پنجمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران
هفدهم الی نوزدهم شهریورماه ۱۳۸۳

بدست آوردن جواب برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی توسط برنامه ریزی ریاضی فازی

بهروز علی‌زاده[۱]، عزیزاله معماریانی[۲]، علاءالدین ملک[۳]
Behrouz210@yahoo.com

چکیده
در این مقاله هدف ما این است که یک روش مناسب برای بدست آوردن جواب مسائل برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی ارائه نماییم. برای این منظور ابتدا مسئله مذکور را به صورت یک مدل برنامه ریزی خطی چند هدفی هم ارز فرمول بندی می کنیم. با استفاده از یک رویکرد تئوریک فازی, برنامه ریز خطی چند هدفی هم ارز به یک مسئله برنامه ریزی خطی قطعی تبدیل گردیده و توسط آن جواب مسئله اصلی بدست می آید. در آخر این رویه جواب برای حل یک مثال عددی استفاده می شود.

واژه های کلیدی: برنامه ریزی کسری ـ برنامه ریزی ریاضی فازی ـ تئوری مجموعه های فازی.

۱- مقدمه

در جایگاه تصمیم گیری در دنیای واقعی، بعضی از مواقع تصمیم گیرنده ها ممکن است با بهینه سازی نسبت هایی مانند فروش/ موجودی، قیمت استاندارد/ قیمت واقعی، تعداد مستخدم/ اندازه تولید و غیره با در نظر گرفتن یک تعدادی از شرایط و محدودیتها برخورد نمایند. در مسائل مدیریتی توابع نسبت سود، قیمت و کیفیت باید ماکزیمم سازی شوند که چنین مسائلی در اصل مسائل برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی هستند. یک مثال دیگر از برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی ممکن است در آمار اتفاق بیافتد وقتی که نتایج یک آزمایش عاملی مورد تحلیل قرار می گیرد. بررسی و مطالعه ادبیات تحقیقی کاربردهای وسیعی از برنامه ریزی کسری را ظاهر می سازد. این کاربردها می توانند در مسائل مختلفی در تحقیق در عملیات مانند تخصیص منابع، حمل و نقل، تولید، عملیات آماری، تئوری اطلاعات، برنامه ریزی کلان، نظریه بازی و غیره وجود داشته باشند[۱]،[۲]و[۳].روشهای زیادی برای بدست آوردن جواب مسائل برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی تا به حال ارائه شده است [۴،۵،۶،۷]، اما اکثر این روشها از لحاظ محاسباتی بسیار سنگین می باشند[۸],بطوریکه در تحقیقات اخیر برای غلبه بر این مشکل از تئوری مجموعه های فازی استفاده کرده اند[۹]،[۱۰]و[۱۱].در[۱۱]با بکارگیری یک رویکرد کلامی مسئله اصلی به یک مدل برنامه ریزی خطی چند هدفی تبدیل شده و تکنیکهایی از برنامه ریزی خطی فازی برای رسیدن به یک جواب رضایت بخش مورد استفاده قرار گرفته است.سر انجام دووتا(Dutta) [۸] رویکرد ارائه شده در[۱۱]را بازنگری کرده و بعضی از ایرادهای آن را متذکر شد.یکی از ضعفهای آن رویکرد این است که اجتماع توابع عضویت بوسیله عملگری انجام

۱- دانشکده علوم پایه مهندسی- دانشگاه صنعتی سهند تبریز
۲- گروه مهندسی صنایع – دانشگاه بوعلی سینا همدان
۳- بخش ریاضی - دانشگاه تربیت مدرس تهران

می شود که کارایی جواب بهین را تضمین نمی کند. دووتا (Dutta) [۸] رویکرد مذکور را برای حل برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی اصلاح کرد.او با ایجاد توابع عضویت مطلوب که اهداف کلامی مسئله را ترکیب می نماید و همچنین با در نظر گرفتن نسبت ها (توابع هدف)،یک مدل وزن دهی جمعی ساده را برای حل مسئله پیشنهاد کرد.در این مقاله یک روش متفاوت برای بدست آوردن جواب مسئله برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی ارائه می گردد که در آن بطور شهودی پیچیدگی حل مسئله نسبت به روشهای موجود دیگر کاهش می یابد. روش حل به این صورت است که ابتدا مسئله برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی را به صورت یک مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفی هم ارز تبدیل می کنیم و سپس آن را با بکارگیری عملگر مینیموم زیمرمن (Zimmermann’s min operator) بصورت یک مدل برنامه ریزی خطی قطعی فرمول بندی می نماییم که از حل آن جواب مسئله اصلی بدست می آید.

۲- برنامه ریزی کسری

۲-۱- برنامه ریزی کسری خطی

یک مدل برنامه ریزی کسری خطی به صورت زیر تعریف می شود[۱۲]:

$$\begin{aligned} \text{Max}: & \frac{c^T x+\alpha}{d^T x+\beta} \\ \text{s.t}: \quad & Ax=b \\ & x\ge 0 \end{aligned} \qquad \text{(LFP)} \qquad (۱)$$

بطوریکه $\alpha,\beta\in R,\quad b\in R^m,\quad c,d,x\in R^n,\quad A\in R^{m\times n}$.

بازای بعضی از مقادیر x عبارت $d^T x+\beta$ ممکن است برابر صفر شود. برای جلوگیری از این مورد فرض کنید که (LFP) (۱) در شرایط زیر صدق نماید:

$$[x\ge 0, Ax=b]\Rightarrow[d^T x+\beta>0] \qquad (۲)$$

تعریف۱: دو مدل برنامه ریزی ریاضی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}&\text{(i) } \max F(x) \\ &\quad \text{s.t}: x\in\Delta\end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned}&\text{(ii) } \max G(x) \\ &\quad \text{s.t}: x\in\Gamma\end{aligned}$$

دو مسئله (i),(ii) را هم ارز گویند هرگاه یک نگاشت یک به یک مانند $q(.)$ از فضای جواب مسئله (i) به فضای جواب مسئله (ii) موجود باشد بطوریکه به ازای هر $x\in\Delta$ $F(x)=G(q(x)),$ [۱۳].

قضیه ۱: فرض کنید $(y,0)$ یک جواب شدنی برای مدل برنامه ریزی خطی زیر باشد:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & c^T y+\alpha t \\ \text{s.t}: \quad & d^T y+\beta t=1 \\ & Ay-bt=0 \\ & y\ge 0, y\in R^n \\ & t\ge 0, t\in R \end{aligned} \qquad (۳)$$

اکنون فرض کنید که شرط (۲) برقرار باشد. در این صورت مسئله (LFP) (۱) با مسئله برنامه ریزی خطی (۳) معادل خواهد بود[۱۲].

به مدل برنامه ریزی کسری خطی زیر توجه کنید:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \frac{N(x)}{D(x)} \\ \text{s.t}: & Ax\le b \\ & x\ge 0 \\ & x\in\{x: Ax\le b,\ x\ge 0\}\Rightarrow D(x)>0 \end{aligned}$$

(۴)

اکنون اگر $y = tx, \quad t = 1/D(x)$ آنگاه مسئله (۴) به مسئله (۵) زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad tN(y/t) \\ &\text{s.t}: \quad A(y/t) - b \le 0 \\ &\qquad tD(y/t) = 1 \\ &\qquad y \ge 0 \\ &\qquad t > 0 \end{aligned} \tag{۵}$$

حال با جایگزینی محدودیت $tD(y/t) \le 1$ به جای محدودیت $tD(y/t) = 1$ در (۵) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad tN(y/t) \\ &\text{s.t}: \quad A(y/t) - b \le 0 \\ &\qquad tD(y/t) \le 1 \\ &\qquad y \ge 0 \\ &\qquad t > 0 \end{aligned} \tag{۶}$$

تعریف۲: مسئله (۴) یک مسئله برنامه ریزی کسری مقعر- محدب استاندارد (SCCFP) گفته می شود اگر $N(.)$ روی Δ مقعر بوده و بازای بعضی از مقادیر $x \in \Delta$, $N(x) \ge 0$ و همچنین $D(.)$ روی Δ مثبت و محدب باشد [۱۳].

قضیه ۲: بازای بعضی از مقادیر $x \in \Delta$ که $N(x) \ge 0$ ، اگر مسئله (۴) در نقطه $x = x^*$ به یک ماکزیمم سراسری برسد آنگاه مسئله (۶) در نقطه $(t, y) = (t^*, y^*)$ به ماکزیمم سراسری می رسد بطوریکه $y^*/t^* = x^*$. بعلاوه توابع هدف در این نقاط برابر خواهند بود[۲و۳].

قضیه ۳: اگر مسئله (۴) یک مسئله برنامه ریزی کسری مقعر - محدب استاندارد باشد که در نقطه x^* به ماکزیمم سراسری برسد.در این صورت مسئله تبدیل شده متناظر (۶) به همان مقدار ماکزیمم در یک نقطه (t^*, y^*) می رسد بطوریکه $y^*/t^* = x^*$. بعلاوه (۶) یک تابع هدف مقعر و یک فضای جواب محدب خواهد داشت[۳].

اگر در مسئله (۴) روی مجموعه Δ ، $N(.)$ مقعر و $D(.)$ مقعر و مثبت باشند و همچنین $N(.)$ بازای هر $x \in \Delta$ منفی باشد در این صورت:

$$\max_{x\in\Delta} \frac{N(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \min_{x\in\Delta} \frac{-N(x)}{D(x)} \Leftrightarrow \max_{x\in\Delta} \frac{D(x)}{-N(x)} \tag{۷}$$

بطوریکه $-N(x)$ محدب و مثبت می باشد. حال با توجه به قضیه ۳ و تحت مفروضات موجود، مدل برنامه ریزی کسری (۴) می تواند به مدل برنامه ریزی خطی زیر تبدیل گردد:

$$\begin{aligned} &\text{Max} \quad tD(y/t) \\ &\text{s.t}: \quad A(y/t) - b \le 0 \\ &\qquad -tN(y/t) \le 1 \\ &\qquad y \ge 0 \\ &\qquad t > 0 \end{aligned} \tag{۸}$$

۲-۲- برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی

در حالت کلی یک مدل برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی بصورت زیر تعریف می شود[۱۲]:

$$\begin{aligned}&\text{Max}\ \left[\frac{c_1x+\alpha_1}{d_1x+\beta_1},\frac{c_2x+\alpha_2}{d_2x+\beta_2},\cdots,\frac{c_kx+\alpha_k}{d_kx+\beta_k}\right]\\ &\text{s.t}:\quad Ax\le b,\\ &\qquad\quad x\ge 0\end{aligned}\tag{۹}$$

بطوریکه $\alpha_i,\beta_i\in R,\ b\in R^m,\ x,c_i^T,d_i^T\in R^n,\ A\in R^{m\times n}$.

حال اگر فرض کنید $Z_i(x)=\dfrac{c_ix+\alpha_i}{d_ix+\beta_i}=\dfrac{N_i(x)}{D_i(x)}$ آنگاه مسئله (۹) به فرم زیر نوشته می شود:

$$\begin{aligned}&\text{Max}\ \ Z(x)=[Z_1(x),\cdots,Z_k(x)]=\left[\frac{N_1(x)}{D_1(x)},\cdots,\frac{N_k(x)}{D_k(x)}\right]\\ &\text{s.t}:\quad Ax\le b\qquad\qquad\qquad\qquad\text{(MOLFP)}\\ &\qquad\quad x\ge 0\end{aligned}\tag{۱۰}$$

۳- برنامه ریزی خطی چند هدفی هم ارز

مجموعه اندیس I^c, I را بصورت زیر در نظر بگیرید:

$$I=\{i:N_i(x)\ge 0\ \text{for some}\ x\in\Delta\}$$
$$I^c=\{i:N_i(x)<0\ \text{for each}\ x\in\Delta\}$$

بطوریکه: $I\cup I^c=\{1,2,\cdots,k\}$

فرض کنید که $D(.)$ روی Δ مثبت بوده و Δ یک مجموعه غیر خالی و کراندار باشد. t را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$t=\min\left\{\frac{1}{d_ix+\beta_i},i\in I\right\}=\min\left\{-\frac{1}{c_ix+\alpha_i},i\in I^c\right\}$$

پس خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{d_ix+\beta_i}\ge t\ ,\quad i\in I\\ &\frac{-1}{c_ix+\alpha_i}\ge t\ ,\quad i\in I^C\end{aligned}\tag{۱۱}$$

اکنون با استفاده از تبدیل $y=tx\ (t>0)$ ، قضایای ۳، ۲ و با بکارگیری نامساوی های (۱۱)، یک مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفی هم ارز برای مسئله برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی (۱۰) بصورت زیر نوشته می شود[۱۲]:

$$
\begin{aligned}
&\text{Max } \left\{ tN_i(y/t), i \in I ; tD_i(y/t), i \in I^c \right\} \\
&\text{s.t}: \quad tD_i(y/t) \le 1 \quad , i \in I \\
&\qquad -tN_i(y/t) \le 1 \ , i \in I^c \qquad\qquad (\text{MOLP}) \\
&\qquad A(y/t) - b \le 0 \\
&\qquad y \ge 0 \\
&\qquad t > 0
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

نکته: همواره مجموعه فضای جواب مسئله (۱۱) یک مجموعه غیر خالی محدب می باشدکه برای اثبات این موضوع می توانید به مرجع[۱۲]مراجعه کنید.

۴- رویکرد تئوریک فازی و برنامه ریزی خطی قطعی معادل

برای بدست آوردن جوابهای مؤثر مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفی (MOLP) (۱۲) بااستفاده از یک رویکرد تئوریک فازی و با بکارگیری عملگرفازی min-operator که توسط زیمرمن(zimmermann)در[۱۴] ارائه شده است، یک مدل برنامه ریزی خطی کلاسیک گسترش می دهیم. برای این منظور ابتدا برای هر یک از توابع هدف مسئله(MOLP)(۱۲) یک تابع عضویت بصورت زیر تعریف نمائید:

اگر $i \in I$:

$$\mu_i\left(tN_i(y/t)\right)=\begin{cases}0 & ; \quad tN_i(y/t)\le 0\\ \dfrac{tN_i(y/t)-0}{\overline{Z}_i-0} & ; \quad 0<tN_i(y/t)<\overline{Z}_i\\ 1 & ; \quad tN_i(y/t)\ge \overline{Z}_i\end{cases} \tag{۱۳}$$

اگر $i \in I^c$:

$$\mu_i\left(tD_i(y/t)\right)=\begin{cases}0 & ; \quad tD_i(y/t)\le 0\\ \dfrac{tD_i(y/t)-0}{\overline{Z}_i-0} & ; \quad 0<tD_i(y/t)<\overline{Z}_i\\ 1 & ; \quad tN_i(y/t)\ge \overline{Z}_i\end{cases} \tag{۱۴}$$

اکنون با توجه به توابع عضویت (۱۳)و (۱۴) و با استفاده از عملگر min-operator [۱۴]، مدل فازی مسئله برنامه ریزی خطی چند هدفی (۱۲) به مسئله برنامه ریزی خطی قطعی زیر تبدیل می شود.

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \;\; \lambda\\
&\text{s.t}: \;\; \mu_i\left(tN_i(y/t)\right)\ge\lambda \quad ;i\in I\\
&\qquad \mu_i\left(tD_i(y/t)\right)\ge\lambda \quad ;i\in I^c\\
&\qquad tD_i(y/t)\le 1 \qquad\quad ;i\in I \qquad\qquad (\text{LP})\\
&\qquad -tN_i(y/t) \qquad\quad\;\; ;i\in I^c\\
&\qquad Ay-bt\le 0\\
&\qquad y\ge 0\\
&\qquad t>0
\end{aligned} \tag{۱۵}$$

در روش مورد نظر همواره فرض شده است که مجموعه اندیس I^c, I یا بعبارتی طبیعت $N_i(x)$ بازای $i=1,\cdots,k$ معلوم می باشد. حال اگر آنها بطور صریح مشخص نباشند ولی معلوم باشد که مخرج توابع هدف در فضای جواب مثبت است, در این صورت برای پیدا کردن مجموعه اندیس I^c, Iو همچنین یافتن ماکزیمم سطح آرمانی $\overline{Z}_i$,مراحل زیر را باید دنبال کرد:

۱- هر یک از توابع هدف $Z_i(x)$ را باتوجه به محدودیت های مسئله با بکارگیری روش ارائه شده در [۱۵] ماکزیمم سازی نمائید. بازای $i=1,\cdots,k$ ، Z_i^* را بعنوان ماکزیمم مقدار $Z_i(x)$ در نظر بگیرید.

۲- اگر $Z_i^* \geq 0$ باشد آنگاه $i \in I$ و اگر $Z_i^* \leq 0$ آنگاه $i \in I^c$.

۳- اگر $i \in I$ آنگاه $\overline{Z}_i = Z_i^*$ و اگر $i \in I^c$ آنگاه $\overline{Z}_i = -\frac{1}{Z_i^*}$.

۵- مثال عددی

یک مدل برنامه ریزی خطی کسری چند هدفی زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \left(Z_1(x) = \frac{x_1 + x_2}{2x_1 + x_2 + 1}, Z_2(x) = \frac{4x_1 + 3x_2}{6x_1 + 2x_2 + 1}, Z_3(x) = \frac{2x_1 + 4x_2 + 1}{x_1 + 2x_2 + 3} \right) \\
\text{s.t}: \quad & 2x_1 - x_2 \geq 1 \\
& x_1 + 4x_2 \leq 18 \\
& 2x_1 + 4x_2 \geq 10 \\
& x_1 \geq 4 \\
& x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned} \tag{۱۶}$$

با بکارگیری روش حل برنامه ریزی کسری خطی ارائه شده در [۱۵] مقادیر Z_i^* بازای $i = 1,2,3$ بصورت زیر بدست می آید:

$$Z_1^* = 0.6 \quad , \quad Z_2^* = 0.828 \quad , \quad Z_3^* = 1.762$$

چون بازای بعضی از مقادیر x متعلق به فضای جواب, $Z_1(x) \geq 0$ ، $Z_2(x) \geq 0$ و $Z_3(x) \geq 0$ آنگاه مدل برنامه ریزی خطی چند هدفی هم ارز عبارت است از:

$$\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \left(f_1(y,t) = y_1 + y_2 , f_2(y,t) = 4y_1 + 3y_2 , f_3(y,t) = 2y_1 + 4y_2 + t \right) \\
\text{s.t}: \quad & 2y_1 + y_2 + t \leq 1 \\
& 6y_1 + 2y_2 + t \leq 1 \\
& y_1 + 2y_2 + 3t \leq 1 \\
& 2y_1 - y_2 - t \geq 0 \\
& y_1 + 4y_2 - 18 \leq 0 \\
& 2y_1 + 4y_2 - 10t \geq 0 \\
& y_1 - 4t \geq 0 \\
& y_1, y_2 \geq 0 \\
& t > 0
\end{aligned} \tag{۱۷}$$

اکنون هر یک از توابع عضویت مربوط به $f_i(y,t)$ را بصورت زیر تعریف نمایید:

$$\mu_1\left(f_1(y,t)\right)=\begin{cases}0 & ; \quad f_1(y,t)\le 0\\ \dfrac{y_1+y_2}{0.6} & ; \quad 0<f_1(y,t)<0.6\\ 1 & ; \quad f_1(y,t)\ge 0.6\end{cases} \tag{۱۸}$$

$$\mu_2\left(f_2(y,t)\right)=\begin{cases}0 & ; \quad f_2(y,t)\le 0\\ \dfrac{4y_1+3y_2}{0.828} & ; \quad 0<f_2(y,t)<0.828\\ 1 & ; \quad f_2(y,t)\ge 0.828\end{cases} \tag{۱۹}$$

$$\mu_3\left(f_3(y,t)\right)=\begin{cases}0 & ; \quad f_3(y,t)\le 0\\ \dfrac{2y_1+4y_2+t}{1.762} & ; \quad 0<f_3(y,t)<1.762\\ 1 & ; \quad f_3(y,t)\ge 1.762\end{cases} \tag{۲۰}$$

با توجه به توابع عضویت (۱۸)و (۱۹)و(۲۰) مدل برنامه ریزی خطی معادل عبارت است از:

$$\begin{aligned}
&\text{Max} \quad \lambda\\
&\text{s.t}: \quad y_1+y_2-0.6\lambda\ge 0\\
&\qquad 4y_1+3y_2-0.828\lambda\ge 0\\
&\qquad 2y_1+4y_2+t-1.762\lambda\ge 0\\
&\qquad 2y_1+y_2+t\le 1\\
&\qquad 6y_1+2y_2+t\le 1\\
&\qquad y_1+2y_2+3t\le 1\\
&\qquad 2y_1-y_2-t\ge 0\\
&\qquad y_1+4y_2-18t\le 0\\
&\qquad 2y_1+4y_2-10t\ge 0\\
&\qquad y_1-4t\ge 0\\
&\qquad y_1,y_2,\lambda\ge 0\\
&\qquad t>0
\end{aligned} \tag{۲۱}$$

جواب بهین برنامه ریزی خطی قطعی(۲۱) عبارت است از:

$$y_1=0.125, \quad y_2=0.109, \quad t=0.031, \quad \lambda=0.391$$

بدین ترتیب جواب مسئله اصلی(۱۶) عبارت است از :

$$x_1^* = 4.03, \quad x_2^* = 3.52, \quad Z_1(x^*) = 0.6, \quad Z_2(x^*) = 0.82, \quad Z_3(x^*) = 1.64$$

۶- نتیجه گیری

در این مقاله یک روشی برای بدست آوردن جواب مسائل برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی ارائه دادیم که بر پایه رویکرد تئوریک فازی می باشد. ابتدا با استفاده از تبدیل $y = tx \ (t>0)$ برنامه ریزی کسری خطی چند هدفی را بصورت یک مدل برنامه ریزی خطی چند هدفی هم ارز فرمول بندی کردیم. سپس با تعریف توابع عضویت مناسب و با بکارگیری عملگرفازیmin-operator که توسط زیمرمن (Zimmermann)ایجاد شده است, برنامه ریزی خطی چند هدفی را به یک مدل برنامه ریزی خطی قطعی تبدیل نمودیم که از حل آن جواب مسئله اصلی بدست می آید.

مراجع

[1] Gilmore P.C. and Gomory R.E., (1963), "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem",Oper. Res.,Vol.11, Pages 863-888.
[2] Schaible S., (1976), "Fractional Programming I: Duality", Manage. Sci.,Vol.22, Pages 658-667.
[3] Schaible S., (1978), "Analyse and Anwendungen Von Quotienten Programmen", Verlag Anton Hain, Meisenheim am Glan.
[4] Choo E.U., and Atkins D.R., (1982), "Bicriteria Linear Fractional Programming", J. Optim. Theory Appl.,Vol.36, Pages 203-220.
[5] Kornbluth J.S.H. and Steuer R.E., (1981), "Goal Programming with Linear Fractional Criteria", European J. Oper.Res., Vol.8, Pages 58-65.
[6] Kornbluth J.S.H. and Steuer R.E.,(1981),"Multiple Objective Linear Fractional Programming", Manage. Sci.,Vol.27, Pages 1024-1039.
[7] Nykowski I. and ZolKiewski Z.,(1985),"A Compromise Procedure for the Multiple Objective Linear Fractional Programming Problem", European J. Oper. Res.,Vol.19, Pages 91-97.
[8] Dutta D., Tiwari R.N. and Rao J.R., (1992), "Multiple Objective Linear Fractional Programming- A Fuzzy Set Theoric Approach", Fuzzy Sets and Systems, Vol.52, Pages 39-45.
[9] Dutta D., Rao J.R. and Tiwari R.N.,(1993), "A Restricted Class of Multi Objective Linear Programming Problems", European J.Oper.Res,Vol.68,Pages 352-355.
[10]Dutta D., Rao J.R. and Tiwari R.N.,(1993), "Fuzzy Approaches for Multiple Criteria Linear Fractional Optimization: A Comment", Fuzzy Sets and Systems,Vol.54,Pages 347-349.
[11]Luhandjula M.K.,(1984),"Fuzzy Approaches for Multiple Objective Linear Fractional Optimization", Fuzzy Sets and systems,Vol.13,Pages 11-23.
[12]Chakraborty M. and Gupta S., (2002), "Fuzzy Mathematical Programming for Linear Fractional Programming Problem", Fuzzy Sets and Systems, Vol.125, Pages 335-342.
[13]Caraven B.D., (1988), "Fractional Programming", Heldermann Verlag, Berlin.
[14] Zimmermann H.-J., (1996), "Fuzzy Set Theory and Its Applications", Kluwer Academic.
[15] Charnes A. and Cooper W.W., (1962), "Programming with Linear Fractional Functionals", Nav. Res. Logistics Quart., Vol.9, Pages 181-186.