پنجمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران
هفدهم الی نوزدهم شهریورماه ۱۳۸۳

روشی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی با توجه به درجه عضویت ضرایب

مجید ظرافت انگیز لنگرودی[۱]، صابر ساعتی مهتدی[۲*]
دانشگاه آزاد اسلامی واحد فیروزکوه، فیروزکوه
***گروه OR، مرکز مطالعات بنیادی، دانشگاه امام حسین (ع)**
mzarafat@yahoo.com

چکیده

در بسیاری از روش‌های موجود برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب فازی، درجه عضویت نقاط مختلف یک عدد فازی یا در نظر گرفته نمی‌شوند و یا با اعمال α- برش، نقاطی در محاسبات دخالت داده می‌شوند که دارای تابع عضویتی بیشتر یا مساوی α باشد. حتی در حالت اخیر نیز درجه عضویت این نقاط تاثیری روی جواب بهین ندارد. در این مقاله، روشی برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی فازی پیشنهاد می‌گردد که در آن برای بهینه سازی تابع هدف، از نقاطی استفاده می‌شود که حتی‌الامکان دارای بیشترین درجه عضویت باشند. این روش برای حالات برنامه‌ریزی خطی با بردار سمت راست فازی، تابع هدف و بردار سمت راست فازی و نهایتاً، برای مساله برنامه‌ریزی خطی فازی در حالت کلی ارائه گردیده است.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی خطی فازی، برنامه‌ریزی چند هدفی، برنامه‌ریزی بازه‌ای، تابع عضویت

۱- مقدمه

مسائل برنامه‌ریزی خطی با داده‌های فازی یکی از موضوعات مورد توجه در تحقیق در عملیات می‌باشد. برنامه‌ریزی خطی فازی اولین بار توسط Tanaka و همکاران [۱] مطرح گردید و بعد از آنها روشهای مختلفی برای حالات گوناگون اینگونه مسائل ارائه شد. دسته‌ای از این روش‌ها مبتنی بر تعیین و بیشینه‌سازی توابع عضویت قیود و تابع هدف مساله برنامه‌ریزی خطی فازی می‌باشد ([۱۱،۱۰،۹،۸،۷،۶،۵،۴،۳،۲]). دسته‌ای دیگر با استفاده از روش‌های موجود برای مقایسه اعداد فازی اقدام به حل اینگونه مسائل نمودند ([۱۴،۱۳،۱۲]). از راهکارهای دیگر می‌توان به روش‌هائی اشاره نمود که از برنامه‌ریزی چند هدفی استفاده شده است ([۱۷،۱۶،۱۵]). روش‌های دیگری نیز بر اساس α- برش موجود هستند ([۲۱،۲۰،۱۹،۱۸]).

در هیچیک از روش‌های موجود، تابع عضویت ضرایب فازی در محاسبات در نظر گرفته نشده است. بعبارت دیگر، بدون درنظر گرفتن درجه عضویت نقاط واقع در اعداد فازی، مساله برنامه‌ریزی خطی فازی حل می‌گردد. که این امر باعث نادیده گرفته شدن مفهوم درجه عضویت در اعداد فازی می‌شود. در حالیکه، یکی از تفاوت‌های اساسی عدد فازی با مجموعه اعداد

۱- مربی، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد فیروزکوه
۲- استادیار، گروه ریاضی، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد تهران ـ شمال

قطعی، مقدار درجه عضویت نقاط است. در این مقاله، روشی ارائه می‌شود که با در نظر گرفتن درجه عضویت ضرایب تابع هدف، بردار سمت راست و ضـرایب فنـی، مقدار بهین تابـع هدف را بدست می‌آورد. بدین ترتیب که ابتدا توابـع عضویت ضرایب فازی مشخص شده و سپس در قالب یک مساله برنامه‌ریزی چند هدفی تابع هدف مساله بهمراه توابع عضویت ضرایب بهینه می‌گردد. بهینه‌سازی توابع عضویت با بیشینه کردن آنها انجام می‌گیرد.

در بخش دوم این مقاله، روش پیشنهادی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی فازی ارائه می‌گردد. چند مثال عددی بکمک مدل‌های ارائه شده در بخش سوم حل شده و نتایج با نتایج برخی از روش‌های موجود مقایسه می‌شود. بخش ۴ اختصاص به نتیجه‌گیری دارد.

۲- روش پیشنهادی برای حل مسایل برنامه‌ریزی چند هدفی

می‌توان یک مسئله برنامه‌ریزی خطی چند هدفی را بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{array}{ll} max & f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x) \\ min & g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x) \\ s.t: & x \in X \end{array}$$

که در آن $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ و $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)$ توابع هدف بوده و X ناحیه شدنی است. در این روش پیشنهادی، ابتدا با حل مسائل زیر، آرمانهای تک تک توابع هدف تعیین می‌گردد:

$$\begin{array}{llll} g_i^* = \min \ g_i(x) & (i = 1, \ldots, m) & f_i^* = \max \ f_i(x) & (i = 1, \ldots, n) \\ s.t: \quad x \in x & & s.t: \quad x \in x & \end{array}$$

سپس با ضرب هر تابع در عکس مقدار بهین خود، تابعی بدون واحد می‌سازیم که برد این توابع بازه $[0,1]$ است. حال، بکمک مسئله برنامه‌ریزی خطی زیر، یک جواب رضایتبخش برای مسئله برنامه‌ریزی چند هدفی بدست می‌آید:

$$\begin{array}{lll} \max & \beta & \\ s.t: & \beta \le \dfrac{f_i(x)}{f_i^*} & i = 1,\ldots,n, \\ & \beta \le -\dfrac{g_i(x)}{g_i^*} & i = 1,\ldots,m, \\ & x \in X & \end{array} \tag{1}$$

۳- روشهای پیشنهادی برای حل مسائل برنامه‌ریزی فازی

اساس کار این روشها، مبتنی بر توابع عضویت ضرایب می‌باشد. هرگاه ضرایب را بصورت اعداد فازی مثلثی در نظر بگیریم در اینصورت، توابع عضویت آنها بفرم زیر خواهد بود:

$$\mu_{\tilde{c}_j}(c_j) = \begin{cases} \dfrac{c_j - c_j^l}{c_j^m - c_j^l} & c_j^l \le c_j < c_j^m \\ \dfrac{c_j - c_j^u}{c_j^m - c_j^u} & c_j^m \le c_j \le c_j^u \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{a}_{ij}}(a_{ij}) = \begin{cases} \dfrac{a_{ij} - a_{ij}^{l}}{a_{j}^{m} - a_{j}^{l}} & a_{ij}^{l} \le a_{ij} < a_{ij}^{m} \\ \dfrac{a_{ij} - a_{ij}^{u}}{a_{ij}^{m} - a_{ij}^{u}} & a_{ij}^{m} \le a_{ij} \le a_{ij}^{u} \end{cases} \tag{۲}$$

$$\mu_{\tilde{b}_i}(b_i) = \begin{cases} \dfrac{b_i - b_i^{l}}{b_i^{m} - b_i^{l}} & b_i^{l} \le b_i < b_i^{m} \\ \dfrac{b_i - b_i^{u}}{b_i^{m} - b_i^{u}} & b_i^{m} \le b_i \le b_i^{u} \end{cases}$$

که در آن، $\tilde{a}_{ij}$، $\tilde{c}_j$ و $\tilde{b}_i$ به ترتیب ضرایب فنی، ضرایب تابع هدف و سمت راست قیود مساله برنامه‌ریزی خطی فازی می‌باشند.

در ادامه، مساله برنامه‌ریزی فازی را در دو حالت منابع فازی و تمام ضرایب فازی در نظر گرفته و روش‌هائی برای حل آنها ارائه می‌دهیم.

۳-۱- منابع فازی

مساله برنامه‌ریزی خطی با منابع فازی بصورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{j=۱}^{n} c_j\, x_j \\ s.t: \quad & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij}\, x_j \le \tilde{b}_i && i = ۱,\ldots,m, \\ & x_j \ge ۰ && j = ۱,\ldots,n. \end{aligned} \tag{۳}$$

روش پیشنهادی بدین شکل است که ضمن اینکه مقدار تابع هدف بیشینه می‌گردد، توابع عضویت منابع نیز بیشینه گردد. بدین منظور فرض می‌کنیم بردار سمت راست بصورت اعداد فازی مثلثی باشد. مدل پیشنهادی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \max \quad & \left\{ \sum_{j=۱}^{n} c_j\, x_j, \left\{ \mu_{\tilde{b}_i}(\bar{b}_i) \right\}_i \right\} \\ s.t: \quad & \sum_{j=۱}^{n} a_{ij} x_j \le \bar{b}_i && i = ۱,\ldots,m, \\ & b_i^{m} \le \bar{b}_i \le b_i^{u} && i = ۱,\ldots,m, \\ & x_j \ge ۰ && j = ۱,\ldots,n. \end{aligned} \tag{۴}$$

که یک مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفی است. برای حل آن، با حل مساله زیر، مقدار بهینه تابع هدف اول را بدست می‌آوریم:

$$
\begin{aligned}
Z^* = \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j \\
s.t: \quad & \sum a_{ij}\, x_j \le b_i^u \qquad i = 1,\ldots,m, \\
& x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۵}
$$

از توابع عضویت بردار سمت راست (۲)، ضابطه مربوط به $b_i \in [b_i^m, b_i^u]$ را انتخاب می‌کنیم. زیرا در این حالت، بردار سمت راست مقادیر بزرگ خود را انتخاب می‌کند و بدین ترتیب ناحیه شدنی بزرگتری حاصل می‌شود و جواب بهینه (۵) بدتر نمی‌شود. بعبارتی انتخاب ضابطه دوم $\mu_{\tilde{b}_i}(b_i)$ در (۲)، مشکلی برای مدل (۵) ایجاد نمی‌کند چرا که بازاء هر مقدار $\mu_{\tilde{b}_i}(b_i)$ می‌توان دو نقطه از بازه $[b_i^l, b_i^u]$ یافت که یکی از آنها متعلق به $[b_i^l, b_i^m]$ و دیگری متعلق به بازه $[b_i^m, b_i^u]$ باشد. حال از بین این دو جواب، جوابی را انتخاب می‌نمائیم که مقدار $\sum_{j=1}^{n} c_j\, x_j$ نیز بازاء آن بیشینه گردد. با توجه به خصوصیات مساله برنامه‌ریزی خطی، این کار زمانی امکان‌پذیر است که ناحیه شدنی کوچکتر نگردد.

از آنجائیکه بیشترین مقدار تابع عضویت، ۱ است بنابراین، با توجه به مدل (۱)، مدل زیر را برای حل (۴) پیشنهاد می‌دهیم:

$$
\begin{aligned}
\max \quad & \beta \\
s.t: \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \le \overline{b}_i \qquad i = 1,\ldots,m, \\
& \beta \le \frac{1}{Z^*} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\
& \beta \le \frac{\overline{b}_i - b_i^u}{b_i^m - b_i^u} \qquad i = 1,\ldots,m, \\
& b_i^m \le \overline{b}_i \le b_i^u \qquad i = 1,\ldots,m, \\
& x_j \ge 0 \qquad j = 1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{۶}
$$

مساله فوق، مدلی با متغیرهای کراندار است. تعداد قیود در روش Werners [۳]، به تعداد منابع بعلاوه ۱ است. حال آنکه، در مدل پیشنهادی، تعداد متغیرهای تصمیم اضافه شده به مساله اصلی به تعداد منابع فازی بوده و تعداد قیود مساله به تعداد منابع فازی بعلاوه ۱ زیاد شده است. در روش ارائه شده توسط Werners [۳]، برای هر قید با منابع فازی، بدون در نظر گرفتن اینکه عدد فازی مربوطه از چه نوعی می‌باشد، تابع عضویتی در نظر گرفته شده است. هرچند از حل مساله بروش مذکور جوابی بعنوان جواب بهینه بدست می‌آید ولی معلوم نیست که در ارتباط با عدد فازی مورد نظر، این جواب بهترین باشد. از طرف دیگر، در روش Werners [۳]، سه مساله برنامه‌ریزی خطی حل می‌شود. در حالیکه، در روش پیشنهادی، با حل یک مساله برنامه‌ریزی خطی با متغیرهای کراندار به جوابی می‌رسیم که دارای درجه عضویت بالائی است.

۲-۳- تمام ضرایب فازی

مساله برنامه‌ریزی خطی با تمام ضرایب فازی را می‌توان بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \sum_{j=1}^{n} \tilde{c}_j x_j \\
s.t: \quad & \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_{ij} x_j \le \tilde{b}_i \qquad i=1,\ldots,m, \\
& x_j \ge 0 \qquad j=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{7}$$

فرض می‌کنیم تمام ضرایب بصورت اعداد فازی مثلثی باشد. مدل پیشنهادی عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \left\{ \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j, \left\{\mu_{\tilde{a}_{ij}}(\bar{a}_{ij})\right\}_{i,j}, \left\{\mu_{\tilde{b}_i}(\bar{b}_i)\right\}_i, \left\{\mu_{\tilde{c}_j}(\bar{c}_j)\right\}_j \right\} \\
s.t: \quad & \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \le \bar{b}_i \qquad i=1,\ldots,m, \\
& a_{ij}^{l} \le \bar{a}_{ij} \le a_{ij}^{m} \qquad i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n, \\
& b_i^{m} \le \bar{b}_i \le b_i^{u} \qquad i=1,\ldots,m, \\
& c_j^{m} \le \bar{c}_j \le c_j^{u} \qquad j=1,\ldots,n, \\
& x_j \ge 0 \qquad j=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{8}$$

که یک مساله برنامه‌ریزی خطی چند هدفی است. برای حل آن، با حل مساله زیر، مقدار بهینه تابع هدف اول را بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
Z^* = \max \quad & \sum_{j=1}^{n} c_j^{u} x_j \\
s.t: \quad & \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{l} x_j \le b_i^{u} \qquad i=1,\ldots,m, \\
& x_j \ge 0 \qquad j=1,\ldots,n.
\end{aligned} \tag{9}$$

مدل زیر را برای حل (۷) پیشنهاد می‌دهیم:

$$\begin{aligned}
\max \quad & \beta \\
s.t: \quad & \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \le \bar{b}_i \qquad i=1,\ldots,m, \\
& \beta \le \frac{1}{Z^*} \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \\
& \beta \le \frac{\bar{a}_{ij} - a_{ij}^{l}}{a_{ij}^{m} - a_{ij}^{l}} \qquad i=1,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n, \\
& \beta \le \frac{\bar{b}_i - b_i^{u}}{b_i^{m} - b_i^{u}} \qquad i=1,\ldots,m,
\end{aligned} \tag{10}$$

$$\beta \le \frac{\bar{c}_j - c_j^u}{c_j^m - c_j^u} \qquad j = ۱,\ldots,n,$$
$$a_{ij}^l \le \bar{a}_{ij} \le a_{ij}^m \qquad i = ۱,\ldots,m,\ j = ۱,\ldots,n,$$
$$b_i^m \le \bar{b}_i \le b_i^u \qquad i = ۱,\ldots,m,$$
$$c_j^m \le \bar{c}_j \le c_j^u \qquad j = ۱,\ldots,n,$$
$$x_j \ge ۰ \qquad j = ۱,\ldots,n.$$

۴- مثال‌های عددی

مثال ۱: مساله برنامه‌ریزی خطی با بردار سمت راست فازی زیر را در نظر می‌گیریم:

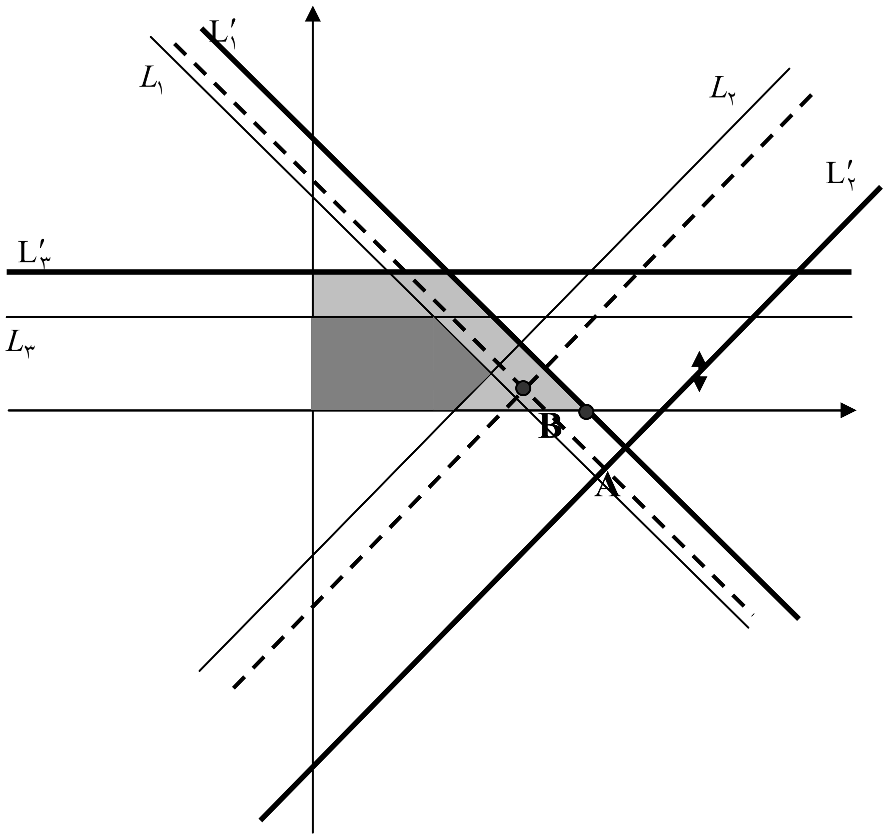
$$\begin{aligned} \max \quad & x_۱ + ۰/۵x_۲ \\ s.t: \quad & x_۱ + x_۲ \le (۳,۲,۴) \\ & x_۱ - x_۲ \le (۲,۱,۵) \\ & ۳x_۲ \le (۴,۲,۶) \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned} \tag{۱۱}$$

برای بدست آوردن Z^*، مساله زیر باید حل گردد:

$$\begin{aligned} \max \quad & Z = x_۱ + ۰/۵x_۲ \\ s.t: \quad & x_۱ + x_۲ \le ۴ \\ & x_۱ - x_۲ \le ۵ \\ & ۳x_۲ \le ۶ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned} \tag{۱۲}$$

با حل مدل (۱۲)، $(x_۱^*, x_۲^*) = (۴,۰)$ و $Z^* = ۴$ حاصل می‌شود. با توجه به این نتایج و با استفاده از مدل (۶)، مساله زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \max \quad & \beta \\ s.t: \quad & x_۱ + x_۲ \le \bar{b}_۱ \\ & x_۱ - x_۲ \le \bar{b}_۲ \\ & ۳x_۲ \le \bar{b}_۳ \\ & \beta \le \frac{۱}{۴}(x_۱ + ۰/۵x_۲) \\ & \beta \le \frac{\bar{b}_۱ - ۴}{۳ - ۴}, \quad \beta \le \frac{\bar{b}_۲ - ۵}{۲ - ۵}, \quad \beta \le \frac{\bar{b}_۳ - ۶}{۴ - ۶} \\ & ۳ \le \bar{b}_۱ \le ۴, \quad ۲ \le \bar{b}_۲ \le ۵, \quad ۴ \le \bar{b}_۳ \le ۶ \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned} \tag{۱۳}$$

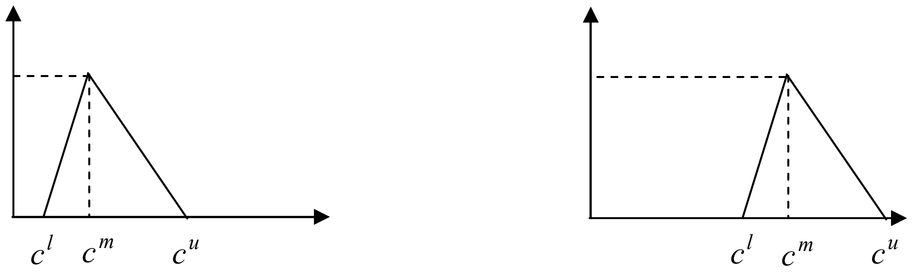


شکل ۱ــ نواحی شدنی مثال ۱ در بهترین و بدترین حالات

جواب حاصل از این مساله عبارت است از $(x_۱^*, x_۱^*) = (۲/۹۵, ۰/۲۷)$ و $Z^* = ۳/۰۹$. این جواب، بازاء $\beta = ۰/۷۷$ حاصل شده است. قابل ذکر است که پس از حل مساله، بردار سمت راست $(b_۱, b_۲, b_۳) = (۳/۲۳, ۲/۶۸, ۴)$ بدست آمد. این بردار، با توجه به توضیحات بخش پیشین، بگونه‌ای نعیین شده است که علاوه بر اینکه مقدار تابع هدف بیشینه می‌گردد، درجه عضویت مقادیر سمت راست نیز در نظر گرفته می‌شود و اختلاف موجود در مقادیر بهین حاصل از حل مدل‌های (۱۲) و (۱۳) نیز بدین خاطر است.

برای توضیح بیشتر، به شکل ۱ توجه می‌کنیم. بدون در نظر گرفتن درجه عضویت برای اعداد فازی مساله، این اعداد را می‌توان بترتیب بصورت بازه‌های [۳,۴]، [۲,۵] و [۴,۶] نمایش داد. بدیهی است که مساله (۱۱) بهترین وضعیت خود را در انتهای این بازه‌ها گرفته و معادل مساله (۱۲) می‌گردد. ناحیه محدود به خطوط $L'_۱$، $L'_۲$ و $L'_۳$، ناحیه شدنی مساله برنامه‌ریزی خطی متناظر را نشان می‌دهد. جواب بهین این مساله نیز در نقطه A واقع است. این نقطه از حل مساله (۱۲) حاصل گردیده است. در این نقطه، درجه عضویت، کمترین مقدار یعنی صفر بوده و به تبع آن β نیز صفر خواهد بود. زمانیکه اهمیت عدد

عضویت را بعنوان یکی دیگر از اهداف مساله در نظر بگیریم، $b_۱$، $b_۲$ و $b_۳$ بسمت ۳، ۲ و ۴ میل خواهند کرد. لذا، در تعامل بین این دو هدف، خطوط $L'_۱$، $L'_۲$ و $L'_۳$ بسمت خطوط $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ حرکت داده می‌شوند تا اینکه ناحیه‌ای حاصل گردد که مقدار بهین تابع هدف با در نظر گرفتن عدد عضویت بدست آید. این حرکت، با حل مساله (۱۳) حاصل می‌شود. ناحیه محدود به خطوط مقطع و خط $L_۳$، ناحیه شدنی مساله را در شرایط بهینه نشان داده و نقطه B، نقطه بهین است.



الف ب

شکل ۲

مثال ۲: مساله برنامه‌ریزی خطی با تمام ضرایب فازی زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} \max \quad & x_۱ + (۰/۵,۰/۳,۲)x_۲ \\ s.t: \quad & (۱,۰/۵,۱/۵)x_۱ + x_۲ \le (۳,۲,۴) \\ & x_۱ - x_۲ \le (۲,۱,۵) \\ & ۳x_۲ \le (۴,۲,۶) \\ & x_۱, x_۲ \ge ۰ \end{aligned} \tag{۱۴}$$

با حل مدل (۹)، $(x_۱^*, x_۱^*) = (۴,۲)$ و $Z^* = ۸$ حاصل می‌شود. با توجه به این نتایج و با استفاده از مدل (۱۰)، جواب و مقدار بهین مساله (۱۴) عبارت خواهد بود از: $(x_۱^*, x_۱^*) = (۳/۸۳,۰/۴۸)$ و $Z^* = ۴/۴$.

۵- نتیجه‌گیری

مفهوم α-برش را می‌توان معادل اهمیت دادن به درجه عضویت دانست. هرچقدر α بزرگتر باشد، عدد به m خود نزدیکتر می‌شود. یکی از معایب روشهای برشی آن است که پس از اعمال برش، اثر توابع عضویت در منطقه برش نادیده گرفته شده و در نتیجه مساله تبدیل به یک مساله بازه‌ای می‌شود و این بدان معنی است که از آنچه فازی بیان می‌کند دور شده‌ایم. با توجه به این که تفاوت یک بازه در مجموعه اعداد حقیقی با یک بازه در مجموعه اعداد فازی، تابع عضویت آن است، اهمیت موضوع بیشتر نمایان می‌گردد. بنابراین، در نظر گرفتن درجه عضویت ضرایب در تمام مراحل حل مساله، امری ضروری است.

بسیاری از روشهای غیر برشی ی‌رای حل مساله، دارای مشکلاتی هستند. بعنوان مثال، Werners [۳]، برای حل مساله برنامه‌ریزی خطی با منابع فازی، توابع عضویتی برای قیود و تابع هدف ساخت. سوالی که مطرح می‌شود این است که این توابع عضویت چه ارتباطی با توابع عضویت اعداد فازی سمت راست مساله برنامه‌ریزی خطی دارند و با تغییر تابع عضویت مساله فوق، تابع عضویت قیود چه تغییری خواهد کرد و ارتباط بین آنها چگونه است؟ روش پیشنهادی Lai و Hwang [۱۵] برای حل

مساله برنامه‌ریزی خطی با ضرایب تابع هدف فازی، نقاط انتهائی و وسط عدد فازی و فاصله این نقاط از مرکز را در محاسبه جواب بهینه مورد نظر قرار می‌دهد. اینکه عدد عضویت چگونه در این مساله دیده می‌شود، جای سوال است.

شکل ۲ را در نظر می‌گیریم. همانطورکه از قبل توضیح داده شد، جواب بهینه با توجه به ماهیت عدد فازی در فاصله $[c^m, c^u]$ اتفاق می‌افتد. حال فرض کنیم از روش Max-Min برای حل مساله چند هدفه استفاده کنیم. اگر $c^l - c^m \geq c^m$ (شکل ۲الف)، در اینصورت xهایی که $c^m x$ را ماکزیمم کنند، بهترین جواب خواهد بود و اگر $c^l - c^m < c^m$ (شکل ۲ب)، در اینصورت xهایی که $(c^l - c^m)x$ را ماکزیمم کنند، بهترین جواب خواهد بود. بعبارتی، جواب بهین با فاصله c^m از c^l و فاصله c^m از مبدا رابطه مستقیم دارد. در حالیکه، مقدار بهین مساله باید مستقل از این رابطه باشد.

روش پیشنهادی در این طرح پژوهشی، روشی مبتنی بر توابع عضویت ضرایب می‌باشد. همانطوریکه در بخش قبلی اشاره شد، در روش ارائه شده، βای محاسبه می‌شود که بازاء آن، اعدادی از بازه مربوط به اعداد فازی انتخاب می‌شوند که حتی‌الامکان دارای بزرگترین درجه عضویت باشند. از اینرو، روش پیشنهادی را می‌توان تعمیم α- برش دانست.

مراجع

[1] Tanaka, H., T. Okuda and K. Asai, On fuzzy mathematical programming, *Journal of Cybernetics* 3 (1974) 37-46.
[2] Verdegay, J. L., Fuzzy mathematical programming, (1982) 231-236.
[3] Werners, B., Interactive multiple objective programming subject to flexible constraints, *European Journal of Operational Research* 31 (1987) 342-349
[4] Werners, B., An interactive fuzzy programming system, *Fuzzy Sets and Systems* 23 (1987) 131-147.
[5] Zimmermann, H. –J., Description and optimization of fuzzy system, *International Journal System* 2 (1976) 209-216.
[6] Chanas, S., The use of parametric programming in FLP, *Fuzzy Sets and Systems* 11 (1983) 243-251.
[7] Verdegay, J. L., A dual approach to solve the fuzzy linear programming problem, *Fuzzy Sets and Systems* 14 (1984) 131-141.
[8] Verdegay, J. L., Application of fuzzy optimization in operational research, *Control and Cybernetics* 13 (1984) 229-239.
[9] Carlsson, C. and P. Korhonen, A parametric approach to fuzzy linear programming, *Fuzzy Sets and Systems* 20 (1986) 17-30.
[10] Lai, Y. J. and C. L. Hwang, Interactive fuzzy Linear programming, *Fuzzy Sets and Systems* 45 (1992) 169-183.
[11] Lin, C.-C. and Chen ,A.-P., Generalization of Yang et al. method for fuzzy programming with piecewise linear membership functions , *Fuzzy Sets and Systems* 132 (2002) 347-352.
[12] Ramik, J. and J. Rimanek, Inequality relation between fuzzy numbers and its use in fuzzy optimization, *Fuzzy Sets and Systems* 16 (1985) 123-138.
[13] Tanaka, H., H. Ichihashi and K. Asai, A formulation of fuzzy linear programming problems based on comparison of fuzzy numbers, *Control and Cybernetics* 13 (1984) 186-194.
[14] Dubois, D., Linear programming with fuzzy data, (1987) 241-263.
[15] Lai, Y. J. and C. L. Hwang, A new approach to some possibilistic linear programming problem, *Fuzzy Sets and Systems* 49 (1992).
[16] Rommelfanger, H., R. Hanuscheck and J. Wolf, Linear programming with fuzzy objectives, *Fuzzy Sets and Systems* 29 (1989) 31-48.
[17] Delgado, M., J. L. Verdegay and M. A. Vila, Relating Different Approaches to Solve Linear Programming Problems With Imprecise Costs, Fuzzy Sets and Systems 37 (1990), pp. 33-42.
[18] Buckley, J. J., Possibilistic linear programming with triangular fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems* 26 (1988) 135-138.
[19] Buckley, J. J., Solving possibilistic linear programming problems, Fuzzy Sets and Systems 31 (1989) 329-341.
[20] Negi, D. S., Fuzzy Analysis and Optimization (1989), PhD. Dissertation, Dept. of I.E., Kansas State University.

[21] Saati M., S., A. Memariani and G. R. Jahanshahloo, (2002), "Efficiency Analysis and Ranking of DMUs with Fuzzy Date," Fuzzy Optimization and Decision Making 1, (3) 255-267.