پنجمین کنفرانس سیستمهای فازی ایران
هفدهم الی نوزدهم شهریورماه ۱۳۸۳

استفاده ازیک الگوریتم صفحه برش برای حل برنامه ریزی خطی با پارامترهای فازی در محدودیت ها

بهروز علی زاده[۱]، فهیمه باروقی بناب[۲]
دانشگاه صنعتی سهند تبریز
دانشکده علوم پایه مهندسی
behrouz210@yahoo.com

چکیده
در این مقاله یک مدل برنامه ریزی خطی که پارامترهای موجود در محدودیت های آن اعداد فازی محدب باشند، مورد بررسی گرفته و همواره نشان داده می شود که این مدل برنامه ریزی خطی فازی می تواند به یک مسئله برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی تبدیل گردد. بر پایه یک روش رتبه بندی فازی خاص در محدودیت ها، یک الگوریتم مؤثر از نوع صفحه برش تعمیم داده می شود که از آن برای بدست آوردن جواب بهین برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی استفاده می گردد. به وسیله قضیه ای ثابت می شود که این الگوریتم از نوع صفحه برش قادر است دنباله ای از جوابهای شدنی را تولید نماید که به جواب بهین مسئله همگرا باشد. در آخربا یک مثال عددی کارایی روش ارائه شده نشان داده می شود.

واژه های کلیدی: برنامه ریزی خطی فازی - برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی - الگوریتم صفحه برش

۱- مقدمه

در مسائل تصمیم گیری دنیای واقعی، یک تصمیم گیرنده نمی تواند همیشه بطور دقیق مقادیر ضرایب مسئله تصمیم گیری را بداند و این ابهام و عدم قطعیت ممکن است از نوع احتمالی نباشد. در چنین حالتی تصمیم گیرنده می تواند عدم قطعیت را در مفهوم پارامتر های فازی نشان دهد [۱]. در این مقاله هدف ما این است که یک روش جدید برای بدست آوردن جواب برنامه ریزی خطی ارائه دهیم که درآن تمامی پارامترهای موجود در قیدها اعداد فازی باشند و این مدل مورد نظر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} &\min : \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{s.t} : \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \geq \bar{b}_i \qquad ; 1 \leq i \leq m \\ &\quad x_j \geq 0 \qquad\qquad ; 1 \leq j \leq n \end{aligned} \tag{۱}$$

۱- عضو هیات علمی با مرتبه مربی،گروه ریاضی،دانشگاه صنعتی سهند
۲- دانشجوی کارشناسی ارشد،گروه ریاضی،دانشگاه ارومیه

بطوریکه $\overline{a}_{ij}$ و $\overline{b}_i$ اعداد فازی می باشند.

مقالات زیادی در این خصوص چاپ شده است [۲]، [۳]، [۴]، [۵]، بطوریکه در همه آن مقالات برای ارزیابی نامساوی در قیدها روشهای رتبه بندی فازی خاصی ارائه شده است که تحت آن درستی یا نادرستی نامساوی $\overline{r} \le \overline{s}$ را ارزیابی می نمایند. از آنجائیکه یک روش رتبه بندی مکمل و جامع برای ارزیابی نامساوی فازی پذیرفته نشده است، لذا مدلها و روشهای زیادی می تواند در این خصوص به اثبات برسد[۳]. در این مقاله، در جهت حل مدل برنامه ریزی خطی فازی (۱)، نشان می دهیم که چنین مسائلی می توانند به یک مدل برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی تبدیل گردند. یک الگوریتم مؤثر صفحه برش بسط یافته ارائه می گردد که از آن برای پیدا کردن جواب برنامه ریزی خطی فازی (۱) استفاده می شود.

۲- مدل برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی متناظر

در این مقاله تمامی پارامترهای فازی در محدودیت ها به عنوان اعداد فازی محدب [۲] در نظر گرفته می شوند که بصورت زیر تعریف می شود:

۱-۲- تعریف: یک عدد فازی محدب $\overline{N}$ یک مجموعه فازی با تابع عضویت $\overline{N}(.)$ می باشد بطوریکه مجموعه α- برش آن یعنی $\overline{N}_\alpha$ تشکیل یک بازه $\left[L_{\overline{N}}(\alpha), R_{\overline{N}}(\alpha)\right]$ می دهد بطوریکه:

$$L_{\overline{N}}(\alpha) = \min\left\{x \in R \mid \overline{N}(x) \ge \alpha\right\}$$
$$R_{\overline{N}}(\alpha) = \max\left\{x \in R \mid \overline{N}(x) \ge \alpha\right\} \qquad (۲)$$

و $L_{\overline{N}}(\alpha)$ و $R_{\overline{N}}(\alpha)$ توابع پیوسته حقیقی روی بازه $[0,1]$ می باشند .

فرض کنید $F(\overline{N})$ مجموعه تمامی اعداد فازی محدب باشد. طبق اصل گسترش [۲]، نتایج زیر راخواهیم داشت:

۲-۲- خاصیت: اگر $\overline{N}_1$ و $\overline{N}_2$ دو عدد فازی محدب باشد آنگاه $\overline{M} = \overline{N}_1 + \overline{N}_2$ یک عدد فازی محدب بوده و بازای هر $\alpha \in [0,1]$ داریم:

$$L_{\overline{M}}(\alpha) = L_{\overline{N}_1}(\alpha) + L_{\overline{N}_2}(\alpha)$$
$$R_{\overline{M}}(\alpha) = R_{\overline{N}_1}(\alpha) + R_{\overline{N}_2}(\alpha) \qquad (۳)$$

۳-۲- خاصیت: اگر $\overline{N}$ یک عدد فازی محدب و K یک عدد حقیقی مثبت باشد آنگاه $\overline{M} = K \cdot \overline{N}$ یک عدد فازی محدب بوده و بازای هر $\alpha \in [0,1]$ داریم:

$$L_{\overline{M}}(\alpha) = K \cdot L_{\overline{N}}(\alpha)$$
$$R_{\overline{M}}(\alpha) = K \cdot R_{\overline{N}}(\alpha) \qquad (۴)$$

۴-۲- خاصیت: اگر $\overline{N}$ یک عدد فازی محدب و K صفر حقیقی باشد آنگاه $K \cdot \overline{N} = 0$.

بعد از توصیف مفاهیم عدد فازی محدب و خواص آن، باید در مورد رتبه بندی اعداد فازی صحبت کنیم. همواره روشهای رتبه بندی زیادی برای ارزیابی نامساوی فازی وجود دارد [۲،۶]. در این مقاله ما یک روش رتبه بندی که بر پایه α- برشها می باشد[۷،۸] برای ارزیابی روابط فازی در محدودیتها استفاده خواهیم کرد.

۵-۲- تعریف: اگر $\overline{N}_1, \overline{N}_2 \in F(\overline{N})$ و $\alpha \in [0,1]$ آنگاه $\overline{N}_1 \ge_\alpha \overline{N}_2$ اگر و فقط اگر بازای هر t متعلق به $[\alpha,1]$ داشته باشیم:

$$L_{\overline{N}_1}(t) \ge L_{\overline{N}_2}(t)$$
$$R_{\overline{N}_1}(t) \ge R_{\overline{N}_2}(t) \qquad (۵)$$

با توجه به روش رتبه بندی ارائه شده در تعریف ۲-۵ و بازای α داده شده از بازه $[0,1]$، مدل برنامه ریزی خطی فازی (۱) می‌تواند بصورت زیر بیان شود:

$$\begin{aligned} \min &: \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t &: \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \geq_\alpha \bar{b}_i \quad ;1 \leq i \leq m \\ & x_j \geq 0 \qquad ;1 \leq j \leq n \end{aligned} \tag{۶}$$

بطوریکه $\bar{a}_{ij}, \bar{b}_i \in F(\bar{N})$.

در اینجا نامساوی $\sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij} x_j \geq_\alpha \bar{b}_i$ به این معنی می باشد که:

$$\left.\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} L_{\bar{a}_{ij}}(t) \cdot x_j \geq L_{\bar{b}_i}(t) \\ \sum_{j=1}^{n} R_{\bar{a}_{ij}}(t) \cdot x_j \geq R_{\bar{b}_i}(t) \end{aligned}\right. \quad \forall t \in [\alpha, 1] \tag{۷}$$

با جایگذاری روابط (۷) در مسئله (۶) مسئله زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \min &: \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t &: \sum_{j=1}^{n} L_{\bar{a}_{ij}}(t) \cdot x_j \geq L_{\bar{b}_i}(t) \quad , \forall t \in [\alpha, 1] \quad ;1 \leq i \leq m \\ & \sum_{j=1}^{n} R_{\bar{a}_{ij}}(t) \cdot x_j \geq R_{\bar{b}_i}(t) \quad , \forall t \in [\alpha, 1] \quad ;1 \leq i \leq m \\ & x_j \geq 0 \qquad ;1 \leq j \leq n \end{aligned} \tag{۸}$$

فرض کنید:

$$f_{ij}(t) = \begin{cases} L_{\bar{a}_{ij}}(t) & ; i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n \\ R_{\bar{a}_{ij}}(t) & ; i = m+1, \ldots, 2m,\ j = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{۹}$$

$$b_i(t) = \begin{cases} L_{\bar{b}_i}(t) & ; i = 1, \ldots, m \\ R_{\bar{b}_i}(t) & ; i = m+1, \ldots, 2m \end{cases} \tag{۱۰}$$

اگر $T = [\alpha, 1]$ و $m' = 2m$ در این صورت با توجه به روابط (۹)و(۱۰) ،مسئله(۸) به مسئله برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی زیر تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned} \min &: \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ s.t &: \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t) \cdot x_j \geq b_i(t) \quad ;1 \leq i \leq m' \ , \forall t \in T \\ & x_j \geq 0 \qquad ;1 \leq j \leq n \end{aligned} \tag{۱۱}$$

بطوریکه T یک فضای متری فشرده بوده و $b_i(t), f_{ij}(t)$ بازای $j=1,\dots,n\ , i=1,\dots,m'$ توابع پیوسته حقیقی روی T می باشند. در [۹] همواره روابط بین جوابهای بهین و نقاط رأسی مسئله برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی (۱۱) اثبات شده است.

۳- طراحی الگوریتم برای بدست آوردن جواب بهین

الگوریتم های زیادی برای حل مسائل برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی وجود دارد [۱۰و۱۱]. مشکل در این است که چگونه بطور مؤثر با تعداد نامتناهی از محدودیتها رفتار کنیم. بر پایه تحقیقات اخیر[۹]، یک الگوریتم صفحه برش برای چنین کاربردهایی مفید می باشد. بر طبق مفهوم اساسی تقریب صفحه برش، ما می توانیم یک الگوریتم مؤثر طراحی نماییم که m'عدد محدودیت را در یک زمان اضافه می نماید تا موقعی که جواب بهین شناخته شود. در حالت خاص و در تکرار kام بازای $T_k = \{t^1, t^2, \dots, t^k\}$ و درحالی که $t^k = \{t_1{}^k, \dots, t_{m'}{}^k\} \in T^{m'}$، مدل برنامه ریزی خطی زیر را خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
&\min: \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j \\
&\text{s.t}:\quad \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t_i^1)\cdot x_j \ge b_i(t_i^1) \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t_i^2)\cdot x_j \ge b_i(t_i^2) \\
&\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad ;1 \le i \le m' \qquad (LP^k) \\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t_i^k)\cdot x_j \ge b_i(t_i^k) \\
&\qquad\quad x_j \ge 0 \qquad\qquad\qquad\qquad ;1 \le j \le n
\end{aligned}
\tag{۱۲}
$$

مجموعه F^k را بعنوان فضای جواب مدل برنامه ریزی خطی (۱۲) در نظر بگیرید. فرض کنید $x^k = (x_1{}^k, \dots, x_n{}^k)$ یک جواب بهین مدل برنامه ریزی خطی (۱۲) باشد. تابع تجاوز محدودیت را بصورت زیر تعریف کنید:

$$
V_i^{k+1}(t) = \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\cdot x_j{}^k - b_i(t) \quad ;\forall t \in T, i = 1,\dots,m'
\tag{۱۳}
$$

از آنجائیکه $b_i(t), f_{ij}(t)$ روی T توابع پیوسته هستندو T یک مجموعه فشرده است، لذا $V_i^{k+1}(t)$ مقدار می نیمم خود را بازای $i=1,\dots,m'$ روی T بدست می آورد. فرض کنید $t_i{}^{k+1}$ بعنوان یک می نیمم کننده باشد، بازای $i=1,\dots,m'$ مقادیر $V_i^{k+1}(t_i^{k+1})$ را محاسبه نمایید. اگر این مقادیر بزرگتر یا مساوی صفر باشد در این صورت x^k یک جواب شدنی برای برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی (۱۱) بوده و در ضمن x^k یک جواب بهین خواهد بود،زیرا فضای جواب F^k مسئله (LP^k) (۱۲) همواره بزرگتر از فضای جواب مسئله برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی (۱۱) می باشد. در غیر این صورت x^k جواب بهین نبوده و $t^{k+1} = (t_1{}^{k+1}, \dots, t_n{}^{k+1}) \notin T_k$. در این حالت مجموعه T_k را به مجموعه بزرگتر

افزایش می دهیم. با تکرار کردن این رویه، x^k به جواب بهین برنامه ریزی خطی نیمه $T_{k+1}=\{t^1,t^2,\ldots,t^k,t^{k+1}\}$ نامتناهی (۱۱) همگرا می شود با این پیش زمینه الگوریتم پیدا کردن جواب بهین بصورت زیر خلاصه می گردد:

۱-۳- الگوریتم:

گام۱: $k=1$ در نظر بگیرید.

گام۲: بازای $i=1,\ldots,m'$، t_i^1ها را از مجموعه T انتخاب کنید.

گام۳: $T_1=\{t^1\}$ در نظر بگیرید.

گام۴: مسئله برنامه ریزی خطی (LP^k) (۱۲) را حل کرده و جواب بهین x^k را بدست آورید.

گام۵: روی T و بازای $i=1,\ldots,m'$، می نیمم کننده t_i^{k+1} از $V_i^{k+1}(t)$ را پیدا کنید.

گام۶: بازای $i=1,\ldots,m'$ اگر $V_i^{k+1}(t_i^{k+1})\geq 0$ آنگاه x^k جواب بهین برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی(۱۱) بوده و الگوریتم تمام می شود. در غیر این صورت $k=k+1, T_{k+1}=T_k\bigcup\{t^{k+1}\}$ و به گام ۴ بروید.

اگر فضای جواب مسئله (۱۱) غیر خالی باشد در این صورت الگوریتم بعد از تعداد متناهی تکرار با یک جواب بهین یا دنباله ای از نقاط $\{x^k \mid k=1,2,\ldots\}$ خاتمه می یابد. اگر الگوریتم بعد از تعداد متناهی تکرار خاتمه پیدا نکند در این صورت $\{x^k\}$ یک زیر دنباله ای خواهد داشت که به یک جواب بهین از برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی (۱۱) همگرا شود. بنابر این در قضیه زیر همگرایی الگوریتم ۳-۱ اثبات می گردد.

۲-۳- قضیه: فرض کنید $\{x^k\}$یک دنباله تولید شده توسط الگوریتم صفحه برش ۳-۱ باشد. اگر یک $M>0$ وجود داشته باشد بطوریکه بازای هر k، $\|x^k\|\leq M$، در این صورت یک زیر دنباله ای از $\{x^k\}$ موجود خواهد بود بطوریکه به جواب بهین مسئله (۱۱) همگرا باشد.

اثبات: بدیهی است که فضای جواب (LP^k) شامل فضای جواب (LP^{k+1}) خواهد بود. لذا می توان گفت:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\,1} \leq \sum_{j=2}^{n} c_j x_j^{\,2} \leq \ldots \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\,*} \tag{۱۴}$$

بطوریکه $x^*=\left(x_1^{\,*},\ldots,x_n^{\,*}\right)^T$ یک جواب بهین برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی (۱۱) می باشد. بنا به فرض قضیه اگر $\{x^k\}$ کراندار باشد آنگاه دنباله ای $\{x^{k_l}\}$ از $\{x^k\}$ با حد $\bar{x}$ وجود خواهد داشت که در این صورت می توان نوشت که $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\,kl} \to \sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j$. بنابراین با توجه به رابطه (۱۴) خواهیم داشت:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j \leq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^{\,*} \tag{۱۵}$$

در جهت اثبات شدنی بودن $\bar{x}$ در نظر بگیرید:

$$V_i(t)=\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t)\cdot \bar{x}_j - b_i(t) \quad ,t\in T \quad ,i=1,\ldots,m' \tag{۱۶}$$

بازای $i=1,\ldots,m'$ فرض کنید $\bar{t}_i\in T$ یک می نیمم کننده $V_i(t)$ روی T باشد. با توجه به تعریف $\bar{x}$ داریم:

$$V_i\left(t_i^{\,k_l+1}\right)\geq 0 \quad ,i=1,\ldots,m' \tag{۱۷}$$

بطوریکه $t_i^{k_l+1} \in T$ بوسیله الگوریتم ۳-۱ برای می نیمم کردن $V_i^{k_l+1}(t)$ روی T تولید شده است. از آنجائیکه T یک فضای متریک فشرده می باشد، لذا یک زیر دنباله ای مانند $\{x^{s_l}\}$ از $\{x^{k_l}\}$ وجود خواهد داشت بطوریکه $\{t_i^{s_l+1}\}$ به یک نقطه حدی $t_i^* \in T$ همگرا گردد. در نتیجه باتوجه به رابطه (۱۷) خواهیم داشت: $V_i(t_i^*) \geq 0 \quad , i=1,\ldots,m'$. از آنجائیکه $t_i^{s_l+1}$ می نیمم کننده $V_i^{s_l+1}(t)$ روی T است، لذا می توان گفت:

$$\sum_{j=1}^{n} f_{ij}(t_i^{s_l+1}) \cdot x_j^{s_l} - b_i(t_i^{s_l+1}) \leq \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(\bar{t}_i) \cdot x_j^{s_l} - b_i(\bar{t}_i) \qquad ; i=1,\ldots,m' \tag{۱۸}$$

همچنین چون x^{s_l} نیز به $\bar{x}$ همگرا می شود لذا خواهیم داشت:

$$0 \leq V_i(t_i^*) \leq V_i(\bar{t}_i) \qquad ; i=1,\ldots,m' \tag{۱۹}$$

این نشان می دهد که $\bar{x}$ یک جواب شدنی برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی (۱۱) خواهد بود،بنابراین:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* \tag{۲۰}$$

با ترکیب روابط (۱۵) و (۲۰) نتیجه گرفته می شود که $\bar{x}$ یک جواب شدنی بوده و $\sum_{j=1}^{n} c_j \bar{x}_j = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$ پس $\{x^k\}$ یک زیر دنباله ای دارد که به جواب بهین برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی (۱۱) همگرا می باشد.

۴- مثال عددی

یک مدل برنامه ریزی خطی با پارامترهای فازی در محدودیتها را بصورت زیر درنظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &\max : 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ &s.t : \bar{2}x_1 + \bar{1}x_2 \ {}_{\alpha}\!\leq \bar{8} \\ &\quad \bar{1}x_3 \ {}_{\alpha}\!\leq \overline{10} \\ &\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \tag{۲۱}$$

بطوریکه بازای $\alpha \in [0,1]$ توابع عضویت پارامترهای فازی مطابق زیر تعریف می شوند:

$$\mu_{\bar{1}}(x) = \begin{cases} x & ;0 \leq x \leq 1 \\ 2-x & ;1 \leq x \leq 2 \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases} \qquad \mu_{\bar{2}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2} & ;0 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{4-x}{2} & ;2 \leq x \leq 4 \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases}$$

$$\mu_{\bar{8}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-5}{3} & ;5 \leq x \leq 8 \\ 9-x & ;8 \leq x \leq 9 \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases} \qquad \mu_{\overline{10}}(x) = \begin{cases} \dfrac{x-8}{2} & ;8 \leq x \leq 10 \\ 11-x & ;10 \leq x \leq 11 \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases} \tag{۲۲}$$

برای حل مسئله (۲۱)با توابع عضویت(۲۲) می توان مسئله معادل زیر را حل کرد:

$$\begin{aligned} -\min &: -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t} &: -\bar{2}x_1 - \bar{1}x_2 \geq_\alpha -\bar{8} \\ & -\bar{1}x_3 \geq_\alpha -1\bar{0} \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (۲۳)$$

بطوریکه:

$$\mu_{-\bar{1}}(x) = \begin{cases} x+2 & ;-2 \leq x \leq -1 \\ -x & ;-1 \leq x \leq 0 \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases} \qquad \mu_{-\bar{2}}(x) = \begin{cases} \frac{x+4}{2} & ;-4 \leq x \leq -2 \\ \frac{-x}{2} & ;-2 \leq x \leq 0 \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases} \quad (۲۴)$$

$$\mu_{-\bar{8}}(x) = \begin{cases} x+9 & ;-9 \leq x \leq -8 \\ \frac{-x-5}{3} & ;-8 \leq x \leq -5 \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases} \qquad \mu_{-1\bar{0}}(x) = \begin{cases} x+11 & ;-11 \leq x \leq -10 \\ \frac{-x-8}{2} & ;-10 \leq x \leq -8 \\ 0 & ;\text{otherwise} \end{cases} \quad (۲۵)$$

با توجه به توابع عضویت (۲۴)و(۲۵) مسئله برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی معادل مسئله (۲۳) عبارت است از:

$$\begin{aligned} -\min &: -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t} &: (-4+2t_1)x_1 + (-2+t_1)x_2 \geq -9 + t_1 \\ & (-2+t_2)x_3 \geq -11 + t_2 \qquad ;\forall t_i \in [\alpha, 1] \\ & (-2t_3)x_1 + (-t_3)x_2 \geq -5 - 3t_3 \\ & (-t_4)x_3 \geq -8 - 2t_4 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned} \quad (۲۶)$$

بازای $\alpha = 0.6$ و نقطه شروع $t^1 = (t_1^1, t_2^1, t_3^1, t_4^1) = (0.7, 0.8, 0.7, 0.8)$ مدل برنامه ریزی خطی زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} -\min &: -2x_1 - 4x_2 - 4x_3 \\ \text{s.t} &: -2.6x_1 - 1.3x_2 \geq -8.3 \\ & -1.2x_3 \geq -10.2 \\ & -1.4x_1 - 0.7x_2 \geq -7.1 \\ & -0.8x_3 \geq -9.6 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

(۲۷)

جواب بهین مسئله (۲۷) عبارت است از: $x^1=\left(x_1{}^1,x_2{}^1,x_3{}^1\right)=\left(0,6.3846,8.5\right)$.

اکنون تعریف کنید:

$$
\begin{aligned}
&V_1{}^2(t_1)=(-4+2t_1)x_1{}^1+(-2+t_1)x_2{}^1-(-9+t_1)=5.3846t_1-3.7692,\\
&V_2{}^2(t_2)=(-2+t_2)x_3{}^1-(-11+t_2)=7.5t_2-6,\\
&V_3{}^2\left(t_3\right)=(-2t_3)x_1{}^1+(-t_3)x_2{}^1-(-5-3t_3)=-3.3846t_3+5,\\
&V_4{}^2(t_4)=(-t_4)x_3{}^1-(-8-2t_4)=-6.5t_4+8
\end{aligned}
\tag{۲۸}
$$

همواره می نیمم کننده های $V_1{}^2(t_1)$، $V_2{}^2(t_2)$ ، $V_3{}^2(t_3)$و $V_4{}^2(t_4)$ روی بازه $[\alpha,1]=[0.6,1]$ به ترتیب مقادیر 0.6 , 0.6 , 1 , 1 می باشند. بنابراین $t^2=(t_1^2,t_2^2,t_3^2,t_4^2)=\left(0.6,0.6,1,1\right)$ انتخاب کنید. ازآنجائیکه $V_1{}^2(t_1^2)\le 0$، $V_2{}^2(t_2^2)\le 0$، $V_3{}^2(t_3^2)\ge 0$ و $V_4{}^2(t_4^2)\ge 0$، لذا با یک تکرار دیگر از الگوریتم ۳-۱ مدل برنامه ریزی خطی (LP^2) زیر را خواهیم داشت:

$$
\begin{aligned}
-\min:\ &-2x_1-4x_2-4x_3\\
\text{s.t}:\ &(-4+2t_1^1)x_1+(-2+t_1^1)x_2\ge -9+t_1{}^1\\
&(-2+t_2^1)\,x_3\ge -11+t_2{}^1\\
&(-2t_3^1)x_1+(-t_3^1)x_2\ge -5-3t_3{}^1\\
&(-t_4^1)x_3\ge -8-2t_4{}^1\\
&(-4+2t_1^2)x_1+(-2+t_1^2)x_2\ge -9+t_1{}^2\\
&(-2+t_2^2)x_3\ge -11+t_2{}^2\\
&(-2t_3^2)x_1+(-t_3^2)x_2\ge -5-3t_3{}^2\\
&(-4t_4^2)x_3\ge -8-2t_4{}^2\\
&x_1,x_2,x_3\ge 0
\end{aligned}
\tag{۲۹}
$$

جواب بهین مسئله (۲۹) عبارت است از : $x^2=(x_1^2,x_2^2,x_3^2)=\left(0,6.0001,7.4287\right)$

تعریف کنید:

$$
\begin{aligned}
&V_1^{\,3}(t_1) = (-4 + 2t_1)x_1^{\,2} + (-2 + t_1)x_2^{\,2} - (-9 + t_1) = 5.0001t_1 - 3.0003,\\
&V_2^{\,3}(t_2) = (-2 + t_2)x_3^{\,2} - (-11 + t_2) = 6.4287t_2 - 3.8575,\\
&V_3^{\,3}(t_3) = (-2t_3)x_1^{\,2} + (-t_3)x_2^{\,2} - (-5 - 3t_3) = -3.0001t_3 + 5,\\
&V_4^{\,3}(t_4) = (-t_4)x_3^{\,2} - (-8 - 2t_4) = -5.4287t_4 + 8
\end{aligned}
\qquad (۳۰)
$$

می نیمم کننده های $V_1^{\,3}(t_1)$ ، $V_2^{\,3}(t_2)$ ، $V_3^{\,3}(t_3)$ و $V_4^{\,3}(t_4)$ به ترتیب روی بازه $[0.6\,,1]$ مقادیر $1,1,0.6,0.6$ هستند.بنابر این $t^3 = (t_1^3, t_2^3, t_3^3, t_4^3) = (0.6,0.6,1,1)$ انتخاب نمایید.از آنجائیکه $V_i^{\,3}(t_i^3) \geq 0$ ، بنابراین معیار توقف الگوریتم ۳-۱ برقرار می باشد و بازای $\alpha = 0.6$ ، $x^* = x^2 = (0,6.0001,7.4287)$ جواب بهین مسئله برنامه ریزی خطی فازی (۲۱) خواهد بود.

۵- نتیجه‌گیری

در این مقاله یک مدل برنامه ریزی خطی با پارامترهای فازی در محدودیتها مورد بررسی قرار گرفت. برپایه یک روش رتبه بندی خاص روی اعداد فازی، همواره نشان دادیم که چنین مسائلی می توانند به یک مدل برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی تبدیل گردند. یک الگوریتم مؤثر از نوع صفحه برش برای حل مدل برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی هم ارز برنامه ریزی خطی فازی مورد نظر ارائه کردیم و بوسیله قضیه ای ثابت کردیم که این الگوریتم دنباله ای از جوابهای شدنی را تولید می کند که همواره به جواب بهین برنامه ریزی خطی نیمه نامتناهی میل می کند. درآخر با یک مثال عددی کارایی این الگوریتم را نشان دادیم.

مراجع

[1] Zimmerman H.- J.,(1991), “Fuzzy Set Theory and Its Applications”, Kluwer Academic, Norwell, MA.
[2] Lai Y.-J. and Hwang C.-L.,(1992),“Fuzzy Mathematical Programming: Methods and Applications”, Springer- Verlag , Heidelberg.
[3] Tanaka H., Ichihashi H. and Asai K.,(1984), “A Formulation of Fuzzy Linear Programming Problems Based on Comparison of Fuzzy Numbers”, Control and Cybernet, Vol. 13, Pages 185-194.
[4] Rankin J. and Rimanek J.,(1985),“Inequality Relation Between Fuzzy Numbers and Its Use in Fuzzy Optimization”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 16, Pages 123-138.
[5] Delgado M., Verdegay J. L. and Vila M. A. ,(1989), “A General Model of Fuzzy Linear Programming”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 29, Pages 21-29.
[6] Chen S. - J. and Hwang C.-L. ,(1992), “Fuzzy Attribute Decision Making”, Springer- Verlag, New York.
[7] Adamo J. M. ,(1980), “Fuzzy Decision Trees”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 4, Pages 207-219.
[8] Buckley J.J.,(1989), “A Fast Method of Ranking Alternatives Using Fuzzy Numbers”, Fuzzy Sets and Systems, Vol. 30, Pages 337-338.
[9] Fang S.– C., Hu C. - F., Wang H.- F. and Wu S.– Y.,(1999), “Linear Programming With Fuzzy Coefficients in Constraints”, Computers and Mathematics with Applications, Vol. 37,Pages 63-76.
[10] Hetlettichi A. and Kortanek K.,(1993),“ Semi- Infinite Programming: Theory, Method and Applications”, SIAM Review, Vol. 35,Pages 380-429.
[11] Fang S.-C.,Rajasekera J.R. and Tsao H.-S.J.,(1997) “,Entropy Optimization and Mathematical Programming”, Kluwer Academic, Norwell, MA .