پنجمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران
هفدهم الی نوزدهم شهریورماه ۱۳۸۳

توسعه روشی جهت تقریب ذوزنقه‌ای اعداد فازی

سید رسول حسینی بهارانچی[۱]
گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه امام حسین (ع)
rhoseini@ihu.ac.ir

چکیده

در مقاله حاضر روشی جهت تقریب بهتر اعداد فازی به‌وسیله اعداد فازی ذوزنقه‌ای توسعه داده می‌شود. این روش نسبت به عدد فازی اصلی پیوسته و ناریب بوده و به‌علاوه مبتنی بر رویکردی ساده و شهودی است. در این روش با استفاده از تعریف مفهوم فاصله بین دو عدد فازی، بر روی کمینه‌سازی فاصله بین تقریب ذوزنقه‌ای و عدد اصلی فازی تمرکز می‌شود. بر این اساس چهار پارامتر اساسی تشکیل‌دهنده عدد فازی ذوزنقه‌ای برآورد و محاسبه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: اعداد فازی– تقریب ذوزنقه‌ای – فاصله بین دو عدد فازی

۱- مقدمه

بحث برآورد و تقریب اعداد فازی چه در حوزه مباحث تئوری و چه در بخش‌های عملی از اهمیت قابل‌ملاحظه‌ای برخوردار بوده، و مطالعات نسبتاً گسترده‌ای در این زمینه انجام گرفته است [۱-۳]. در این میان، بحث تخمین اعداد فازی از جمله حوزه‌هایی بوده که همواره کانون مطالعات قرار داشته است. روش‌های مختلف ارایه‌شده در ادبیات موضوع، هرچند شرایط لازم مربوطه را برآورده می‌سازند، با این حال، امکان یک قضاوت جامع نسبت به ارجحیت روش‌های مختلف تخمین اعداد فازی وجود ندارد. درواقع، روش‌های ارایه‌شده هر یک به فراخور کاربردی خاص توسعه داده شده‌اند، و از دیدگاه کاربرد مربوطه از کارایی لازم برخوردار می‌باشند.

در مطالعه حاضر، فضای کلیه اعداد فازی با F(R) نشان داده می شود. اگر دو عدد فازی A و B به وسیله برش های α به ترتیب به صورت $[A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$ و $[B_L(\alpha), B_U(\alpha)]$ نشان داده شوند، آنگاه مقدار

$$d(A,B)=\sqrt{\int_0^1 (A_L(\alpha)-B_L(\alpha))^2\,d\alpha+\int_0^1 (A_U(\alpha)-B_U(\alpha))^2\,d\alpha} \qquad (۱)$$

فاصله بین A و B خواهد بود [۴]. شاخص مهم دیگر در این زمینه، تقریب بازه عدد فازی A، (EI(A)) می‌باشد که در مراجع به صورت

$$EI(A)=\left[\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha, \int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha\right] \qquad (۲)$$

تعریف شده است [۵،۶] .

۱- عضو هیئت علمی گروه مهندسی صنایع، دانشکده فنی مهندسی، دانشگاه امام حسین (ع)

اعداد فازی ذوزنقه ای از جمله مهم ترین و متداول ترین اعداد فازی مورد استفاده است که تابع عضویت آن به صورت ذیل نشان داده می شود:

$$\mu_A(x) = \begin{vmatrix} 0 & if & x < a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & if & a_1 \le x < a_2 \\ 1 & if & a_2 \le x < a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & if & a_3 \le x < a_4 \\ 0 & if & a_4 < x \end{vmatrix} \tag{۳}$$

از آنجایی‌که چهار شاخص $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$ تعیین‌کننده یک عدد فازی ذوزنقه‌ای هستند، معمولاً اعداد فازی ذوزنقه‌ای به صورت $A(a_1, a_2, a_3, a_4)$ نشان داده می‌شوند. با توجه به رابطه فوق برای محاسبه بازه اعداد فازی، این بازه در اعداد ذوزنقه‌ای به سادگی و به صورت

$$EI(A) = \left[\frac{a_1 + a_2}{2}, \frac{a_3 + a_4}{2}\right] \tag{۴}$$

محاسبه خواهد شد.

۲- تقریب ذوزنقه‌ای اعداد فازی

تقریب ذوزنقه‌ای اعداد فازی از روش‌های مختلفی امکان‌پذیر است. با این حال در مقاله حاضر روشی ارایه می‌شود که عدد فازی ذوزنقه‌ای حاصل از آن نزدیک‌ترین تخمین را به عدد فازی اصلی خواهد داشت.

عدد فازی A و برش α آن به‌صورت $[A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$ را درنظر بگیرید. با استفاده از شاخص فاصله *d(l)* و تخمین ذوزنقه‌ای $[A_L(\alpha), A_U(\alpha)]$، فاصله تخمین ذوزنقه‌ای تا عدد فازی اصلی به صورت زیر خواهد بود:

$$d(A,T(A)) = \sqrt{\int_0^1 (A_L(\alpha) - T_L(\alpha))^2 \, d\alpha + \int_0^1 (A_U(\alpha) - T_U(\alpha))^2 \, d\alpha} \tag{۵}$$

حال با درنظر گرفتن $T(A) = [t_1 + (t_2 - t_1)\alpha, t_4 - (t_4 - t_3)\alpha]$، رابطه (۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$d(A,T(A)) = \sqrt{\int_0^1 (A_L(\alpha) - (t_1 + (t_2 - t_1)\alpha))^2 \, d\alpha + \int_0^1 (A_U(\alpha) - (t_4 - (t_4 - t_3)\alpha)^2 \, d\alpha} \tag{۶}$$

با توجه به این امر که برای تخمین ذوزنقه‌ای چهار نقطه آن باید مشخص گردد، نقاط $t_1 \le t_2 \le t_3 \le t_4$ باید به نحوی تعیین گردند که فاصله $d(A,T(A))$ با درنظر داشتن شرط

$$EI(T(A)) = EI(A) \tag{۷}$$

کمینه گردد. بر این اساس خواهیم داشت:

$$EI(T(A)) = EI(A) \Rightarrow \left[\frac{t_1 + t_2}{2}, \frac{t_3 + t_4}{2}\right] = \left[\int_0^1 A_L(\alpha) d\alpha, \int_0^1 A_U(\alpha) d\alpha\right] \tag{۸}$$

حال همانگونه که مشخص است با درنظر داشتن شرایط زیر:

$$\begin{aligned}&\frac{t_1+t_2}{2}-\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha=0\\&\frac{t_3+t_4}{2}-\int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha=0\end{aligned} \tag{۹}$$

برای کمینه‌سازی $d(A,T(A))$ کافی است تا تابع $D(t_1,t_2,t_3,t_4)=d^2(A,T(A))$ حداقل گردد. حال با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، $t_1\le t_2\le t_3\le t_4$ به شرح ذیل، مشخص می‌گردند.

$$\begin{aligned}H(t_1,t_2,t_3,t_4)=&\int_0^1\left[A_L(\alpha)-(t_1+(t_2-t_1)\right]^2d\alpha+\int_0^1\left[A_U(\alpha)-(t_4-(t_4-t_3)\right]^2d\alpha\\&+\lambda_1\left(\frac{t_1+t_2}{2}-\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha\right)+\lambda_2\left(\frac{t_3+t_4}{2}-\int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha\right)\end{aligned} \tag{۱۰}$$

λ_1 و λ_2 اعداد حقیقی هستند که به عنوان ضرایب لاگرانژ معرفی می‌گردند. حال به‌منظور تعیین $t_1\le t_2\le t_3\le t_4$ از رابطه بالا دیفرانسیل‌های جزئی ذیل گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned}\tfrac{\delta H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_1}&=2\int_0^1\left[A_L(\alpha)-(t_1+(t_2-t_1)\alpha\right](\alpha-1)d\alpha+\tfrac{1}{2}\lambda_1\\\tfrac{\delta H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_2}&=2\int_0^1\left[A_L(\alpha)-(t_1+(t_2-t_1)\alpha\right](-\alpha)d\alpha+\tfrac{1}{2}\lambda_1\\\tfrac{\delta H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_3}&=2\int_0^1\left[A_U(\alpha)-(t_4-(t_4-t_3)\alpha\right](-\alpha)d\alpha+\tfrac{1}{2}\lambda_2\\\tfrac{\delta H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_4}&=2\int_0^1\left[A_U(\alpha)-(t_4+(t_4-t_3)\alpha\right](\alpha-1)d\alpha+\tfrac{1}{2}\lambda_2\end{aligned} \tag{۱۱}$$

سپس معادلات ذیل حل می‌گردد:

$$\begin{cases}\frac{\delta H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_1}=0\\\frac{\delta H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_2}=0\\\frac{\delta H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_3}=0\\\frac{\delta H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_4}=0\end{cases} \tag{۱۲}$$

نتایج حاصل از حل معادلات فوق عبارت است از:

$$t_1=-6\int_0^1\alpha A_L(\alpha)d\alpha+4\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha \tag{۱۳}$$

$$t_2=6\int_0^1\alpha A_L(\alpha)d\alpha-2\int_0^1 A_L(\alpha)d\alpha \tag{۱۴}$$

$$t_3=6\int_0^1\alpha A_U(\alpha)d\alpha-2\int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha \tag{۱۵}$$

$$t_4 = -6\int_0^1 \alpha A_U(\alpha)d\alpha + 4\int_0^1 A_U(\alpha)d\alpha \qquad (۱۶)$$

حال، با توجه به روابط (۱۷) الی (۲۰):

$$\det\left[\frac{\delta^2 H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_i \delta t_j}\right] = \det\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} > 0 \qquad (۱۷)$$

$$\det\left[\frac{\delta^2 H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_i \delta t_j}\right]_{i=1,2,3;\,j=1,2,3} = \frac{2}{9} > 0 \qquad (۱۸)$$

$$\det\left[\frac{\delta^2 H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_i \delta t_j}\right]_{i=1,2;\,j=1,2} = \frac{1}{3} > 0 \qquad (۱۹)$$

$$\det\left[\frac{\delta^2 H(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\delta t_1^2}\right] = \frac{2}{3} > 0 \qquad (۲۰)$$

t_1، t_2، t_3 و t_4 حاصل از روابط۱۳ تا ۱۶، $D(A,T(A))$ و همزمان $d(A,T(A))$ را کمینه خواهد ساخت. بنابراین t_1، t_2، t_3 و t_4 حاصله تشکیل عدد ذوزنقه‌ای را خواهند داد که حداکثر تطابق را با عدد فازی A دارد.

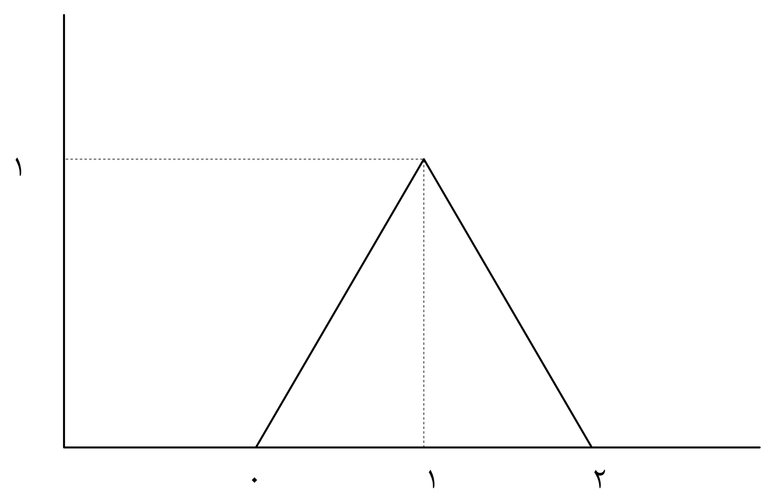
۳- مثال

به منظور بررسی عملکرد فرایند تقریب ذوزنقه‌ای فوق، چند مثال عددی در ادامه ارایه می‌شود.

عدد نرمال فازی مثلثی (۰،۱،۲) را مطابق شکل ۱ در نظر بگیرید.

حال با اعمال برش‌های α به صورت $A_L(\alpha)$ و $A_U(\alpha)$ خواهیم داشت:

$$A_L(\alpha) = \alpha$$
$$A_U(\alpha) = -\alpha = 2$$



شکل ۱- عدد فازی مثلثی (۲،۱،۰)

حال با انجام محاسبات مربوط به روابط (۱۳) الی (۱۶)، t_1، t_2، t_3 و t_4 به صورت ذیل حاصل خواهند گردید:

$t_1 = 0$
$t_2 = 1$
$t_3 = 1$
$t_4 = 2$

تقریب فوق یک عدد فازی مثلثی کاملاً منطبق با عدد اولیه است. با درنظر گرفتن اینکه عدد فازی مثلثی حالت خاص یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است، تقریب ذوزنقه‌ای فوق معتبر می‌باشد.

در یک مثال دیگر، حال عدد فازی مثلثی نامتقارن (۰،۱،۳) را درنظر بگیرید. در این حالت تقریب ذوزنقه حاصله عبارت است از:

$t_1 = 0$
$t_2 = 1$
$t_3 = 3$
$t_4 = 3$

در حالت عمومی تر، برای عدد فازی با تابع عضویت ذیل

$$\mu_H(x) = \frac{1}{1+(x-5)^4} \qquad for \qquad 0 < x < 5$$
$$\mu_L(x) = \frac{1}{1+(x+5)^4} \qquad for \qquad -5 < x < 0$$

تقیب ذوزنقه‌ای حاصله عبارت است از:

$t_1 = -5$
$t_2 = -1.12$
$t_3 = 1.12$
$t_4 = 5$

۴- جمع‌بندی

در مقاله حاضر،یک رویکرد جدید در برآورد ذوزنقه‌ای اعداد فازی ارایه شده است. تقریب ارایه‌شده، علاوه بر سادگی، پیوسته بوده و برای اعداد فازی یک‌طرفه و دو طرفه کارایی دارد. ضمن اینکه تقریب ذوزنقه‌ای خود به‌عنوان تقریبی کارا در ریاضیات فازی کاربرد گسترده‌ای دارد.

۵- منابع و مراجع

[1] Bortolan G., Degani R., “A review of some methods for ranking fuzzy subsets”, Fuzzy Sets and Systems 15 (1985), pp. 1-19.
[2] Chanas S, “On the interval approximation of fuzzy number’, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001), pp. 353-6.
[3] Chiang D.A., Lin N.P., “Correlation of fuzzy sets” Fuzzy Sets and Systems 102 (1999), pp. 221-6.
[4] Grzegorzewski P., “Metrics and orders in space of fuzzy numbers, Fuzzy Sets and Systems 97 (1998), pp. 83-94.
[5] Dubois D., Prade H., “The mean value of fuzzy number”, Fuzzy Sets and Systems 24 (1987), pp. 279-300.
[6] Heilpern S., “The expected value of a fuzzy number”, Fuzzy Sets and Systems 47 (1992), pp. 81-6.