پنجمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران
هفدهم الی نوزدهم شهریورماه ۱۳۸۳

بررسی روابط نامساوی بین اعداد فازی ذوزنقه‌ای و اثبات خواص آن‌ها

مسعود مصدق‌خواه[۱]

دانشگاه امام حسین(ع)، دانشکده فنی مهندسی

mmosdegh@ihu.ac.ir

چکیده

مقایسه و مرتب کردن اعداد فازی، یکی از مسائلی است که اغلب در نظریه فازی مطرح بوده، و در کاربردهای نظریه فازی در حوزه‌های تصمیم‌گیری و کنترل، بیشتر مورد نیاز بوده‌است. هر نوع مقایسه بین اعداد فازی، مستلزم تعریف یک رابطه نامساوی است. رابطه نامساوی بین اعداد حقیقی، دارای خواصی است که در اثبات روابط جبری روی نامعادلات حقیقی، از آن‌ها استفاده می‌شود. تعمیم این خواص در مورد روابط نامساوی بین اعداد فازی، موجب تسهیل بعضی استنتاجات جبری مربوط به نامعادلات فازی می‌گردد. بیشتر روابط مقایسه‌ای فازی ارائه شده در ادبیات موضوع، فاقد چنین خواصی هستند یا خواص آنها اثبات نشده‌است. در این مقاله، ضمن تعریف دو نوع رابطه نامساوی، خواص آن‌ها تعیین و اثبات شده‌است. همچنین، برای برخی از روابط نامساوی موجود، خاصیت‌هایی مورد بررسی و اثبات قرار گرفته‌است. در این مطالعه، به‌دلیل کاربرد زیاد، اعداد فازی ذوزنقه‌ای مبنای اثبات قضایا بوده‌است.

واژه های کلیدی: عدد فازی- روابط نامساوی فازی- مقایسه اعداد فازی- استنتاجات جبری فازی.

۱- مقدمه

برای نشان دادن بسیاری از پارامترهای غیر قطعی در دنیای واقعی، می‌توان از اعداد فازی استفاده کرد. همچنین می‌توان بسیاری از پارامترهای کیفی را نیز توسط اعداد فازی (به‌صورت متغیرهای زبانی) بیان کرد. به‌همین علت، این اعداد به‌طور گسترده‌ای در حوزه‌های مختلف، از جمله نظریه‌های تصمیم‌گیری، کنترل و زمان‌بندی فازی، به‌کار رفته‌اند.

همزمان با استفاده از اعداد فازی، بحث مقایسه آن‌ها اهمیت پیدا می‌کند. متاسفانه، بر خلاف اعداد حقیقی، رابطه نامساوی بین اعداد فازی، منحصر به‌فرد نیست؛ بلکه، توسط محققین مختلف، ده‌ها روش و معیار برای مقایسه اعداد فازی ارائه شده‌است. هر کدام از این روش‌ها، برای کاربردهای ویژه مفید هستند و معمولا نمی‌توان یکی را نسبت به دیگری صاحب برتری دانست. هر روش مقایسه، مبین یک رابطه نامساوی است، زیرا با استفاده از آن می‌توان به‌صورت قطعی یا فازی، حکم کرد که کدام عدد از دیگری بزرگتر است. در بسیاری از موارد، همچون رتبه‌بندی جایگزینه‌ها، یا پیدا کردن بیشترین و کمترین چند عدد فازی، خواص رابطه نامساوی چندان اهمیتی ندارد. اما در مواردی که لازم باشد از یک یا ترکیب چند رابطه نامساوی، پس از انجام بعضی عملیات جبری یا بدون آن، رابطه نامساوی دیگری استنتاج شود، خواص این نامساوی‌ها باید اثبات شود.

در بخش دوم این مقاله، بعضی از روش‌های ارائه شده در منابع در مورد مقایسه اعداد فازی به‌طور مختصر بیان می‌شود. در بخش سوم، در مورد عملگر ماکزیمم دو عدد فازی بحث خواهیم‌کرد. این عملگر نقش مهمی در تعریف رابطه نامساوی نسبی ایفا می‌کند. بخش چهارم که قسمت اصلی مقاله را تشکیل می‌دهد، به معرفی دو رابطه نامساوی از دیدگاه نسبتا جدیدی

۱- استادیار و مدیر گروه مهندسی صنایع

می‌پردازد. نابرابری مطلق، صریح‌ترین نوع نامساوی است که برای آن می‌توان خصوصیاتی را اثبات نمود. نابرابری نسبی که بر اساس عملگر ماکزیمم اعداد فازی تعریف شده‌است، در بخش سوم بررسی می‌شود. این رابطه نامساوی نیز دارای ویژگی‌هایی است که این ویژگی‌ها در ادامه اثبات می‌گردند. همچنین، بیان خواص برخی از روابط نامساوی موجود در ادبیات، در پایان این بخش انجام می‌شود.

۲- مرور روش‌های مقایسه بین اعداد فازی

برای مقایسه‌ی اعداد فازی، بر خلاف اعـداد حقیقی، معیار منحصر به فرد، محکم و مورد قبول عام وجود ندارد و این مطلب همواره به عنوان یک مسئله برای محققین مطرح بوده است. به همین دلیل، تاکنون تعداد زیادی معیار، روش و قاعده برای مرتب کردن اعداد فازی ارائه شده که بر اساس کاربردهای گوناگون، مفروضات و سلیقه‌ی نویسندگان، متفاوت بوده‌اند و معمولا نمی‌توان یکی را نسبت به دیگری صاحب برتری دانست [1]. هیچ کدام از این روش‌ها هنوز مقبولیت عامه پیدا نکرده و به‌صورت قرارداد کلی در نیامده است و ارائه روش‌های جدیدتر هنوز ادامه دارد. به‌طور کلی مقایسه اعداد فازی با یکدیگر، در متون مربوط به نظریه فازی بسیار مطرح بوده و روش‌ها و دیدگاههای مختلفی در این مورد ارائه شده‌است[۱]. دو گونه اساسی برای مقایسه عبارتند از:

۱- *مقایسهٔ فازی.* بین دو عدد فازی مقایسه زوجی انجام می‌شود و نتیجهٔ مقایسه، خود به‌صورت یک تابع عضویت، یعنی درجه‌ای از بزرگتر یا کوچکتر بودن یک عدد نسبت به‌دیگری، بیان می‌گردد.

۲- *مقایسهٔ صریح.* در این روش‌ها، نتیجه مقایسه به‌صورت صریح بیان می‌شود. یعنی بر اساس یک قاعده تعریف شده، اعلام می‌شود که یک عدد نسبت به‌دیگری، بزرگتر، کوچکتر یا مساوی است.

روش‌های نوع اول بیشتر در مسائلی که با رتبه‌بندی جایگزینه‌ها مواجه هستیم مفید هستند، اما در تجزیه و تحلیل‌های ریاضی روش‌های نوع دوم مفیدترند، زیرا استنتاجات ریاضی در مورد آن‌ها راحت‌تر قابل کاربرد است. روش‌های نوع دوم نیز خود بر دو گونه‌اند، مستقل از تصمیم‌گیر (تحلیل‌گر) و وابسته به تحلیل‌گر. روش‌های مطرح شده در منابع [۲, ۳, ۴, ۵ و۶] از جملهٔ روش‌های مستقل از تصمیم‌گیر هستند. در روش‌های وابسته به تحلیل‌گر، درجه‌ای از خوشبینی ($0\leq\lambda\leq1$) برای تحلیل‌گر تعریف می‌شود، و نتیجهٔ مقایسه بر حسب مقدار λ، متفاوت است. به‌عنوان نمونه‌ای از این نوع روش‌ها می‌توان به[۷, ۸ و ۹] اشاره نمود. در مورد مقایسهٔ صریح، با وجود اینکه مطالعات فراوانی انجام و روش‌های متعددی ارائه شده‌است، اما ویژگی‌های ریاضی مربوط به روابط نامساوی فازی برگرفته از آن‌ها، در کمتر مقاله‌ای یافت می‌شود. در بعضی از مطالعات که در آن‌ها لازم‌است استنتاجات ریاضی انجام شود، این نقصان، منجر به بروز مشکلاتی می‌گردد.

۳- عملگر ماکزیمم دو عدد فازی

روش بدست آوردن ماکزیمم دو عدد فازی، استفاده از اصل تعمیم [۱۰] برای عملگر $\widetilde{\max}$ است. براین اساس، اگرداشته‌باشیم $\widetilde{M}=\widetilde{\max}\{\widetilde{A},\widetilde{B}\}$، تابع عضویت $\widetilde{M}$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :

$$\mu_{\widetilde{M}}(x)=\sup_{z=\max(x,y)}\min\{\mu_{\widetilde{A}}(x),\mu_{\widetilde{B}}(y)\} \qquad (1)$$

در حالت کلی $\widetilde{M}$ لزوماً برابر یکی از آن دو عدد نیست. اگر دو عدد فازی مورد مقایسه LR باشند، با توجه به رابطه (۱) ، $\widetilde{M}$ لزوماً یک عدد فازی LR است. اگر دو عدد مورد مقایسه ذوزنقه‌ای باشند، در اغلب موارد $\widetilde{M}$نیز یک عدد ذوزنقه‌ای است. اما اگر تابع عضویت دو عدد مورد مقایسه همپوشانی داشته‌باشند، باز هم می‌توان $\widetilde{M}$ را، که یک عدد فازی L-R است، با یک عدد فازی ذوزنقه‌ای با پارامترهایی مساوی با پارامترهای آن تقریب زد. در ادامه‌ی مطلب، تلاش می‌کنیم با استفاده از لم زیر، صحت تقریب را برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای اثبات کنیم.

لم ۱

اگر $\widetilde{A}=(A^a,A^b,A^c,A^d)$ و $\widetilde{B}=(B^a,B^b,B^c,B^d)$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای بـاشند، و $\widetilde{\max}\{\widetilde{A},\widetilde{B}\}=\widetilde{C}$، در صورتی که عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A}_{ap}$ را به‌صورت زیر تعریف کنیم،

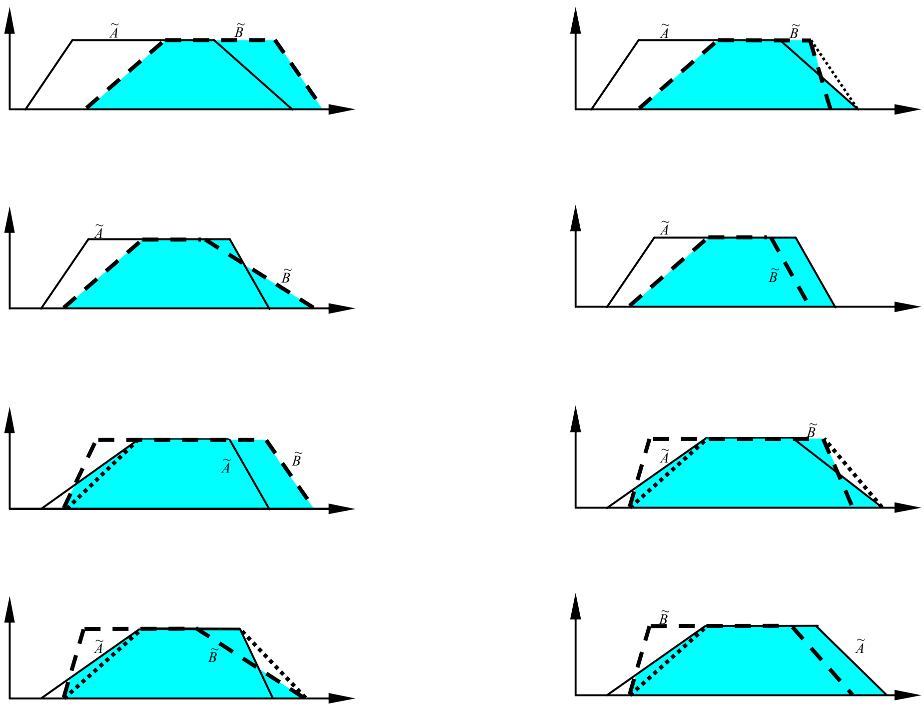
$$\widetilde{A}_{ap}=[\max(A^a,B^a),\max(A^b,B^b),\max(A^c,B^c),\max(A^d,B^d)]=(A^a_{ap},A^b_{ap},A^c_{ap},A^d_{ap}) \qquad (۲)$$

آنگاه $\widetilde{C}$ یک عدد فازی LR دارای حد پایینی C^l، حد بالایی C^u و مدهای C^{m_1},C^{m_2} می‌باشد که برابرند با:

$$C^l=A^a_{ap}\quad C^{m_1}=A^b_{ap},\ C^{m_2}=A^c_{ap},\ C^u=A^d_{ap}, \qquad (۳)$$

اثبات

با بررسی ۱۶ حالت مختلف قرار گرفتن دو عدد $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ نسبت به یکدیگر (شکل ۱) و به‌دست آوردن $\widetilde{A}_{ap}$ (مناطق هاشور خورده که با نقطه‌چین مناطق غیرخطی آنها به خطی تبدیل شده‌است) و $\widetilde{\max}\{\widetilde{A},\widetilde{B}\}$ (مناطق هاشور خورده) به‌ترتیب از روابط(۲) و (۳)، در هر حالت حکم اثبات می‌شود. هشت حالت از این حالت‌ها در شکل (۱) نشان داده‌شده‌است. بقیهٔ حالات مشابه این‌ها است با این تفاوت که جای دو عدد تعویض می‌شود.



شکل ۱. ماکزیمم دو عدد فازی ذوزنقه‌ای

نتیجه ۱

با توجه به لم ۱ و به‌دلیل اینکه هر دو عدد $\widetilde{A}_{ap}$ و $\widetilde{C}$ اعداد فازی LR با پارامترهای مساوی هستند، با اندکی اغماض در مورد شکل احتمالا غیرخطی تابع عضویت $\widetilde{C}$ در فواصل $[C^{l}, C^{m_1}]$ و $[C^{m_2}, C^{u}]$ و خطی فرض کردن آن می‌توان گفت $\widetilde{C}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای به‌صورت زیر است:

$$\widetilde{C} = \widetilde{\max}\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\} = [\max(A^a, B^a), \max(A^b, B^b), \max(A^c, B^c), \max(A^d, B^d)] \qquad (۴)$$

در اینجا خاصیت زیر برای عملگر ماکزیمم فوق‌الذکر بیان می‌شود و خواص دیگر آن در بخش مربوط به مقایسه اعداد فازی ذکر خواهد شد.

قضیه ۱

اگر $\widetilde{A}_1$، $\widetilde{A}_2$ و $\widetilde{A}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت: $\widetilde{\max}\{\widetilde{A} \oplus \widetilde{A}_1, \widetilde{A} \oplus \widetilde{A}_2\} = \widetilde{A} \oplus \widetilde{\max}\{\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2\}$

اثبات

بر اساس نتیجه ۱ و تعریف جمع فازی داریم:

$$\widetilde{\max}\{\widetilde{A} \oplus \widetilde{A}_1, \widetilde{A} \oplus \widetilde{A}_2\} =$$

$$\left[\max(A^a + A_1^a, A^a + A_2^a), \max(A^b + A_1^b, A^b + A_2^b), \max(A^c + A_1^c, A^c + A_2^c), \max(A^d + A_1^d, A^d + A_2^d)\right]$$

و طبق خاصیت عملگر max برای اعداد حقیقی این مقدار برابر است با:

$$\left[A^a + \max(A_1^a, A_2^a), A^b + \max(A_1^b, A_2^b), A^c + \max(A_1^c, A_2^c), A^d + \max(A_1^d, A_2^d)\right]$$

و مجدداً طبق نتیجه ۱ خواهیم داشت:

$$\widetilde{\max}\{\widetilde{A} \oplus \widetilde{A}_1, \widetilde{A} \oplus \widetilde{A}_2\} = \widetilde{A} \oplus \widetilde{\max}\{\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2\}$$

۴- روابط نامساوی بین اعداد فازی

با توجه به اینکه دربرخی تجزیه و تحلیل‌های جبری، از روابط نامساوی بین اعداد فازی استفاده‌های فراوانی می‌شود، در این بخش، از یک دیدگاه جدید، دو نوع روش تحت عنوان روابط نامساوی، برای مقایسهٔ صریح اعداد فازی تعریف، و خواص آن‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرد. همچنین خواص مربوط به بعضی از معیارهای مقایسهٔ مذکور در منابع گذشته، تحت عنوان نابرابری تابعی، در ادامه بیان و اثبات می‌شود. هر چند این روابط را روی اعداد فازی ذوزنقه‌ای توضیح می‌دهیم، اما بیشتر آن‌ها در حالت کلی نیز صادق هستند.

۴-۱- نابرابری مطلق

ساده‌ترین نوع روابط نامساوی بین اعداد فازی، نابرابری مطلق است. در این حالت توابع عضویت دو عدد هیچ همپوشانی با یکدیگر ندارند و بنابر این نتیجه مقایسه کاملاً روشن است.

تعریف ۱ . نابرابری مطلق

در مورد دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A} = (A^a, A^b, A^c, A^d)$ و $\widetilde{B} = (B^a, B^b, B^c, B^d)$ گوییم $\widetilde{A}$ مطلقاً از $\widetilde{B}$ کوچکتر است و نشان می‌دهیم: $\widetilde{A} \ll \widetilde{B}$ اگر و فقط اگر: $A^d \le B^a$

تعریف ۲ . برابری مطلق

در مورد دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A} = (A^a, A^b, A^c, A^d)$ و $\widetilde{B} = (B^a, B^b, B^c, B^d)$ گوییم $\widetilde{A}$ مطلقاً مساوی $\widetilde{B}$ است و نشان می‌دهیم $\widetilde{B} = \widetilde{A}$ اگر و فقط اگر $A^x = B^x, x = a, b, c, d$. در صورت عدم وجود تساوی مطلق می‌نویسیم $\widetilde{A} \neq \widetilde{B}$. در مورد نابرابری مطلق خاصیت‌های زیر را می‌توان اثبات کرد:

قضیه ۲. جمع کردن طرفین دو نامساوی

اگر $\widetilde{A}$، $\widetilde{B}$، $\widetilde{C}$ و $\widetilde{D}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت:

$$(\widetilde{A} \ll \widetilde{B},\ \widetilde{C} \ll \widetilde{D}) \Rightarrow \widetilde{A} \oplus \widetilde{C} \ll \widetilde{B} \oplus \widetilde{D}$$

اثبات

طبق تعریف ۱ می‌توان نوشت:

$$(\widetilde{A} \ll \widetilde{B},\ \widetilde{C} \ll \widetilde{D}) \Rightarrow (A^d \le B^a, C^d \le D^a)$$

و با استفاده از روابط نامساوی بین اعداد حقیقی و سپس تعریف جمع فازی:

$$A^d + C^d \le B^a + D^a \Rightarrow (\widetilde{A} \oplus \widetilde{C})^d \le (\widetilde{B} \oplus \widetilde{D})^a$$

و نهایتاً طبق تعریف ۱حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۳.حذف عدد فازی $\widetilde{0}$از یک طرف نامساوی

اگر $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای و $\widetilde{0}_{c,d} = (-d,-c,c,d)$ عدد فازی تقریباً صفرباشد، می‌توان نوشت:

a) $\widetilde{A} \oplus \widetilde{0} \ll \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \ll \widetilde{B}$ b) $\widetilde{A} \ll \widetilde{B} \oplus \widetilde{0} \Rightarrow \widetilde{A} \ll \widetilde{B}$

اثبات **a** : طبق تعریف ۱ داریم

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{0} \ll \widetilde{B} \Rightarrow (\widetilde{A} \oplus \widetilde{0})^d \le B^a$$

و از تعریف جمع فازی و همچنین نامنفی بودن d نتیجه می‌گیریم $A^d + d \le B^a \Rightarrow A^d \le B^a$ و نهایتاً طبق تعریف ۱ خواهیم داشت $\widetilde{A} \ll \widetilde{B}$ **.**

اثبات **b**: در اینجا هم با استفاده از تعریف ۱ و نامنفی بودن d داریم:

$$\widetilde{A} \ll \widetilde{B} \oplus \widetilde{0} \Rightarrow A^d \le (\widetilde{B} \oplus \widetilde{0})^a \Rightarrow A^d \le B^a - d \Rightarrow A^d \le B^a \Rightarrow \widetilde{A} \ll \widetilde{B}$$

قضیه ۴. حذف یک عدد فازی یکسان از دو طرف نامساوی

اگر $\widetilde{A}$، $\widetilde{B}$ و $\widetilde{C}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{C} \ll \widetilde{B} \oplus \widetilde{C} \Rightarrow \widetilde{A} \ll \widetilde{B}$$

اثبات

با استفاده از تعریف ۱ می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{C} \ll \widetilde{B} \oplus \widetilde{C} \Rightarrow (\widetilde{A} \oplus \widetilde{C})^d \le (\widetilde{B} \oplus \widetilde{C})^a \Rightarrow A^d + C^d \le B^a + C^a$$

از طرف دیگر می‌دانیم $C^d \ge C^a$ بنابر این:

$$A^d \le B^a \Rightarrow \widetilde{A} \ll \widetilde{B}$$

قضیه ۵ . انتقال نامساوی‌ها

اگر $\widetilde{A}$، $\widetilde{B}$ و $\widetilde{C}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A} \ll \widetilde{B},\ \widetilde{B} \ll \widetilde{C} \Rightarrow \widetilde{A} \ll \widetilde{C}$$

اثبات

طبق تعریف ۱ :

$$\widetilde{A} \ll \widetilde{B},\ \widetilde{B} \ll \widetilde{C} \Rightarrow A^d \le B^a,\quad B^d \le C^a$$

از طرف دیگر می‌دانیم $B^a \le B^d$ بنابراین $A^d \le C^a$ و در نتیجه طبق تعریف ۱خواهیم داشت $\widetilde{A} \ll \widetilde{C}$.

قضیه ۶.
اگر $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند، $\widetilde{A} \gg \widetilde{B}$ اگر و فقط اگر $\widetilde{C} = \widetilde{A} \Theta \widetilde{B}$ یک عدد فازی منفی باشد.

اثبات

طرف اول: چون طبق تعریف تفاضل دو عدد فازی ذوزنقه‌ای یک عدد فازی ذوزنقه‌ای است بنابر این $\widetilde{C} = (C^a, C^b, C^c, C^d)$. از سوی دیگر طبق فرض داریم $\widetilde{A} \ll \widetilde{B}$ پس طبق تعریف ۱، $A^d \le B^a$ و بنابراین:

$$C^d = A^d - B^a \le 0$$

و چون $C^a \le C^b \le C^c \le C^d$ بنابراین سایر پارامترهای $\widetilde{C}$ نیز منفی خواهند بود و درنتیجه طبق تعریف، $\widetilde{C}$ یک عدد فازی منفی است.

طرف دوم: چون $\widetilde{C}$ یک عدد فازی منفی است طبق تعریف بایستی $C^d = A^d - B^a \le 0$ و بنابراین $A^d \le B^a$ و طبق تعریف ۱خواهیم داشت $\widetilde{A} \ll \widetilde{B}$.

۲-۴- نابرابری نسبی

یکی دیگر از روابط نامساوی بین اعداد فازی که در اینجا تعریف می‌کنیم نابرابری نسبی است که براساس عملگر ماکزیمم تعریف می‌شود. در این‌صورت ممکن است در عین حال که توابع عضویت دو عدد با هم همپوشانی دارند، رابطهٔ نامساوی بین آن‌ها وجود داشته‌باشد.

تعریف ۳. برابری مطلق و نابرابری نسبی

در مورد دو عدد فازی ذوزنقه‌ای ($\widetilde{A} = (A^a, A^b, A^c, A^d),\ \widetilde{B} = (B^a, B^b, B^c, B^d)$)، اگر $A^a = B^a,\ A^b = B^b,\ A^c = B^c,\ A^d = B^d$، گوییم $\widetilde{A}$ مطلقا با $\widetilde{B}$ مساوی است و نشان می‌دهیم $\widetilde{A} = \widetilde{B}$.

از سوی دیگر، اگر $\widetilde{\max}\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\} = \widetilde{B}$ و $\widetilde{A} \ne \widetilde{B}$، گوییم $\widetilde{A}$ به‌طور نسبی از $\widetilde{B}$ کوچکتر است و نشان می‌دهیم $\widetilde{A} < \widetilde{B}$.همچنین اگر $\widetilde{A}$ مطلقا با $\widetilde{B}$ مساوی، یا به‌طور نسبی از آن کوچکتر باشد، می‌نویسیم $\widetilde{A} \le \widetilde{B}$.

نتیجه۲

در مورد دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ می‌توان گفت : $\widetilde{A} \le \widetilde{B}$ اگر و فقط اگر :

$$A^a \le B^a, A^b \le B^b, A^c \le B^c, A^d \le B^d$$

اثبات

ابتدا فرض کنیم $\widetilde{A} \le \widetilde{B}$، طبق تعریف ۳ یا $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ یا $\widetilde{A} < \widetilde{B}$. اگر $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ طبق تعریف ۲ خواهیم داشت

$$A^a = B^a, A^b = B^b, A^c = B^c, A^d = B^d \Rightarrow A^a \le B^a, A^b \le B^b, A^c \le B^c, A^d \le B^d$$

در غیر این صورت $\widetilde{A} < \widetilde{B}$. و با توجه به نتیجهٔ ۱ و تعریف ۳، داریم:

$$\widetilde{\max}\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\} =$$
$$\left[\max(A^a, B^a), \max(A^b, B^b), \max(A^c, B^c), \max(A^d, B^d)\right] = (B^a, B^b, B^c, B^d)$$

و طبق تعریف تساوی مطلق دو عدد فازی $\max(A^x, B^x) = B^x$ ، $x = a, b, c, d$ و طبق خاصیت عملگر ماکزیمم برای اعداد حقیقی $A^x \le B^x$ ، $x = a, b, c, d$.

حال فرض کنیم $A^x \le B^x \quad , x = a,b,c,d$، اگر همهٔ این چهار رابطه به‌صورت تساوی برقرار باشد نتیجه می‌گیریم $\widetilde{A} = \widetilde{B}$، در غیر این‌صورت واضح است که $\widetilde{A} \neq \widetilde{B}$ و همچنین $\max(A^x, B^x) = B^x$ ، $x = a,b,c,d$، بنابراین طبق نتیجهٔ ۱ داریم $\widetilde{\max}\{\widetilde{A}, \widetilde{B}\} = \widetilde{B}$ آنگاه براساس تعریف خواهیم داشت $\widetilde{A} < \widetilde{B}$.نهایتا چون $\widetilde{A} = \widetilde{B}$ یا $\widetilde{A} < \widetilde{B}$.آنگاه $\widetilde{A} \le \widetilde{B}$.
در مورد نابرابری نسبی خاصیت‌های زیر را می‌توان اثبات کرد:

***قضیه ۷*. جمع کردن طرفین دو نامساوی**

اگر $\widetilde{A}$، $\widetilde{B}$، $\widetilde{C}$ و $\widetilde{D}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت:

$$(\widetilde{A} \le \widetilde{B},\ \widetilde{C} \le \widetilde{D}) \Rightarrow \widetilde{A} \oplus \widetilde{C} \le \widetilde{B} \oplus \widetilde{D}$$

اثبات

باتوجه به نتیجه ۲ می‌توان نوشت:

$$(\widetilde{A} \le \widetilde{B},\ \widetilde{C} \le \widetilde{D}) \Rightarrow A^x \le B^x\ ,\ C^x \le D^x,\ \ x = a,b,c,d\ )$$

و طبق روابط نامساوی بین اعداد حقیقی و تعریف جمع فازی :

$$A^x + C^x \le B^x + D^x, x = a,b,c,d \Rightarrow (\widetilde{A} \oplus \widetilde{C})^x \le (\widetilde{B} \oplus \widetilde{D})^x, x = a,b,c,d$$

وباز طبق نتیجه ۲:

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{C} \le \widetilde{B} \oplus \widetilde{D}$$

***قضیه ۸*. حذف و اضافه کردن یک عدد فازی یکسان از دو طرف نامساوی**

اگر $\widetilde{A}$، $\widetilde{B}$ و $\widetilde{C}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{C} \le \widetilde{B} \oplus \widetilde{C} \Leftrightarrow \widetilde{A} \le \widetilde{B}$$

اثبات

با توجه به نتیجه ۲ و تعریف جمع فازی :

$$\widetilde{A} \oplus \widetilde{C} \le \widetilde{B} \oplus \widetilde{C} \Leftrightarrow$$
$$(\widetilde{A} \oplus \widetilde{C})^x \le (\widetilde{B} \oplus \widetilde{C})^x, x = a,b,c,d \Leftrightarrow A^x + C^x \le B^x + C^x, x = a,b,c,d$$

و طبق روابط نامساوی اعداد حقیقی $A^x \le B^x \ ,\ x = a,b,c,d$ و نهایتاً طبق نتیجه۲ $\widetilde{A} \le \widetilde{B}$. طرف دوم نیز به ترتیب معکوس اثبات می‌شود.

***قضیه ۹* انتقال نامساوی‌ها**

اگر $\widetilde{A}$، $\widetilde{B}$و $\widetilde{C}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A} \le \widetilde{B},\ \widetilde{B} \le \widetilde{C} \Rightarrow \widetilde{A} \le \widetilde{C}$$

اثبات

طبق نتیجه ۲ و روابط نامساوی اعداد حقیقی می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A} \le \widetilde{B},\ \widetilde{B} \le \widetilde{C} \Rightarrow \quad A^x \le B^x,\quad B^x \le C^x\ ,\ x = a,b,c,d \quad \Rightarrow \quad A^x \le C^x\ ,\ x = a,b,c,d$$

در نهایت طبق نتیجه۲ خواهیم داشت $\widetilde{A} \le \widetilde{C}$.

نتیجه ۳

اگر $\widetilde{A}$، $\widetilde{B}$، $\widetilde{C}$ و $\widetilde{D}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت:

$$\widetilde{B}\oplus\widetilde{C}\leq\widetilde{A},\ \widetilde{D}\leq\widetilde{B}\ \Rightarrow\ \widetilde{D}\oplus\widetilde{C}\leq\widetilde{A}$$

اثبات

طبق قضیه ۸ از $\widetilde{D}<\widetilde{B}$ نتیجه می‌شود $\widetilde{D}\oplus\widetilde{C}<\widetilde{B}\oplus\widetilde{C}$ وبا توجه به فرض و خاصیت انتقال نامساویها (قضیه۹)حکم ثابت می‌شود.

قضیه ۱۰

اگر $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A}\leq \widetilde{\max}\{\widetilde{A},\widetilde{B}\},\ \widetilde{B}\leq \widetilde{\max}\{\widetilde{A},\widetilde{B}\}$$

اثبات

با توجه به نتیجه ۱ داریم:

$$\widetilde{\max}\{\widetilde{A},\widetilde{B}\}=\left[\max(A^a,B^a),\max(A^b,B^b),\max(A^c,B^c),\max(A^d,B^d)\right]$$

می‌دانیم $A^x\leq\max(A^x,B^x), x=a,b,c,d$ و $B^x\leq\max(A^x,B^x), x=a,b,c,d$ بنابراین در صورتی که $\widetilde{A}\neq\widetilde{B}$ طبق نتیجه۲ روابط نامساوی برقرار است و درصورتیکه $\widetilde{A}=\widetilde{B}$، روابط فوق هردو به‌صورت تساوی برقرار خواهند بود.

قضیه ۱۱

اگر $\widetilde{A}$، $\widetilde{B}$ و $\widetilde{C}$ اعداد فازی ذوزنقه‌ای باشند می‌توان نوشت:

$$\widetilde{A}\leq\widetilde{B},\widetilde{B}\ll\widetilde{C}\Rightarrow\widetilde{A}\ll\widetilde{C}$$

اثبات

طبق نتیجه ۲ از $\widetilde{A}\leq\widetilde{B}$ خواهیم داشت $A^d\leq B^d$ و طبق تعریف ۱ از $\widetilde{B}\ll\widetilde{C}$ به‌دست می‌آوریم $B^d\leq C^a$، و از این‌دو نتیجه می‌شود $A^d\leq C^a$. مجددا طبق تعریف ۱ خواهیم داشت: $\widetilde{A}\ll\widetilde{C}$.

در مورد نابرابری نسبی قضیه‌های زیر را نیز می‌توان اثبات کرد:

قضیه ۱۲

در مورد دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ اگر داشته‌باشیم $\widetilde{A}\leq\widetilde{B}$ آنگاه $\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای نامثبت است.

اثبات

طبق تعریف تفریق اعدادفازی ذوزنقه‌ای داریم: $\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}=\left[(A^a-B^d),(A^b-B^c),(A^c-B^b),(A^d-B^a)\right]$. از طرف دیگر چون بر اساس فرض $\widetilde{A}\leq\widetilde{B}$ است، طبق نتیجه ۲ داریم $A^a\leq B^a$ همچنین واضح است که $B^a\leq B^d$، در نتیجه به‌دست می‌آوریم: $A^a\leq B^d\ \Rightarrow\ A^a-B^d=(\widetilde{A}\ominus\widetilde{B})^a\leq 0$.

حال برای اثبات نامثبت بودن $\widetilde{A}\ominus\widetilde{B}$ باید ثابت کنیم حالت $A^a-B^d=0$ اتفاق نمی‌افتد و حتما $A^a-B^d<0$ است. برای این‌منظور فرض کنید $A^a=B^d$ باشد، ولی طبق فرض داریم $A^a\leq B^a$. پس بایستی $B^d\leq B^a$ و چون $B^d<B^a$ امکان ندارد، باید $B^d=B^a$، و این نخواهد بود مگر اینکه $\widetilde{B}$ یک عدد قطعی باشد. از $A^d\leq B^d$ و $B^d=B^a$ نتیجه می‌شود $A^d\leq B^a$. از سوی دیگر برای $\widetilde{A}$ دو حالت وجود دارد. حالت اول اینکه یک عدد قطعی باشد، یعنی $A^d=A^a$. با در نظر گرفتن این فرض و فرض ابتدای بحث یعنی $A^a=B^d$ نتیجه می‌گیریم که $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ باید دو عدد قطعی مساوی هم باشند که خلاف فرض $\widetilde{A}\leq\widetilde{B}$ است. بنابراین قطعی بودن $\widetilde{A}$ امکان‌پذیر نیست. حالت دوم برای $\widetilde{A}$ این

است که $A^a < A^d$ باشد.باکنار هم قرار دادن این فرض با نتیجه به‌دست آمده در بالا یعنی $A^d \le B^a$ نتیجه می‌شود $A^a < B^a$. این نتیجه به‌همراه قطعی بودن $\widetilde{B}$ لازم می‌دارد که $A^a > B^d$ باشد و این خلاف فرض $A^a = B^d$ است. بنابراین با فرض کردن $A^a = B^d$ هر دو حالت ممکن برای $\widetilde{A}$ ناممکن می‌نماید. از این‌رو حتما $A^a - B^d < 0$ است، وبنابر این $(\widetilde{A}\Theta\widetilde{B})^a < 0$ می‌باشد. نهایتا چون حد پایینی $\widetilde{A}\,\Theta\,\widetilde{B}$ یک عدد منفی است نتیجه می‌شود که این عدد نامثبت می‌باشد.

۳-۴- نابرابری تابعی(تقریبی)

یکی از روش‌های بسیار معمول مقایسه اعداد فازی، استفاده ازیک تابع ترتیب‌بندی است که به‌ازای هر عدد فازی یک عدد حقیقی را نسبت می‌دهد.

تعریف ۴. نابرابری وبرابری تقریبی (تابعی)

در مورد دو عدد فازی ذوزنقه‌ای $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ گوییم $\widetilde{A}$ تقریبا از $\widetilde{B}$ کوچکتراست و نشان می‌دهیم $\widetilde{A} \prec \widetilde{B}$ اگر و فقط اگر $V(\widetilde{A}) < V(\widetilde{B})$، همچنین گوییم $\widetilde{A}$ تقریبا مساوی $\widetilde{B}$ است و نشان می‌دهیم $\widetilde{A} \approx \widetilde{B}$ اگر و فقط اگر $V(\widetilde{A}) = V(\widetilde{B})$، که در آن $V(.)$ تابعی است که از $\aleph$ (مجموعه اعداد فازی) به $\Re$ (مجموعه اعداد حقیقی) تعریف می‌شود.

تاکنون توابع متعددی برای ترتیب بندی، بر حسب سلایق و کاربردهای گوناگون توسط محققین ارائه شده‌است. در این بین، روش‌های ارائه شده توسط یاگر[۳]، لیو و وانگ[۹] (با $\lambda = 1/2$ یعنی تصمیم‌گیر معمولی) و کامپوس و گانزالز [۷] (برای تصمیم‌گیر معمولی)، برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای توابع ترتیب یکسانی را ارائه می‌دهند. درآن‌ها اگر $\widetilde{A}$ یک عدد فازی ذوزنقه‌ای با پارامترهای (a,b,c,d) باشد، داریم: $V_1(\widetilde{A}) = \dfrac{a+b+c+d}{4}$

همچنین در روش ارائه شده توسط چوبینه و لی [۵] تابع ترتیب برای اعداد فازی ذوزنقه‌ای عبارت است از:

$$V_2(\widetilde{A}) = \frac{1}{u-l}\left(\frac{a+b+c+d}{4} - l\right); \forall \widetilde{A} : l \le a \le b \le c \le d \le u$$

در این تابع باز هم مشاهده‌می‌شود که معیار ترتیب بندی متناسب با $(a+b+c+d)/4$ است.بنابراین در اینجا تابع ترتیب بندی اعداد فازی را $V_1(.)$ در نظر می‌گیریم و با $V(.)$ نشان می‌دهیم.

برای تابع ترتیب‌بندی فوق خاصیت‌هایی قابل اثبات است که در اینجا برای رعایت اختصار از ذکر آن‌ها خودداری می‌شود.

نهایتا به‌منظور مقایسهٔ سه رابطهٔ نامساوی ذکر شده، در جدول ۱ به طور خلاصه چند خاصیت مهم از بین خواص اثبات شده ذکر شده‌اند.

جدول ۱. مقایسه خواص انواع نامساوی‌ها

خواص	نوع نامساوی		
	مطلق	نسبی	تابعی
جمع کردن طرفین دو نامساوی	*	*	*
حذف عدد فازی یکسان از دو طرف نامساوی	*	*	*
افزودن عدد فازی یکسان به دو طرف نامساوی		*	*
انتقال نامساوی‌ها	*	*	*
حذف عدد فازی صفر از یک طرف نامساوی	*		
افزودن عدد فازی صفر به یک طرف نامساوی			*

در پایان این بخش روابط بین سه نوع نابرابری مطلق، نسبی و تابعی (تقریبی)در قالب قضیه‌های زیر اثبات می‌شود:

قضیه ۱۳

اگر $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند و $\widetilde{A}$ به‌طور نسبی از $\widetilde{B}$ کوچکتر باشد آنگاه $\widetilde{A}$ به‌طور تقریبی هم از $\widetilde{B}$ کوچکتر است.، یعنی: $\widetilde{A} \leq \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \prec \widetilde{B}$

اثبات

$$\widetilde{A} \leq \widetilde{B} \Rightarrow A^x \leq B^x, x = a,b,c,d, \widetilde{A} \neq \widetilde{B} \Rightarrow \sum_{x=a,b,c,d} A^x < \sum_{x=a,b,c,d} B^x \Rightarrow V(\widetilde{A}) < V(\widetilde{B})$$
$$\Rightarrow \widetilde{A} \prec \widetilde{B}$$

قضیه ۱۴

اگر $\widetilde{A}$ و $\widetilde{B}$ دو عدد فازی ذوزنقه‌ای باشند و $\widetilde{A}$ مطلقاً از $\widetilde{B}$ کوچکترو $\widetilde{A} \neq \widetilde{B}$ باشد آنگاه $\widetilde{A}$ به‌طور نسبی و تقریبی هم از $\widetilde{B}$ کوچکتر است، یعنی: $\widetilde{A} \ll \widetilde{B}, \widetilde{A} \neq \widetilde{B} \Rightarrow \widetilde{A} \leq \widetilde{B}, \widetilde{A} \prec \widetilde{B}$.

اثبات

چون $\widetilde{A} \ll \widetilde{B}$ طبق قضیه ۶ خواهیم داشت $\widetilde{A}\,\Theta\,\widetilde{B} \ll 0$ وچون $\widetilde{A} \neq \widetilde{B}$ بنابر این $\widetilde{A}\,\Theta\,\widetilde{B}$ غیر صفر است. بنابراین $\widetilde{A} \prec \widetilde{B}$ است. از سوی دیگر چون $\widetilde{A} \ll \widetilde{B}$، طبق تعریف ۱ خواهیم‌داشت $A^d \leq B^a$ و بنابراین $A^a \leq A^b \leq A^c \leq A^d \leq B^a \leq B^b \leq B^c \leq B^d$. در اینجا شرایط تعریف ۳ برقرار است، بنابراین $\widetilde{A} \leq \widetilde{B}$.

۵- نتیجه گیری

رابطه نامساوی بین کمیت های حقیقی دارای خواصی است که به راحتی در انجام بسیاری از استنتاجات جبری از آنها استفاده می شود. در مورد کمیت های فازی دو مشکل وجود دارد. اول اینکه رابطه نامساوی بین اعداد فازی منحصر به فرد نیست و روابط نامساوی متعددی تاکنون تعریف شده و این امر همچنان ادامه دارد. مشکل دوم آن است که نمی توان مطمئن بود خواص نامساوی حقیقی, در مورد همه نامساوی های فازی نیز معتبر است. بنابراین در مواردی که استنتاجات جبری مبتنی بر نابرابری های فازی لازم می شود, مشکلاتی وجود خواهد داشت. با مقایسه بین روشهای مقایسه *صریح* و *فازی* بین اعداد فازی در می یابیم که بیان خواص نامساوی ها به آن گونه که در نامساوی های حقیقی مطرح می شود, فقط در مورد روشهای مقایسه صریح امکان پذیر است. ازاین رو در این مقاله, برخی روابط نامساوی صریح بین اعداد فازی را تعریف، و خصوصیات هرکدام را بیان و اثبات کردیم. این روابط عبارت بود از نابرابری مطلق, نسبی و تابعی. در این مقاله اعداد فازی ذوزنقه ای, به علت کاربرد فراوان, مورد توجه قرار گرفت. به عنوان تحقیقات آتی می توان اثبات خواص نامساویها را به سایر اعداد فازی تعمیم داد. نویسنده از خواص رابطه نامساوی نسبی, برای اثبات قضایای مورد نیاز در تجزیه و تحلیل مساله زمانبندی کارگاه جریان فازی[1] استفاده فراوانی برده‌است[۱۱].

1- Fuzzy Flow Shop Scheduling Problem

مراجع

[1] Bortolan, G., and Degani, P., (1985), "A Review of Some Methods for Ranking Fuzzy Subsets", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 15, Pages 1-19.
[2] Lee, E. S., and Li, R. J., (1988), "Comparison of Fuzzy Numbers Based on the Probability Measure of Fuzzy Events", Computer and Mathematics with Applications, Vol. 15, Pages 887-896.
[3] Yager, R. R., (1981), "A Procedure for Ordering Fuzzy Subsets of the Unit Interval", Information Science, Vol. 24, Pages 143-161.
[4] Yager, R. R., (1978), "Ranking Fuzzy Subsets Over the Unit Interval", Proceedings of the 1978 CDC, Pages 1435-1437.
[5] Choobineh, F., and Li, H., (1993), "An Index for Ordering Fuzzy Numbers", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 54, Pages 287-294.
[6] Chang, W., (1981), "Ranking of Fuzzy Utilities with Triangular Membership Functions", Proceedings of International Conference on Policy Analysis and Information Systems, Pages 263-272.
[7] Campos, L. M., and Gonzalez, A., (1989), "A Subjective Approach for Ranking Fuzzy Numbers", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 29, Pages 145-153.
[8] Kim, K., and Park, K. S., (1990), "Ranking Fuzzy Numbers with Index of Optimism", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 35, Pages 143-150.
[9] Liou, T. S., and Wang, M. J. J., (1992), "Ranking Fuzzy Numbers with Integral Value", Fuzzy Sets and Systems, Vol. 50, Pages 247-255.
[10] Zimmermann, H. J., (1996), "Fuzzy Set Theory and Its Applications", 3rd ed., Kluwer Academic Publishers.
[۱۱] مصدق‌خواه، مسعود، (۱۳۸۱)، "رویکرد چند مشخصه‌ای به مسألهٔ کارگاه جریانی عمومی با زمان‌های پردازش فازی"، پایان‌نامهٔ دکتری، دانشگاه صنعتی امیرکبیر.