beta_j = 0$.

حال اگردر تبدیلات فوق به جای p_j و p_{ij} مقدار قرار دهیم داریم :

$$(i) \qquad \lambda_j = 0 \xrightarrow{x_j \succ 0} \lambda_j = 0$$
$$(ii) \qquad \beta_{ij} x_j = x_j \longrightarrow \beta_{ij} = 1$$
$$(iii) \qquad \beta_i = 0$$

با قرار دادن مقادیر فوق در مدل (۱۱) مدل زیر حاصل می گردد.

$$\text{Min} \qquad Z_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j^L x_j$$
$$\text{s.t} \qquad \sum a_{ij}^U x_j \ge b_i^L \qquad i = 1,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n$$

که دقیقا همان مدل (۴) می باشد.

برای این که نامطلوبترین جواب را بدست آوریم کافی است پارامترها را چنان اختیار کنیم که تا حد ممکن ناحیه شدنی کوچکتر گردد. لذا با اعمال شرایط زیر به نتیجه مورد نظر می رسیم.

$$p_j = x_j \qquad p_{ij} = 0 \qquad \beta_i = 1$$

اکنون با جایگذاری تبدیلات فوق به جای p_j و p_{ij} داریم :

$$(i) \qquad \lambda_j x_j = x_j \longrightarrow \lambda_j = 1$$
$$(ii) \qquad \beta_{ij} x_j = x_j \xrightarrow{x_j \ge 0} \beta_{ij} = 0$$
$$(iii) \qquad \beta_i = 1$$

با قرار دادن مقادیر فوق درمدل (۱۲) , خواهیم داشت:

$$\text{Min} \qquad Z_2 = \sum_{j=1}^{n} c_j^U x_j$$
$$\text{s.t} \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^L x_j \ge b_i^U \qquad i = 1,\dots,m$$
$$x_j \ge 0 \qquad j = 1,\dots,n$$

مدل فوق کاملا منطبق بر مدل (۵) می باشد.

مدل (۱۲) در بدترین حالت جواب معادل مدل (۴) و در بهترین حالت جواب مدل (۵) را ایجاد می کند.

اکنون ثابت می کنیم جواب مدل (۱۲)در بهترین شرایط همواره نابیشتر از جواب مدل در بدترین شرایط است .

قضیه۴-۱ – جواب بهین مدل (۱۲) در بهترین شرایط همواره نابیشتر از جواب این مدل در بدترین شریط است .(جواب بهین مدل (۴) از جواب بهین مدل (۵) نابیشتر است).

قضیه ۴ -۲– جواب بهین در بازه $[Z_1', Z_2'']$ قرار دارد.

(اثبات در ضمیمه)

با تو جه به قضیه فوق می توان نتیجه گرفت :

- اگر مسئله (۴) جواب نداشته باشد ,مسئله (۵) نیز جواب ندارد لذا مسئله اصلی جواب ندارد.(زیرا ناحیه شدنی (۵) زیر مجموعه ناحیه شدنی (۴) است)

-اگر مسئله (۵) جواب داشته باشدآنگاه مسئله (۴) نیز دارای جواب است و جواب بهینه در بازه $\left[Z_1', Z_2''\right]$ قرار دارد.

- اگر مسئله (۵) جواب نداشته باشد , آنگاه برای مسئله (۴) دو حالت رخ می دهد:

(i) –مسئله (۴) دارای جواب Z_1'است و مقدار بهینه مسئله اصلی در بازه $\left[Z_1', \infty\right)$ قراردارد.

(ii) –جوابی برای مسئله (۴) وجود ندارد که همان حالت اول می باشد.

- اگر مسئله اصلی جواب نداشته باشد آنگاه مسئله (۴) هم جواب ندارد.(اثبات به برهان خلف)

۵- مثال

با اعمال مدل (۱۲) بر مثال ۱-۲ ,مسئله به صورت زیرتبدیل می شود:

$$\underset{\text{s.t}}{\text{Min}} \quad Z= 0.38 X_1 + 0.2 X_2 + 0.04 P_1 + 0 P_2$$

$$X_1 + X_2 + 0 P_{11} + 0 P_{12} \geq 1000 + 300 \beta_1$$

$$0.48 X_1 + 0.085 X_2 + 0.04 P_{21} + 0.03 P_{22} \geq 210 + 20 \beta_2$$

$$0.005 X_1 + 0.003 X_2 + 0.003 P_{31} + 0 P_{32} \geq 4 + 2 \beta_3$$

$$0 \leq P_1 \leq X_1 \qquad 0 \leq P_2 \leq X_2$$

$$0 \leq P_{11} \leq X_1 \qquad 0 \leq P_{21} \leq X_1 \qquad 0 \leq P_{31} \leq X_1$$

$$0 \leq P_{12} \leq X_2 \qquad 0 \leq P_{22} \leq X_2 \qquad 0 \leq P_{32} \leq X_2$$

$$0 \leq \beta_1 \leq 1 \qquad 0 \leq \beta_2 \leq 1 \qquad 0 \leq \beta_3 \leq 1$$

جواب بهین مسئله فوق عبارتست از

$$Z^* = Z_1' = 242.22 \qquad X_1' = 234.57 \qquad X_2'' = 756.43$$

$$\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 0 \qquad P_1 = 0 \qquad P_2 = 0$$

$$P_{11} = P_{21} = P_{31} = X_1' = 234.57$$

$$P_{12} = P_{22} = P_{32} = X_2'' = 765.43$$

مقدار بهین Z_1' جواب بهین مدل (۴) یعنی $x_1', \ldots, x_n'$ به انضمام مقادیر $p_j = 0$ و $p_{ij} = x_j'$ و $\beta_i = 0$ یک جواب شدنی مسئله (۱۲) است و از طرفی تابع هدف هرجواب شدنی (۱۲) به ازاء هر مقدار انتخابی برای پارامترها از z' ناکمتر است لذا این جواب شدنی یک جواب بهین (۱۲) نیز می باشد.

۶- برنامه ریزی خطی فازی

برنا مه ریزی خطی را درنظربگیرید که در آن داده ها به صورت اعداد فازی باشند یعنی تمامی ضرایب عددی یک برنامه ریزی بصورت تقریبی و نادقیق با استفاده از اصطلاحاتی مانند "تقریباً " ,"در حدود" و .. بیان شود . چنین مسائلی را نمی توان به روشهای کلاسیک حل نمود. در این بخش روش حلی با استفاده ازبرنامه ریزی خطی بازه ای برای اینگونه مسائل ارائه می شود.

فرم کلی برنامه ریزی فازی را درنظربگیرید

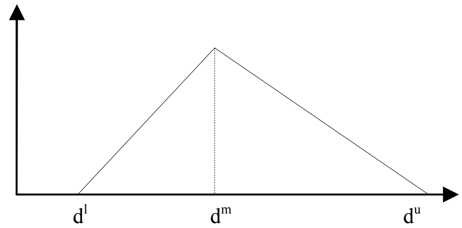
$$Min \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} \widetilde{c}_j x_j$$

$$\text{s.t.} \qquad \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij} x_j \leq \widetilde{b}_i \qquad i = 1,2,\ldots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1,2,\dots,n \tag{۱۳}$$

که در آن اعداد $\tilde{b}_i$, $\tilde{a}_{ij}$, $\tilde{c}_j$,اعداد فازی با تابع عضویت مثلثی هستند.

تعریف- عدد فازی $\tilde{d}$ با تابع عضویت مثلثی را با نماد $\left(d^L, d^m, d^U\right)$ نشان داده که در شکل۱رسم شده است .



شکل ۱ - نمودار تابع عضویت یک عدد مثلثی

تابع عضویت این عدد عبارتست از

$$\mu_d(x) = \begin{cases} 1 + \dfrac{d^m - x}{d^l - d^m} & d^l \leq x \leq d^m \\ 1 + \dfrac{d^m - x}{d^u - d^m} & d^m \leq x \leq d \\ 0 & x \leq d^l \quad , x \geq d^u \end{cases}$$

برش α این تابع عضویت بازاء $\alpha \in [0,1]$, بازه بسته $\left[\underline{d}, \overline{d}\right]$ خواهد بود که با توجه به تابع عضویت عدد فازی $\tilde{d}$ داریم :

$$\tilde{d}_\alpha = \left[\underline{d}, \overline{d}\right] = \left[\alpha . d^m + (1-\alpha) d^l , \alpha . d^m + (1-\alpha) d^u\right]$$

لم ۶-۱– اگر $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ آنگاه بازه ای که توسط برش α_1ایجاد می شود شامل بازه ای است که توسط برش α_2تولید می شود.

به همین ترتیب , با اعمال برش α برروی ضرایب تابع هدف وضرایب تکنولوژیکی و مقادیر سمت راست مسئله برنامه ریزی مدل (۱۳) , برش αاعداد فازی فوق , به بازه های زیر تبدیل می شوند

$$\tilde{c}_{j_\alpha} = \left[\underline{c}_j, \overline{c}_j\right] = \left[\alpha . c_j^m + (1-\alpha) c_j^l , \alpha . c_j^m + (1-\alpha) c_j^u\right]$$
$$\tilde{a}_{ij_\alpha} = \left[\underline{a}_{ij}, \overline{a}_{ij}\right] = \left[\alpha . a_{ij}^m + (1-\alpha) a_{ij}^l , \alpha . a_{ij}^m + (1-\alpha) a_{ij}^u\right]$$
$$\tilde{b}_{i_\alpha} = \left[\underline{b}_i, \overline{b}_i\right] = \left[\alpha . b_i^m + (1-\alpha) b_i^l , \alpha . b_i^m + (1-\alpha) b_i^u\right]$$

با جایگزینی عبارات فوق در مسئله (۱۳) مدل زیر حاصل خواهد شد :

$$Min \qquad Z = \sum_{j=1}^{n} \left[\alpha . c_j^m + (1-\alpha) c_j^l , \alpha . c_j^m + (1-\alpha) c_j^u\right] x_j$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\alpha\ a_{ij}^m + (1-\alpha) a_{ij}^l , \alpha\ a_{ij}^m + (1-\alpha) a_{ij}^u\right] x_j \leq \left[\alpha\ b_i^m + (1-\alpha) b_i^l , \alpha\ b_i^m + (1-\alpha) b_i^u\right] \qquad i = 1,2,\dots,m$$

$$x_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1,2,\dots,n \tag{۱۴}$$

قضیه۶ -۲– اگر $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq 1$ آنگاه $\left[Z_1^{(\alpha_1)}, Z_2^{(\alpha_2)}\right] \supseteq \left[Z_1^{(\alpha_2)}, Z_2^{(\alpha_2)}\right]$

طبق قضیه فوق با حل مدل (۱۴) بازاء αهای متفاوت می توان عدد فازی بهینه $\tilde{Z}^*$ را تعیین نمود.

(اثبات در ضمیمه)

مدل (۱۴) , یک برنامه ریزی خطی بازه ای است که با استفاده از **مدل نور** قابل حل است .

در مقاله ساعتی و همکاران [۸] نیز روش حلی براساس ترکیب محدب بازه ها و برش αبرای مسائل خطی فازی ارائه شده است که در مثال ذیل ضمن بررسی جواب مدل نور برای مسائل فازی, این روش را با مدل ارائه شده در مقاله ساعتی مقایسه می کنیم.

مثال – هزار مرغ در یک مرغداری نگهداری می شوندکه برای خوراک آنها از دونوع ماده غذایی سویا و ارزن استفاده می شود. میدانیم هر مرغ در حدود ۱/۱۵ کیلوگرم غذا در روز می خورد.همچنین سویا در حدود ۵۰ درصد پروتئین و در حدود ۰/۶۵ درصد کلسیم دارد و قیمت آن در حدود ۰/۴ دلار است . هر کیلوگرم ارزن تقریبا شامل ۹درصد پروتئین و درحدود ۰/۳ درصد کلسیم است وقیمت آن درحدود۰/۲ دلار است .ارزن وسویا به چه نسبتی باید مخلوط شوند تا هزینه خوراک دام حداقل گردد.
مسئله به صورت زیر فرموله می گردد:

$$\text{Min} \quad Z = \underline{0.4}\, X_1 + \underline{0.2}\, X_2$$
$$\text{s.t}$$

$$X_1 + X_2 = \underline{1.15} \times 1000$$
$$\underline{0.5}\, X_1 + \underline{0.09} X_2 \geq \underline{0.22} \times 1000$$
$$\underline{0.006} X_1 + \underline{0.003}\, X_2 \geq \underline{0.005} \times 1000$$
$$X_1 \;,\; X_2 \geq 0$$

(اعداد با نماد زیر خط فازی هستند)

با حل مسئله فوق به روش ارائه شده , خواهیم داشت :

$\alpha_1 = 0$	جواب مسئله در مدل نور	$Z_N = 273.82$	$X_1 = 265.66$	$X_2 = 684.33$
	جواب مسئله در مدل ساعتی	$Z_S = 265.66$	$X_1 = 265.66$	$X_2 = 684.33$
$\alpha_2 = 0.25$		$Z_N = Z_S = 251.39$	$X_1 = 277.78$	$X_2 = 722.2$
$\alpha_3 = 0.5$		$Z_N = Z_S = 274.12$	$X_1 = 337.5$	$X_2 = 712.5$
$\alpha_4 = 1$		$Z_N = Z_S = 333.33$	$X_1 = 516.6$	$X_2 = 633.3$

همانگونه که نتایج فوق نشان می دهد جواب بدست آمده از دو روش یکسان است ولی با بررسی مدلهای حاصل از دو روش (مدل نورو مدل ساعتی) در یک برنامه ریزی خطی فازی که دارای n متغیر و m قید بوده و تمامی ضرایب عددی مدل, فازی هستند , بنابر تبدیلات لازم در هر یک از مدلها برای ایجاد یک مسئله برنامه ریزی خطی معمولی, تعداد متغیر و قیود در هریک مدلها عبارتند از :

	متغیر	قیود
مدل نور	$2n + m.n + m$	$m.n + m + n$
مدل ساعتی	$2n + m.n + n$	$3m + 4n$

بنابر مقایسه فوق تعداد متغیرها در دو مدل برابر بوده ولی در مسائل با تعداد متغیر و قیود کم (جمعا کمتر از۱۰), مدل نور نسبت به مدل دوم قیودکمتری خواهد داشت ولی در تعداد قیود ومتغیر زیاد مدل دوم قیود کمتری نسبت به مدل اول دارد. همچنین تعداد m متغیر کراندار در مدل ساعتی وجود داشته و در مدل نور نیز تعداد m متغیر در فاصله صفر ویک می باشند.

۷- نتیجه گیری

مسائل برنامه ریزی خطی با ضرایب بازه ای نوع خاصی از مدلها با ضرایب نادقیق است که در برنامه ریزی مسائل واقعی دارای کاربرد بسیار است . برای حل یک مسئله برنامه ریزی خطی بازه ای بر طبق روش تانگ شوچنگ می توان با تبدیل مسئله به دو مسئله برنا مه ریزی خطی معمولی جواب بهینه را در یک بازه بدست آورد . که جواب یک مسئله بهترین شرایط حل و دیگری بدترین شرایط ممکن را برای حل مسئله در نظر می گیرد .در صورتیکه در روش ارائه شده در این مقاله به جای حل دو مسئله مجزا یک مسئله برنامه ریزی معمولی (با توجه به مفهوم ضرایب بازه ای محدب) ایجاد شده , که با حل آن مطلوبترین حالت جواب بدست می آید .ضمن آنکه دراین روش مفاهیم موجوددر روش تانگ شوچنگ نیز برقرار بوده و جواب

حاصل مطلوبترین مقدار در بازه جواب خواهد. همچنین با توجه به مجموعه های برش در اعداد فازی می توان یک برنامه ریزی خطی با ضرایب فازی را به مسئله برنامه ریزی بازه ای تبدیل نمود. سپس با روش ارائه شده در این مقاله (روش نور) آنـرا حـل نمود . و با حل مسئله بازاء برش های متعدد می توان مقدار بهینه تابع هدف را بدسـت آورد ضـمنا جوابهـای بدسـت آمـده از اعمال این روش بر برنامه ریزی فازی با جوابهای حاصل از روش ارائه شده توسط ساعتی و همکاران [۸] یکسان خواهد بود.

منابع

[1] R.E. Bellman, L.A. Zadeh , Decision-making in a fuzzy environment, Management Sci. 17(1970) 141-164.
[2] H. Tanaka, T. Okuda , K. Asai , On fuzzy mathematical programming , J. Cybernet. 3(1984) 37-46.
[3] H.J. Zimmermann, Discretion and optimization on fuzzy systems, Internat. J.General system 2(1976) 209-212.
[4] D. Dubois and H. Prade, System of linear fuzzy constraints, Fuzzy Sets and Systems 13 (1982) 1-10.
[5] C.V. Negoita, Fuzziness in management, ORSA/TIMS Miami (1970).
[6] T. Shocheng , Interval number and fuzzy number linear programming, fuzzy sets and systems 66(1994) 301-306.
[7] A. Sengupta, T. Kumar, D. Chakraborty, Interperation of inequality constraints involving coefficients and a solution to interval linear programming, Fuzzy Set and Systems 119(2001) 129-138.
[8] A.Saati., A. Memariani, G.R.Jahanshahloo, Efficiency analysis and ranking of DMU with fuzzy data, Fuzzy Optimization and Decision Making , Vol 1, No 2 (2002), 3-14.

ضمیمه: (اثبات قضیه های ۳-۳ , ۴-۱ , ۴-۲ , ۶-۲)

۳-۳ – قضیه : برای نامعادله $\sum_{j=1}^{n}[a_j^L, a_j^U]x_j \geq [b^L, b^U]$ ثابت کنید که نامعادلات $\sum_{j=1}^{n} a_j^U x_j \geq b^L$ و $\sum_{j=1}^{n} a_j^L x_j \geq b^U$ به ترتیب بزرگترین مقدار بازه و کوچکترین مقدار بازه جواب نامعادله می باشند.

اثبات : برای آنکه ثابت کنیم $\sum_{j=1}^{n} a_j^U x_j \geq b^L$ بزرگترین مقدار بازه نامعادله است باید نشان دهیم که مجموعه جوابهای این فرمول مشخصه بصورت $\overline{D}$ می باشد.

برای $\sum_{j=1}^{n}[a_j^L, a_j^U]x_j \geq [b^L, b^U]$ فرمول مشخصه زیر را در نظر بگیرید:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b \qquad a_j \in \left[a_j^L, a_j^U\right] \qquad b \in \left[b^L, b^U\right] \tag{1}$$

داریم :

$$a_j \leq a_j^U \quad \forall j \quad \xrightarrow{x_j \geq 0} \quad a_j x_j \leq a_j^U x_j \quad \forall j$$

$$\rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^U x_j \tag{2}$$

با توجه به عبارات (۱) و(۲) و $b^L \leq b$: $b^L \leq b \leq \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^U x_j$

لذا هرجواب فرمول مشخصه $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b$ در عبارت $\sum_{j=1}^{n} a_j^U x_j \geq b^L$ صدق می کند بنابراین $\sum_{j=1}^{n} a_j^U x_j \geq b^L$ بزرگترین مقدار بازه می باشد .

بطور مشابه برای اثبات اینکه $\sum_{j=1}^{n} a_j^L x_j \geq b^U$ کوچکترین مقدار بازه جواب است باید ثابت کنیم مجموعه جواب های فرمول مشخصه به صورت $\underline{D}$ می باشد.

$$a_j^L \leq a_j \quad \forall j \quad \xrightarrow{x_j \geq 0} \quad a_j^L x_j \leq a_j x_j \quad \forall j \quad \rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} a_j^L x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \tag{3}$$

از (۳) و $\sum_{j=1}^{n} a_j^L x_j \geq b^U$ و $b \leq b^U$ داریم $b \leq b^U \leq \sum_{j=1}^{n} a_j^L x_j \leq \sum_{j=1}^{n} a_j x_j$

درنتیجه جوابهای فرمول مشخصه $\sum_{j=1}^{n} a_j^L x_j \geq b^U$ در جوابهای فرمول مشخصه $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \geq b$ هم صدق می کند بنابراین $\sum_{j=1}^{n} a_j^L x_j \geq b^U$ کوچکترین مقدار بازه قید می باشد.لذا قضیه برقرار است.

قضیه۴-۱ – جواب بهین مدل (۱۲) در بهترین شرایط همواره نابیشتر از جواب این مدل در بدترین شریط است .(جواب بهین مدل (۴) از جواب بهین مدل (۵) نابیشتر است).

اثبات : ابتدا ثابت می کنیم هر جواب نامعادلات $i = 1,\ldots,m$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^U x_j \geq b_i^L$ در مجموعه قیود $i = 1,\ldots,m$ $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^L x_j \geq b_i^U$ صدق می کند.

$$a_{ij}^L \le a_{ij}^U \quad \forall i \quad \forall j \quad \xrightarrow{x_j \ge 0} \quad a_{ij}^L x_j \le a_{ij}^U x_j \qquad \forall i \quad \forall j \quad \to \quad \sum_{j=1}^n a_{ij}^L x_j \le \sum_{j=1}^n a_{ij}^U x_j \quad \forall i$$

با توجه به $\forall i \qquad \sum_{j=1}^n a_{ij}^L x_j \ge b_i^U$ و $b_i^U \ge b_i^L$ و عبارت فوق ,نتیجه می شود:

$$b_i^L \le b_i^U \le \sum_{j=1}^n a_{ij}^L x_j \le \sum_{j=1}^n a_{ij}^U x_j \qquad \forall i$$

یعنی بزرگترین مقدار بازه قید iام شامل کوچکترین مقدار بازه همان قید می باشد.

بنابراین ناحیه شدنی مسئله (۵) زیر مجموعه ای از ناحیه شدنی مسئله (۴) می باشد.لذا جواب بهین مسئله (۵) یک جواب شدنی برای مسئله (۴) است .اگر Z_1^o یک مقدار شدنی و Z_1' جواب بهینه برای مسئله (۴) باشند پس

$$Z_1' \le Z_1^o \qquad (\mathrm{I})$$
.

از طرفی دیگر $c_j^L \le c_j^U \quad \forall j \quad \xrightarrow{x_j'' \ge 0} \quad c_j^L x_j'' \le c_j^U x_j'' \quad \forall j$

$$\to \quad \sum_{j=1}^n c_j^L x_j'' \le \sum_{j=1}^n c_j^U x_j'' \quad \to \quad Z_1^o \le Z_2'' \qquad (\mathrm{II})$$

از رابطه (I) و (II) داریم: $Z_1' \le Z_2''$

قضیه ۴ -۲– جواب بهین در بازه $[Z_1', Z_2'']$ قرار دارد.

اثبات :

$$\text{Min} \qquad Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\text{s.t} \qquad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \ge b_i \qquad i = 1, \dots, m \qquad (۹)$$

$$x_j \ge 0 \qquad j = 1, \dots, n$$

که در آن $a_{ij} \in [a_{ij}^L, a_{ij}^U] \ , \ c_j \in [c_j^L, c_j^U] \ , \ b_i \in [b_i^L, b_i^U] \quad i = 1,2,\dots,m \quad j = 1,2,\dots,n$

ثابت می کنیم جواب بهین مدل فوق در بازه $[Z_1', Z_2'']$ قرار دارد.اگر x^o یک جواب شدنی مدل فوق باشد,داریم :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x^o \ge b_i \qquad i = 1,2,\dots,m$$

از طرفی دیگر $a_{ij} \le a_{ij}^U \quad \xrightarrow{x_j^o \ge 0} \quad a_{ij} x_j^o \le a_{ij}^U x_j^o \quad \forall j \quad \longrightarrow \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^o \le \sum_{j=1}^n a_{ij}^U x_j^o$

با توجه به عبارات فوق و $b_i \ge b_i^L$ داریم : $b_i^L \le b_i \le \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^o \le \sum_{j=1}^n a_{ij}^U x_j^o \qquad i = 1,2,\dots,m$

پس هر جواب شدنی (۹) یک جواب شدنی برای مدل (۴) است .لذا فضای شدنی مسئله (۴) شامل ناحیه شدنی مسئله (۹) است.اکنون ثابت می کنیم مقدار بهین مدل (۹) از مقدار بهین مدل (۴) ناکمتر است . اگر x^* جواب بهینه مدل (۹) باشد :

$$c_j^L \le c_j \quad \xrightarrow{x_j^* \ge 0} \quad c_j^L x_j^* \le c_j x_j^* \quad \forall j \quad \longrightarrow \quad \sum_{j=1}^n c_j^L x_j^* \le \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$$

فرض کنید $Z_1 = \sum_{j=1}^n c_j^L x_j^*$ مقدار تابع هدف مدل (۴) بازاء جواب شدنی x^*باشد(جواب مدل(۱۲) در بدترین شرایط)

داریم : $Z_1 \le Z^*$ و اگر Z_1' جواب بهینه مدل (۴) باشد $Z_1' \le Z_1$ درنتیجه $Z_1' \le Z^*$

به همین ترتیب اگر $\widetilde{x}$ یک جواب شدنی از مدل (۵) باشد آنگاه $\sum_{j=1}^n a_{ij}^L \widetilde{x}_j \ge b_i^U$ و همچنین

$$a_{ij}^{L} \le a_{ij} \quad \forall j \xrightarrow{\tilde{x}_j \ge 0} a_{ij}^{L}\tilde{x}_j \le a_{ij}\tilde{x}_j \quad \forall j \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{L}\tilde{x}_j \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j$$

و چون $b_i^U \ge b_i$, بنابراین $b_i \le b_i^U \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{L}\tilde{x}_j \le \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{x}_j$

پس هر جواب شدنی مدل (۵) یک جواب شدنی برای مدل (۹) است یا بعبارت دیگر ناحیه شدنی مدل (۹) شامل نناحیه شدنی مدل (۵) نیز می باشد.حال ثابت می کنیم مقدار بهین مدل (۵) از مقدار بهین مدل (۹) بزرگتر است . x'' را بعنوان جوای بهینه مسئله (۵) در نظر بگیرید

$$c_j \le c_j^U \quad \forall j \xrightarrow{x''_j \ge 0} c_j x''_j \le c_j^U x''_j \quad \forall j \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} c_j x''_j \le \sum_{j=1}^{n} c_j^U x''_j$$

اگر Z مقدار تابع هدف مدل (۹) بازاء جواب شدنی x'' باشد , $Z \le Z''_2$ و چون Z^* جواب بهینه مدل (۹) است باید $Z^* \le Z$ و درنتیجه $Z^* \le Z''_2$.

بنابراین $Z'_1 \le Z^* \le Z''_2$.

قضیه۶ -۲– اگر $0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le 1$ آنگاه $\left[Z_1^{(\alpha_1)}, Z_2^{(\alpha_2)}\right] \supseteq \left[Z_1^{(\alpha_2)}, Z_2^{(\alpha_2)}\right]$

اثبات : در مسئله (۱۳) بر ش α تمامی ضرایب را در نظر بگیریم ,مسئله به یک مسئله بازه ای تبدیل می شود که در آن فرض می کنیم:

$$\overline{c_j^r} = \alpha_r c_j^m + (1-\alpha)c_j^u \qquad r=1,2 \qquad \underline{c_j^r} = \alpha_r c_j^m + (1-\alpha)c_j^l \qquad r=1,2$$

$$\overline{a_{ij}^r} = \alpha_r a_{ij}^m + (1-\alpha)a_{ij}^u \qquad r=1,2 \qquad \underline{a_{ij}^r} = \alpha_r a_{ij}^m + (1-\alpha)a_{ij}^l \qquad r=1,2$$

$$\overline{b_i^r} = \alpha_r b_i^m + (1-\alpha)b_i^u \qquad r=1,2 \qquad \underline{b_i^r} = \alpha_r b_i^m + (1-\alpha)b_i^l \qquad r=1,2$$

با درنظر گرفتن ضرایب بازه ای , مسئله فوق بر اساس مدل شوچیتگ به دو برنامه ریزی خطی کلاسیک تبدیل می شود .

$$\text{Min} \quad Z_1^{(\alpha_r)} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c_j^r} x_j$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}^r} x_j \ge \underline{b_i^r} \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n$$

(۱۵)

$$\text{Min} \quad Z_2^{(\alpha_r)} = \sum_{j=1}^{n} \overline{c_j^r} x_j$$

s.t

$$\sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}^r} x_j \ge \overline{b_i^r} \qquad i=1,\dots,m$$

$$x_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n$$

(۱۶)

جوابهای LP های ایجاد شده را با بازه های $\left[Z_1'^{(\alpha_1)}, Z_2'^{(\alpha_1)}\right]$ و $\left[Z_1'^{(\alpha_2)}, Z_2'^{(\alpha_2)}\right]$ نمایش می دهیم .

طبق قضیه ۱-۶ با اعمال دو برش فازی بنحویکه $\alpha_1 \le \alpha_2$ بر ضرایب فازی مدل (۱۴) داریم :

$$\left[\underline{b_i^2}, \overline{b_i^2}\right] \subseteq \left[\underline{b_i^1}, \overline{b_i^1}\right] \qquad \left[\underline{a_{ij}^2}, \overline{a_{ij}^2}\right] \subseteq \left[\underline{a_{ij}^1}, \overline{a_{ij}^1}\right] \qquad \left[\underline{c_j^2}, \overline{c_j^2}\right] \subseteq \left[\underline{c_j^1}, \overline{c_j^1}\right]$$

برای اثبات $\left[Z_1^{(\alpha_1)}, Z_2^{(\alpha_2)}\right] \supseteq \left[Z_1^{(\alpha_2)}, Z_2^{(\alpha_2)}\right]$ باید نشان دهیم $Z_1^{(\alpha_1)} \le Z_1^{(\alpha_2)}$ و $Z_2^{(\alpha_2)} \le Z_2^{(\alpha_1)}$.

ابتدا ثابت می کنیم ناحیه شدنی مسئله (۱۵) بازاء r =1 بزرگتر از ناحیه شدنی مربوط به همین مسئله وقتی r =2 می باشد. به این منظور فرض می کنیم x^0 یک جواب شدنی برای مسئله (۱۵) بازاء r =2 باشد, چون $\overline{a_{ij}^1} \ge \underline{a_{ij}^2}$

$$\overline{a_{ij}^1} \ge \underline{a_{ij}^2} \xrightarrow{x_j^0 \ge 0} \overline{a_{ij}^1} x_j^0 \ge \underline{a_{ij}^2 x_j^0} \quad \forall j \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}^1} x_j^0 \ge \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}^2} x_j^0$$

برطبق قیود مدل (۱۵) وقتی r =2 داریم : $\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}^2} x_j^0 \ge \underline{b}_i^2$ و چون $\underline{b_i^2} \ge b_i^1$, بنابراین

$$\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{ij}^1} x_j^0 \ge \sum_{j=1}^{n} \underline{a_{ij}^2} x_j^0 \ge \underline{b_i^2} \ge \underline{b_i^1}$$

اگر x^* جواب بهینه مسئله (۱۵) بازاء r =2 باشد, چون بر طبق برش های α داریم $\underline{c_j^2} \ge \underline{c_j^1}$ لذا خواهیم داشت :

$$\underline{c_j^2} \ge \underline{c_j^1} \xrightarrow{x_j^* \ge 0} \underline{c_j^2} x_j^* \ge \underline{c_j^1} x_j^* \quad \forall j \longrightarrow \sum_{j=1}^{n} \underline{c_j^2} x_j^* \ge \sum_{j=1}^{n} \underline{c_j^1} x_j^* \longrightarrow Z_1'^{(\alpha_2)} \ge Z_1^{*(\alpha_1)} = \sum_{j=1}^{n} \underline{c_j^1} x_j^*$$

چون x^* یک جواب شدنی برای مدل (۱۵) بازاء r =1 است لذا $Z_1'^{(\alpha_1)} \le Z_1^{*(\alpha_1)}$. درنتیجه $Z_1'^{(\alpha 2)} \ge Z_1^{*(\alpha_1)}$ و بطور مـشابه می توان اثبات نمود که $Z_2'^{(\alpha_1)} \ge Z_2'^{(\alpha_{21})}$.

به طور کلی می توان گفت اگر $1 \le \alpha_n \le \ldots \le \alpha_2 \le \alpha_1 \le 0$ باشد آنگاه

$$\left[Z_1'^{(\alpha_1)}, Z_2'^{(\alpha_1)}\right] \supseteq \left[Z_1'^{(\alpha_2)}, Z_2'^{(\alpha_2)}\right] \supseteq \ldots \supseteq \left[Z_1'^{(\alpha_n)}, Z_2'^{(\alpha_n)}\right]$$