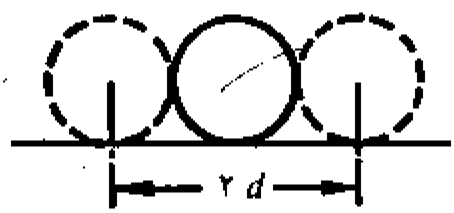
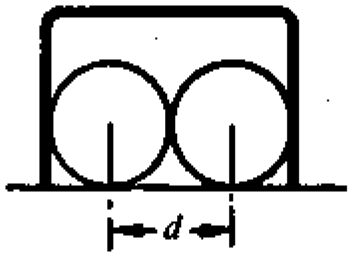


شکل ۲۰



شکل ۱۹

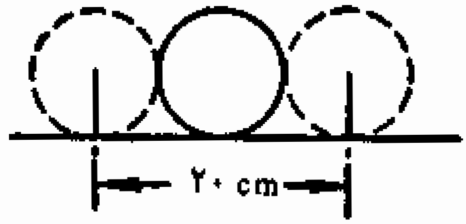
عرض دروازه دو برابر قطر گوی میباشد. ولی چنین تصوری اشتباهی است زیرا با اینکه البته دروازه از گوی عریض‌تر است عرض عبور آزاد گوی از دروازه نسبت به گوی هدف دو برابر کم‌تر است.

به شکل ۱۹ نظر اندازید و همه چیز برایتان واضح میشود. مرکز گوی نباید به سیم دروازه تا فاصلهٔ کمتر از شعاع نزدیک شود زیرا در غیر این صورت گوی به سیم تماس پیدا خواهد کرد. یعنی برای مرکز گوی هدفی به اندازهٔ دو شعاع کوچکتر از عرض دروازه میماند. به سادگی میتوان مشاهده کرد که در شرایط مسئلهٔ ما عرض هدف هنگام زدن گوی به دروازه از بهترین موضع مساوی به قطر گوی است.

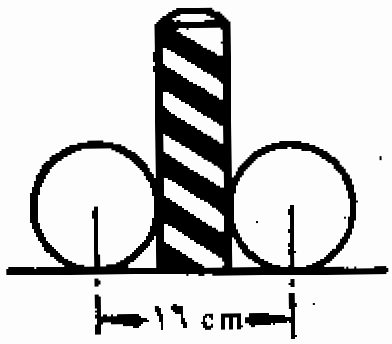
حال ببینیم که عرض هدف برای مرکز گوی متحرک هنگام زدن به گوی دیگر چقدر است. واضح است که اگر مرکز گوی زننده به مرکز گوی هدف تا فاصلهٔ کمتر از شعاع گوی نزدیک گردد در آنصورت ضربه وارد است. یعنی بطوریکه در شکل ۲۰ دیده میشود در این صورت عرض هدف برابر دو قطر گوی است.

بدینترتیب بر خلاف نظر بازی‌کنان، در شرایط داده شده زدن گوی به گوی دیگر دو بار آسانتر از پاک زدن آن به دروازه از بهترین موضع است.

۲۷. پس از آنچه تازه گفته شد این مسئله توضیحات زیادی نمیخواهد. به آسانی دیده میشود (شکل ۲۱) که عرض هدف هنگام زدن گوی به گوی دیگر مساوی به دو قطر گوی است یعنی ۲۰ سانتی‌متر. اما عرض هدف هنگام نشانه‌گیری تیرک مساوی به



شکل ۲۱



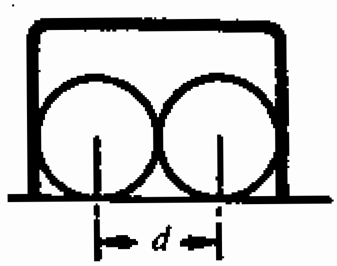
شکل ۲۲

حاصل‌جمع قطرهای گوی و تیرک است یعنی ۱۶ سانتی‌متر (شکل ۲۲). یعنی زدن گوی به گوی دیگر از زدن آن به تیرک

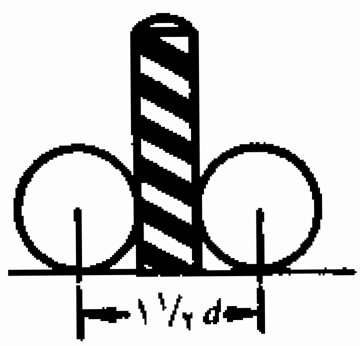
$$\frac{۲۰}{۱۶} = ۱\frac{۱}{٤}$$

مرتبه یعنی ۲۵٪ آسان‌تر است. ولی بازی‌کنان معمولا شانس‌های اصابت گوی به گوی دیگر را نسبت به اصابت آن به تیرک برتر میدانند.

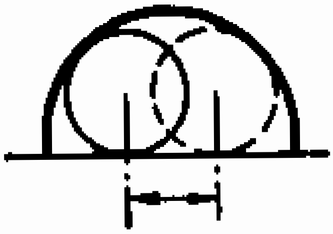
۲۸. بعضی بازی‌کنان ممکن است اینطور قضاوت کنند: از آنجا که دروازه دو بار عریضتر از گوی، و تیرک دو بار نازکتر از گوی است لذا هدف هنگام پاک زدن گوی به دروازه چهار بار عریض‌تر است تا هنگام زدن گوی به تیرک. خواننده که مسائل قبلی را تجربه کرد چنین اشتباهی را مرتکب نمیشود. او در می‌یابد که هدف هنگام نشانه‌گیری تیرک $۱\frac{۱}{۲}$ بار عریض‌تر است تا در هنگام پاک زدن



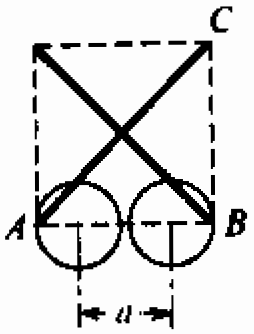
شکل ۲۳



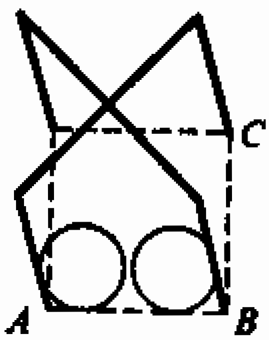
شکل ۲٤



شکل ۲۵



شکل ۲۷



شکل ۲۶

گوی به دروازه از بهترین موضع. این موضوع از مشاهدهٔ شکل‌های ۲۳ و ۲۴ واضح میگردد.

(هرگاه دروازه بجای راست‌گوشه قوسی باشد آنگاه، بطوریکه از شکل ۲۵ معلوم میشود، راه عبور گوی باز هم باریک‌تر میگردد.)

۲۹. از شکل‌های ۲۶ و ۲۷ دیده میشود که فاصلهٔ a که برای عبور مرکز گوی باقی مانده است در شرایط داده شدهٔ مسئله نسبتاً کوچک است. کسیکه با هندسه آشنا است میداند که ضلع AB مربع از قطر AC آن تقریباً ۱,۴ مرتبه کوچکتر است.

هرگاه عرض دروازه $۳d$ باشد (d قطر گوی است) آنگاه AB مساویست با

$$۳\,d/۱,۴ \approx ۲,۱\,d$$

فاصلهٔ a که برای مرکز گوی گذرنده از تلهٔ موش از بهترین موضع نقش هدف را ایفاء میکند باز هم باریک‌تر است. آن به اندازهٔ یک قطر تمام کوچکتر، و مساویست با

$$۲,۱\,d - d = ۱,۱\,d$$

ضمناً بطوریکه ما میدانیم هدف برای مرکز گوی زننده به گوی دیگر مساوی به $۲d$ است. بنا بر این، در شرایط داده شده، زدن گوی به گوی دیگر دو بار آسانتر از زدن آن به تلهٔ موش است.

۳۰. تلهٔ موش در صورتی کاملا غیر قابل عبور میگردد که عرض دروازه کمتر از ۱,۴ برابر قطر گوی باشد. این امر از توضیحاتی که در مسئله قبلی داده شده است نتیجه میشود. هرگاه دروازه شکل کمانی داشته باشد شرایط عبور گوی باز هم بدتر میشود.

یک دوجین معمی‌های دیگر

۳۱. ریسمان *. مادر در حالیکه دستش را از طشت رختشوئی بیرون میکشید پرسید: باز هم یک ریسمان دیگر؟ مگر من خودم ریسمان هستم؟ هر لحظه از تو میشنوم: ریسمان، ریسمان. آخر من دیروز بتو کلاف بزرگی دادم. اینقدر ریسمان را برای چکار میخواهی؟ تو آنرا چکار کردی؟

پسر جواب داد: ریسمان را چکار کردم؟ اولاً تو خودت نصفش را پس گرفتی...

— من پاکت‌های رخت را با چه ببندم؟

— نصف باقی مانده را توم برای ماهیگیری از من گرفت.

— بر برادر بزرگ همیشه باید احترام بگذاری.

— من هم احترام کردم. برای من بسیار کم باقی ماند و نصفش را پدرم گرفت تا بند شلوارش را که از خندهٔ زیاد هنگام خرابی اتومبیل پاره شد ترمیم کند. و سپس خواهر نیز دو پنجم قسمت باقی مانده را برای گره زدن مویش گرفت...

— باقیمانده را چکار کردی؟

— باقیمانده‌را؟ باقیمانده که ۳۰ سانتی‌متر بیش نبود! حالا بیا و از این قطعه تلفن درست کن...

طول اولیهٔ ریسمان چقدر بود؟

۳۲. جوراب و دستکش. در یک قوطی ۱۰ جفت جوراب قهوه‌ای و ۱۰ جفت جوراب سیاه، و در قوطی دیگر ۱۰ جفت دستکش قهوه‌ای و ۱۰ جفت دستکش سیاه وجود دارد. حد اقل چند جوراب

* این معمی از داستان‌نویس انگلیسی باری پن است.

و دستکش را باید از هر قوطی در آورد تا بتوان از آنها یک جفت جوراب (هر رنگی داشته باشد) و یک جفت دستکش بدست آورد؟

۳۳. طول عمر موی. تعداد موی سر بطور متوسط چقدر است؟ این تعداد قریب ۱۵۰۰۰۰* برآورد شده است. همچنین تعیین شده است که هر ماه بطور متوسط ۳۰۰۰ تار مو از سر میریزد.
چطور میتوان بر اساس ارقام فوق محاسبه کرد که هر تار مو چقدر وقت، البته بطور متوسط، در جای خود باقی میماند؟

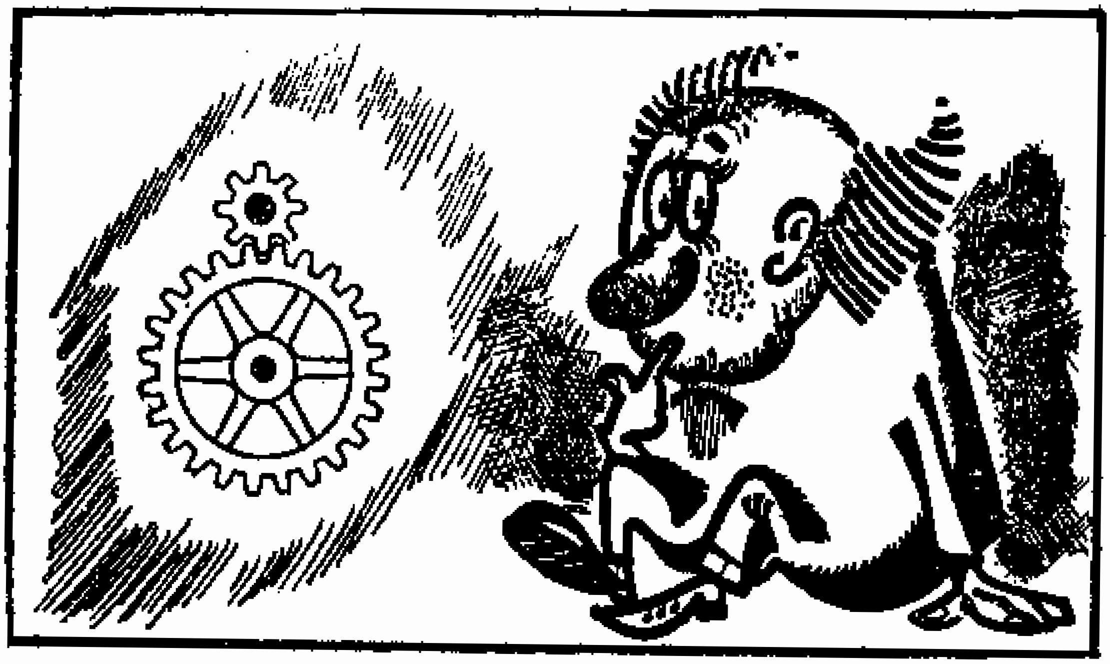
۳۴. حقوق. حقوق من در ماه اخیر یکجا با فوق‌العاده ۱۳۰ روبل بود. حقوق اصلی من ۱۰۰ روبل بیشتر از حقوق فوق‌العاده است. حقوق من بدون فوق‌العاده چقدر است؟

۳۵. راهپیمائی با اسکی. اسکی‌باز حساب نمود که هرگاه در یک ساعت ۱۰ کیلومتر طی کند ساعت یک بعد از ظهر، و اگر سرعت وی ۱۵ کیلومتر در ساعت باشد ساعت ۱۱ قبل از ظهر به مقصد میرسد. او با چه سرعتی باید بدود که ساعت ۱۲ ظهر به مقصد برسد؟

۳۶. دو کارگر. دو کارگر یکی سالخورده و دیگری جوان در یک خانه زندگی، و در یک کارخانه کار میکنند. کارگر جوان از خانه تا کارخانه در ظرف ۲۰ دقیقه، و کارگر مسن در ظرف ۳۰ دقیقه میرسد. بعد از چند دقیقه کارگر جوان به کارگر مسن میرسد اگر کارگر مسن ۵ دقیقه زودتر از او از خانه حرکت کند؟

---

* بعضی‌ها تعجب میکنند که به چه ترتیبی این امر امکان‌پذیر شد. آیا تمام موهای سر را یکی یکی شمرده اند؟ نه خیر، این کار را نکردند تنها تعداد موها را در یک سانتی‌متر مربع سطح سر شمردند. با دانستن این تعداد و همچنین مساحت قسمت مودار سر تعداد کل موهای سر را بآسانی میتوان تعیین نمود. خلاصه اینکه تعداد موهای سر با عین شیوه‌ایکه تعداد درختان در جنگل محاسبه میشود توسط دانشمندان کالبدشناسی شمرده شده است.



شکل ۲۸. چرخ‌دندهٔ کوچک چند دور میزند؟

۳۷. ماشین‌نویسی گزارش. ماشین‌نویسی گزارشی به دو ماشین‌نویس محول شده است. ماشین‌نویس مجرب میتوانست این کار را در ظرف دو ساعت، و ماشین‌نویس کم‌تجربه در ظرف سه ساعت انجام دهد.

اگر آنها کار را طوری بین خود تقسیم کنند که در کوتاه‌ترین مدت انجام شود چقدر طول خواهد کشید؟

چنین مسائلی را اغلب بتقلید از راه حل مسئله مشهور حوضها حل میکنند. یعنی اولا تعیین مینمایند که در ظرف یک ساعت هر ماشین‌نویس چه قسمتی از کار را انجام میدهد، هر دو کسر را جمع، و سپس واحد را بر این حاصل‌جمع تقسیم مینمایند. آیا شما میتوانید طریقهٔ جدیدی را متفاوت از طریقهٔ استاندارد برای حل اینگونه مسائل پیدا نمائید؟

۳۸. دو چرخ دنده. چرخ‌دندهٔ ۸ دندانه‌ای با چرخ‌دندهٔ ۲۴ دندانه‌ای درگیر میباشد (شکل ۲۸). با دور زدن چرخ بزرگ چرخ کوچک بدور آن میچرخد.

سؤال میشود: چرخ کوچک در ظرف مدتی که بدور چرخ بزرگ یک دور کامل میزند چند بار بدور محور خود میچرخد؟

۳۹. چند سال؟ از یکی از دوستداران معمی‌ها پرسیدند که چند سال دارد. جواب او پیچیده بود:

— سه برابر عمر من پس از سه سال را بگیرید و سه دفعه عمر من در سه سال قبل را از آن تفریق نمائید. عدد حاصله هم سن من است.

او چندساله است؟

۴۰. خانوادهٔ ایوانف. ایوانف چند سال دارد؟

— بیائید فکر کنیم. هجده سال قبل او سه بار بزرگتر از پسر خود بود. من این موضوع را بخوبی بیاد دارم زیرا در آن سال سرشماری اهالی صورت گرفت.

— اجازه بدهید، تا آنجا که من اطلاع دارم او فعلا دو مرتبه بزرگتر از پسرش است. آیا این پسر دیگر وی است؟

— نه خیر، همان پسر است. او فقط یک پسر دارد. بنا بر این، تعیین سن فعلی ایوانف و پسرش کار مشکلی نیست.

آنها چند سال دارند؟

۴۱. تهیهٔ محلول. در یک پیمانه قدری جوهر نمک، و در پیمانهٔ دیگری به همان اندازه آب موجود است. برای تهیهٔ محلول اولا از پیمانهٔ اول ۲۰ گرم جوهر را در پیمانهٔ دوم ریختند. سپس دو سوم محلولی را که در پیمانهٔ دوم تهیه گردید در پیمانهٔ اول ریختند. بعد از این عمل مقدار مایع در پیمانهٔ اول چهار مرتبه بیشتر از پیمانهٔ دوم شد. چقدر جوهر نمک و آب در آغاز موجود بود؟

۴۲. خریداری. وقتیکه برای خرید بطرف بازار روانه می‌شدم در کیسه‌ام تقریباً ۱۰ روبل بصورت اسکناس‌های یک‌روبلی و سکه‌های ۲۰ کوپکی داشتم. پس از اینکه به خانه برگشتم در کیسه‌ام تعداد اسکناس‌های یک‌روبلی با تعداد اولیهٔ سکه‌های ۲۰ کوپکی، و تعداد سکه‌های ۲۰ کوپکی با تعداد اولیهٔ اسکناسهای یک‌روبلی برابر بود.

و اما از جمع کل پولی که قبل از خرید داشتم در کیسه‌ام یک سوم آن باقی ماند.

چقدر پول برای خریداری خرج شد؟

شرح حل معماهای ۳۱ — ۴۲

۳۱. پس از آنکه نصف ریسمان را مادر گرفت ۱/۲ آن باقی ماند. بعد از برادر بزرگ ۱/۴، بعد از پدر ۱/۸، و بعد از خواهر ۳/۴۰ = ۳/۵ × ۱/۸ باقی ماند. در صورتیکه ۳/۴۰ طول اولیه ریسمان ۳۰ سانتی‌متر است پس طول اولیه مساویست با ۴۰۰ = ۳/۴۰ : ۳۰ سانتی‌متر یا ۴ متر.

۳۲. در آوردن سه جوراب کافیست زیرا دو تا از آنها حتماً از یک رنگ میباشد. ولی در مورد دستکش موضوع آنقدر ساده نیست زیرا علاوه بر اینکه رنگ مختلف دارد نصف تعدادش دست‌راستی و نصف دیگر دست‌چپی است. در این مورد درآوردن ۲۱ دستکش کافیست. ولی اگر کمتر از ۲۱ دستکش مثلا ۲۰ عدد در آورده شود احتمال دارد که تمام آنها از یک دست باشد (مثلا ده دستکش قهوه‌ای و ده دستکش سیاه برای دست چپ).

۳۳. واضح است که بعد از همه موئی میریزد که از همه جوانتر است یعنی موئی که یک روز از عمرش میگذرد.

حال ببینیم پس از چه مدتی نوبت به ریختن آن میرسد. در ماه اول از تعداد ۱۵۰۰۰۰ موئی که امروز در سر وجود دارد ۳ هزار، در دو ماه اول ۶ هزار، در سال اول ۳۶۰۰۰ = ۱۲ × ۳۰۰۰ تار مو میریزد. بدینترتیب تا اینکه آخرین موی امروزی از سر بریزد بیش از چهار سال و اندی سپری میگردد. بدینترتیب حد متوسط عمر موی سر انسان را تعیین نمودیم: کمی بیش از ۴ سال.

۳۴. عدهٔ بسیاری بدون تامل جواب میدهند: ۱۰۰ روبل. این جواب درست نیست زیرا در آنصورت حقوق اصلی نه ۱۰۰ روبل بلکه فقط ۷۰ روبل بیشتر از فوق‌العاده خواهد بود.

این مسئله را باید بطور ذیل حل نمود. ما میدانیم که هرگاه ۱۰۰ روبل به حقوق فوق‌العاده علاوه نمائیم حقوق اصلی را حاصل میکنیم. به این دلیل هرگاه ۱۰۰ روبل به ۱۳۰ روبل علاوه کنیم دو حقوق اصلی تشکیل میگردد: ۲۳۰ = ۱۰۰ + ۱۳۰ یعنی دو برابر حقوق اصلی، ۲۳۰ روبل را تشکیل میدهد. از اینجا نتیجه میشود که حقوق اصلی بدون فوق‌العاده ۱۱۵ روبل‌است اما حقوق فوق‌العاده، مابقی مبلغ ۱۳۰ روبل یعنی ۱۵ روبل میباشد.

تحقیق میکنیم: حقوق اصلی ۱۱۵ روبل به اندازه ۱۰۰ روبل بیشتر از ۱۵ روبل فوق‌العاده است. شرط مسئله هم عین مطلب را ایجاب میکند.

۳۵. این مسئله از دو لحاظ جالب است: اولا به آسانی میتواند این عقیده را ایجاد نماید که سرعت مطلوب عبارت است از سرعت متوسط بین ۱۰ کیلومتر و ۱۵ کیلومتر در ساعت یعنی $۱۲^۱/_۲$ کیلومتر در ساعت. باسانی میتوان یقین نمود که چنین حدسی درست نیست. حقیقتاً اگر طول مسیر a کیلومتر باشد در آنصورت اسکی‌باز با سرعت ۱۵ کیلولتر در ساعت مدت $\frac{a}{۱۵}$ ساعت، با سرعت ۱۰ کیلومتر در ساعت مدت $\frac{a}{۱۰}$ ساعت، و با سرعت $۱۲^۱/_۲$ کیلومتر در ساعت مدت $\frac{a}{۱۲^۱/_۲}$ یا $\frac{۲a}{۲۵}$ ساعت در حرکت بوده است. در آنصورت باید برابری زیر صدق کند:

$$\frac{۲a}{۲۵}-\frac{a}{۱۵}=\frac{a}{۱۰}-\frac{۲a}{۲۵}$$

زیرا هر کدام از حاصل‌تفریق‌های طرفین مساوی یک ساعت است. با تحویل به a، حاصل میکنیم:

$$\frac{۲}{۲۵}-\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{۱۰}-\frac{۲}{۲۵}$$

یا

$$\frac{٤}{۲۵}=\frac{۱}{۱۵}+\frac{۱}{۱۰}$$

برابری نادرست حاصل شد:

$$\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۵} \text{ یعنی } \frac{۴}{۲۴} \text{ بجای } \frac{۴}{۲۵}$$

ویژگی دوم مسئله اینست که میتواند نه تنها بدون کمک معادله بلکه بطور شفاهی نیز حل گردد.

چنین استدلال میکنیم: هرگاه اسکی‌باز با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت، دو ساعت بیشتر در راه بود (یا کلاً طی مدت مربوط به سرعت ۱۰ کیلومتر در ساعت) در آنصورت او فاصلهٔ ۳۰ کیلومتر دورتر از فاصلهٔ واقعی را طی مینمود. ما میدانیم که در ظرف یک ساعت او ۵ کیلومتر بیشتر طی میکند، پس او $۶=۳۰/۵$ ساعت در راه میبود. از اینجا مدت راهپیمائی با سرعت ۱۵ کیلومتر در ساعت تعیین میگردد: $۴=۲-۶$ ساعت. در عین حال، فاصلهٔ طی شده نیز معلوم میشود: $۶۰=۴\times۱۵$ کیلومتر.

اکنون بآسانی میتوان دریافت که با چه سرعتی باید اسکی‌باز بدود تا سر ظهر به مقصد برسد یا بعبارت دیگر ۵ ساعت در راه باشد:

$$۱۲=۶۰/۵ \text{ کیلومتر در ساعت}$$

درستی این جواب را بآسانی میتوان آزمایش کرد.

۳۶. این مسئله را میتوان بدون توسل به معادله به چند طریق حل نمود.

اینک طریقهٔ اول. کارگر جوان در ظرف ۵ دقیقه $۱/۴$ راه، و کارگر مسن $۱/۶$ راه را طی میکند یعنی کمتر از کارگر جوان باندازهٔ:

$$\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

چون کارگر مسن $۱/۶$ راه از کارگر جوان جلو افتاده است لذا جوان پس از

$$\frac{۱}{۶}:\frac{۱}{۱۲}=۲$$

فاصلهٔ پنج دقیقه‌ای یعنی پس از ۱۰ دقیقه باو میرسد.

طریقهٔ دوم ساده‌تر است. جهت طی نمودن تمام راه، کارگر مسن ۱۰ دقیقه بیشتر از جوان لازم دارد. هرگاه پیرمرد ۱۰ دقیقه قبل از جوان از خانه حرکت کند هر دو همزمان به کارخانه میرسند. هرگاه کارگر سالخورده فقط ۵ دقیقه پیش از جوان حرکت کند آنگاه جوان درست در نیمه‌راه یعنی پس از ۱۰ دقیقه باو میرسد (تمام راه را کارگر جوان در ۲۰ دقیقه پشت سر میگذارد).

حل‌های دیگری نیز از طریق علم حساب امکان‌پذیر است.

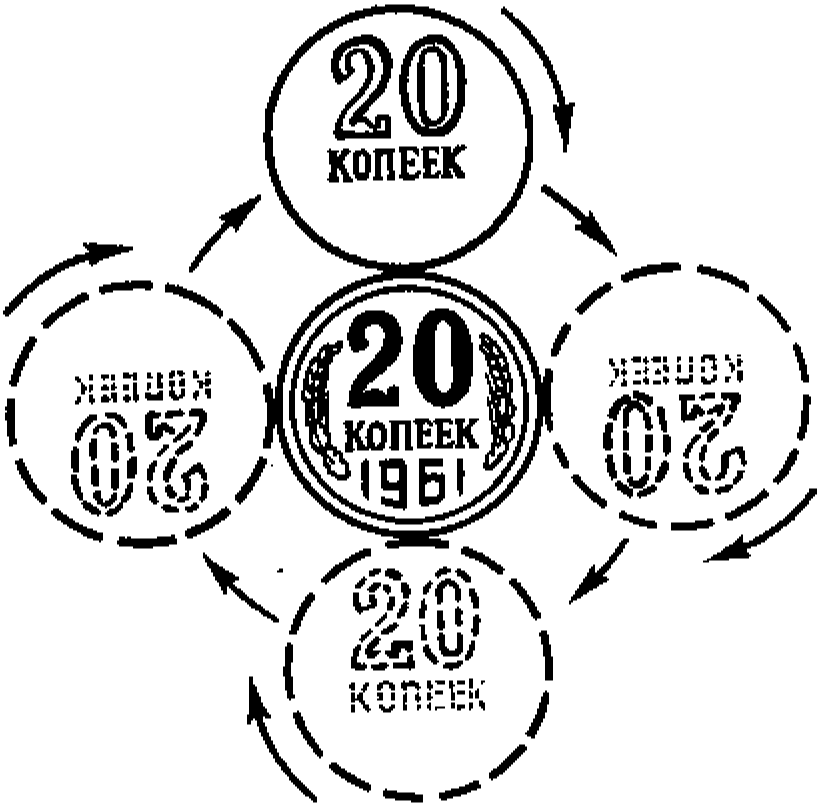
۳۷. طریق غیر استاندارد حل این مسئله بشرح زیر است. قبل از همه این سؤال را مطرح میکنیم که چطور باید ماشین‌نویس‌ها کار را بین خود تقسیم نمایند تا همزمان آنرا تمام کنند؟ (واضح است که تنها بشرط عدم وقفه، کار در کوتاه‌ترین مدت انجام خواهد شد.) چون ماشین‌نویس مجرب $1\frac{1}{2}$ مرتبه سریعتر از ماشین‌نویس کم‌تجربه ماشین‌نویسی میکند لذا واضح است که سهم اولی باید $1\frac{1}{2}$ بار از سهم دومی بیشتر باشد، در آنصورت هر دوی آنها همزمان کار را بانجام میرسانند. از اینجا نتیجه میشود که اولی باید $\frac{3}{5}$، و دومی $\frac{2}{5}$ گزارش را بگیرد.

مسئله تقریباً حل شده است. چیزی که میماند، باید پیدا کرد ماشین‌نویس اولی $\frac{3}{5}$ کار را در ظرف چه مدتی بپایان میرساند. ما میدانیم که تمام کار را او میتواند در ظرف ۲ ساعت اجراء کند پس $\frac{3}{5}$ کار را در ظرف $2 \times \frac{3}{5} = 1\frac{1}{5}$ ساعت انجام میدهد.

در همین مدت ماشین‌نویس دومی نیز باید کارش را بانجام برساند.

بدینترتیب کوتاه‌ترین مدتی که طی آن ماشین‌نویس‌ها باهم میتوانند گزارش را ماشین‌نویسی کنند مساویست به یک ساعت و ۱۲ دقیقه.

راه حل دیگری را نیز میتوان پیشنهاد نمود. ماشین‌نویس اولی طی ۶ ساعت میتوانست گزارش را سه بار، و ماشین‌نویس دومی در همین مدت آنرا دو بار ماشین‌نویسی کند. یعنی آنها متفقاً در ظرف ۶ ساعت میتوانستند ۵ مرتبه این گزارش را ماشین‌نویسی



شکل ۲۹. سکهٔ متحرک در حالیکه بدور سکهٔ ثابت میچرخد بجای یک دور دو دور میزند.

نمایند (یعنی میتوانستند تعداد صفحه‌های ۵ مرتبه بیشتر از تعداد صفحات گزررش را ماشین‌نویسی کنند). آنگاه برای ماشین‌نویسی نمودن گزارش آنها ۵ بار کم‌تر از ۶ ساعت وقت لازم دارند یعنی ۶ ساعت تقسیم بر ۵ = ۱ ساعت و ۱۲ دقیقه.

۳۸. اگر شما فکر میکنید که چرخ دندهٔ کوچک سه بار میچرخد اشتباه میکنید: آن بجای سه دور چهار دور میزند.
برای اینکه بتوان بخوبی موضوع را درک نمود دو سکهٔ یکسان، مثلاً دو سکهٔ ۲۰ کوپکی را روی یک ورق کاغذ شفاف مانند شکل ۲۹ در برابر خود بگذارید. سکهٔ پائینی را با دست در جا نگه داشته و سکه بالائی را بر محیط آن چرخ بدهید. شما یک چیز غیر مترقبه را ملاحظه میکنید: در اثنائی که سکهٔ بالائی نصف محیط سکهٔ پائینی را طی میکند و در قسمت پائین قرار میگیرد یک دور کامل را بدور محور خود انجام میدهد. این ادعا را ارقام روی سکه تائید میکند. و در یک

دور کامل در حول محیط سکهٔ ساکن، سکهٔ متحرک بجای یک دور دو دور در حول محور خود میچرخد.

بطور عمومی وقتیکه یک جسم در مسیر دایره حرکت میکند یک دور بیشتر از آنچه ظاهراً بنظر میرسد، انجام میدهد. به همین سبب کرهٔ زمین نیز ضمن چرخش بدور خورشید بجای ۳۶۵ و یک ربع، ۳۶۶ و یک ربع مرتبه بدور محور خود میچرخد هرگاه چرخش را نه نسبت به خورشید بلکه نسبت به ستارگان در نظر بگیریم. اکنون شما میفهمید چرا شبانه‌روز ستاره‌ای نسبت به شبانه‌روز شمسی کوتاه‌تر است.

۳۹. حل این مسئله از طریق علم حساب نسبتاً پیچیده است ولی هرگاه به جبر متوسل شویم و معادله تشکیل دهیم آنگاه حل مسئله ساده میشود. عدد مطلوب نشان‌گر سن را به حرف x نشان میدهیم. در اینصورت سن پس از سه سال $x+۳$، و سن در سه سال قبل $x-۳$ میباشد. معادلهٔ ذیل را داریم:

$$۳(x+۳)-۳(x-۳)=x$$

و پس از حل آن دریافت میکنیم $x=۱۸$. یعنی دوستدار معمی اکنون ۱۸ سال دارد.

تحقیق میکنیم: پس از سه سال او ۲۱ ساله خواهد بود در صورتیکه سه سال پیش او ۱۵ ساله بود. تفاضل

$$۳\times ۲۱-۳\times ۱۵=۶۳-۴۵=۱۸$$

با سن کنونی دوستدار معمی برابر است.

۴۰. این مسئله مانند مسئله قبلی بکمک معادلهٔ ساده‌ای حل میگردد. هرگاه سن پسر اکنون مساوی به x سال باشد آنگاه سن پدر وی مساوی به $۲x$ است. ۱۸ سال قبل سن هر کدام آنها ۱۸ سال کمتر بود یعنی پدر $۲x-۱۸$ ساله و پسر $x-۱۸$ ساله بود. ضمناً میدانیم که در آنزمان سن پدر سه بار بیشتر از پسر بود:

$$۳(x-۱۸)=۲x-۱۸$$

پس از حل این معادله دریافت میکنیم $x=۳۶$. یعنی اکنون سن پسر ۳۶، و سن پدر وی ۷۲ سال است.

۴۱. فرض کنیم در آغاز در پیمانهٔ اول x گرم جوهر نمک، و در پیمانهٔ دوم x گرم آب موجود بود. پس از ریختن اول، در پیمانهٔ اول $(x-۲۰)$ گرم جوهر نمک، و در پیمانهٔ دوم $(x+۲۰)$ گرم جوهر نمک و آب با هم حاصل گردید. پس از ریختن دوم، در پیمانهٔ دوم $\frac{۱}{۳}(x+۲۰)$ گرم مایع باقی مانده و در پیمانهٔ اول

$$x-۲۰+\frac{۲}{۳}(x+۲۰)=\frac{۵x-۲۰}{۳}$$

گرم مایع جمع میشود. چون میدانیم که مقدار مایع در پیمانهٔ اول چهار بار کمتر از پیمانهٔ دوم شد لذا

$$\frac{۴}{۳}(x+۲۰)=\frac{۵x-۲۰}{۳}$$

و از اینجا $x=۱۰۰$ یعنی در هر پیمانه ۱۰۰ گرم مایع وجود داشت.

۴۲. تعداد اولیهٔ اسکناس‌های یک‌روبلی را به x، و تعداد اولیهٔ سکه‌های ۲۰ کوپکی را به y نشان میدهیم. در اینصورت هنگام رفتن به بازار در کیسه‌ام

$$(۱۰۰x+۲۰y) \text{ کوپک}$$

موجود بود*.

پس از بازگشت، در کیسه‌ام

$$(۱۰۰y+۲۰x) \text{ کوپک}$$

وجود داشت.

---

* یک روبل ۱۰۰ کوپک است (مترجم).

میدانیم که مبلغ اخیرالذکر سه بار کمتر از مبلغ اولیه است و بنا بر این،

$$۳(۱۰۰y+۲۰x)=۱۰۰x+۲۰y$$

این عبارت را ساده‌تر ساخته و حاصل میکنیم:

$$x=۷y$$

هرگاه $y=۱$، آنگاه $x=۷$. با این فرض، مبلغ اولیه بایستی ۷ روبل و ۲۰ کوپک باشد ولی در این صورت شرط مسئله («تقریباً ۱۵ روبل») برآورده نشده است.

حال $y=۲$ را آزمایش میکنیم. در اینصورت $x=۱۴$، و مبلغ اولیه ۱۴ روبل و ۴۰ کوپک میباشد. این رقم با شرط مسئله مطابقت کامل دارد.

هرگاه $y=۳$ فرض شود آنگاه مبلغ زیاده از حد، ۲۱ روبل و ۶۰ کوپک حاصل میشود.

بنا بر این، یگانه جواب مناسب ۱۴ روبل و ۴۰ کوپک است. پس از خریداری، ۲ اسکناس یک‌روبلی و ۱۴ سکهٔ ۲۰ کوپکی یعنی $۲۰۰+۲۸۰=۴۸۰$ کوپک باقی میماند و این مبلغ حقیقتاً یک سوم مبلغ اولیه میباشد ($۱۴۴۰/۳=۴۸۰$).

مبلغ خرج شده مساویست به $۱۴۴۰-۴۸۰=۹۶۰$ یعنی هزینهٔ خریداری اجناس ۹ روبل و ۶۰ کوپک بوده است.

فصل چهارم

آیا شمردن را بلدید؟

۴۳. آیا شمردن را بلدید؟ شاید این سوءال برای اشخاص بزرگتر از سه سال تحقیرآمیز بنظر برسد. که نمیتواند شمارش کند؟ برای بزبان آوردن پی در پی کلمات «یک»، «دو»، «سه» هنر خاصی ضرور نیست. معهذا من یقین دارم که شما همیشه از عهدهٔ این کار بظاهر ساده بر نمی‌آئید. مسئله به موضوعی که باید شمرده شود بستگی دارد. شمردن تعداد میخ‌ها در قوطی کار مشکلی نیست. ولی فرض کنید در قوطی نه تنها میخ بلکه پیچ هم با آن مخلوط باشد. باید تعداد میخ‌ها و پیچ‌ها در قوطی بطور علیحده تعیین شود. در اینصورت شما چطور عمل میکنید؟ میخ و پیچ را از هم جدا نموده و سپس میشمارید؟

مسئله مشابهی در برابر زن خانه‌دار عرض اندام میکند هنگامیکه میخواهد البسه و رخت‌ها را قبل از دادن به رخت‌شوئی شمارش کند. وی اول تمام رختها را بر حسب نوع از هم جدا میکند: پیراهن‌ها را یک طرف، حوله‌ها را طرف دیگر و روبالش‌ها را در جای سومی میگذارد. تنها پس از اجرای این عمل خسته کننده شروع به شمارش هر قسمت مینماید.

این طرز شمردن در حکم بلد نبودن شمارش است! زیرا چنین شیوهٔ شمارش اشیای گوناگون نامناسب، خسته کننده و گاهی هم امکان‌ناپذیر است. در صورت شمردن میخ و رخت میتوان آنها را بصورت دسته‌های مجزا از هم جدا کرد. ولی خود را در جای جنگلبانی قرار دهید که باید تعداد درختان کاج، صنوبر، غان و اشنک را در یک هکتار زمین بشمارد. در این مورد، تقسیم‌بندی مقدماتی درختان برحسب نوع به گروه‌های جداگانه ممکن نیست. پس مگر در اینصورت شما اول درختان کاج، بعد

درختان صنوبر، سپس درختان غان و سرانجام درختان اشنگ را میشمارید؟ چهار مرتبه قطعه جنگل‌را دور میزنید؟

آیا طریقه‌ای وجود ندارد که این کار در یک گشت انجام گردد؟ آری چنین طریقه‌ای وجود دارد و کارکنان جنگل از قدیم‌الایام از آن استفاده میکنند. در مثال میخ و پیچ نشان میدهم که راز این طریقه در چه نهفته است.

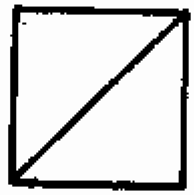
برای اینکه بتوانید تعداد میخ‌ها و پیچ‌های داخل قوطی را بدون جدا کردن آنها به قسمت‌های علیحده بشمارید یک مداد و یک ورق کاغذ را گرفته و طبق نمونهٔ ذیل جدولی رسم کنید.

میخ	پیچ

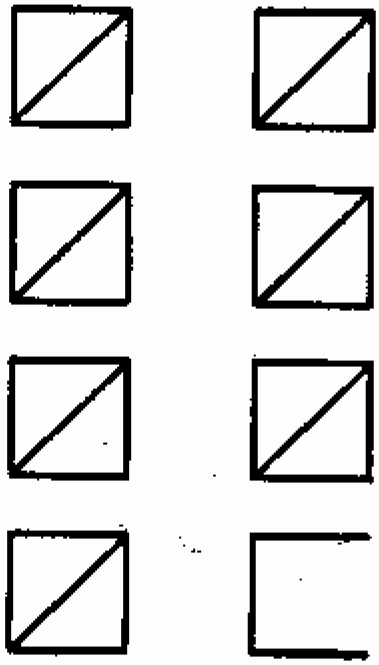
بعد شروع به شمارش نمائید. از قوطی هر چه که بدستتان آمد بردارید. اگر میخ بود در ستون میخ یک خط میکشید و هرگاه پیچ بود در ستون پیچ عین عمل را اجراء مینمائید. بار دوم از قوطی یک شیيء را برمیدارید و به همان ترتیب عمل میکنید. بعد بار سوم یک شیيء را از قوطی برمیدارید و به همین‌ترتیب تا وقتیکه قوطی خالی شود. بالاخره تعداد خطوطی را که در ستون میخ‌ها و پیچ‌ها رسم نموده‌اید حساب میکنید و بدینترتیب تعداد میخ‌ها و پیچ‌ها را بدست می‌آورید.

هرگاه خطوط را بطور ساده زیر یکدیگر نگذاریم بلکه پنج پنج خط بصورت شکلی که در شکل ۳۰ نشان داده شده است جمع گردد در آنصورت محاسبهٔ آنها ساده‌تر و سریعتر میشود.

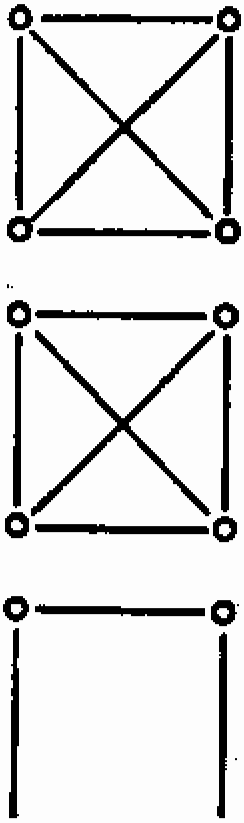
بهتر است اگر اینگونه مربعات جفت جفت گروه‌بندی شوند یعنی پس از ۱۰ خط اولی خط یازدهم در سطر جدید قرار گیرد



شکل ۳۰. خطها را باید بصورت گروههای پنج‌خطی در آورد.



شکل ۳۱. نتایج شمارش را اینطور ترتیب میدهند.



شکل ۳۲. هر مربع کامل بمعنی ۱۰ است.

و هنگامیکه در سطر دوم دو مربع حاصل گردید مربع بعدی در سطر سوم رسم شود و الی آخر. در آنصورت خطوط تقریباً بطوریکه در شکل ۳۱ نشان داده شده است، قرار میگیرند.

شمردن خطوطیکه بدین ترتیب ترسیم شده‌اند فوق‌العاده آسان است: شما فوراً میبینید که در اینجا سه دهه تمام، یک پنج تائی و سه خط دیگر هست یعنی جمعاً ۳۸ = ۳ + ۵ + ۳۰.

میتوان شکل‌های دیگری را بکار برد. بطور مثال اکثراً از علامتی استفاده مینمایند که هر مربع کامل آن بمعنی عدد ۱۰ میباشد (شکل ۳۲).

هنگام شمردن درختان انواع مختلف در قطعه‌ای از جنگل باید به همین ترتیب عمل نمائید منتهی در اینصورت باید روی کاغذ شما بجای دو ستون جدول چهار ستون ترسیم گردد. در اینصورت مناسب‌تر است اگر جدول نه به شکل عمودی بلکه

کاج	
صنوبر	
غان	
اشنک	

شکل ۲۳. فرم مخصوص شمارش درختان جنگل.

به شکل افقی ترسیم شود یعنی قبل از شمردن، جدول مانند شکل ۲۳ میباشد.

پس از پایان محاسبه کاغذ شما تقریباً بصورت شکل ۲٤ در می‌آید.

در اینجا دریافت حاصل‌جمع نهائی خیلی آسان است:

کاج . . . . ٥۲ غان ٤٦
صنوبر . . . . ۷۹ اشنک ۳۷

برای تنظیم لیست البسه و رخت خواب، خانم خانه‌دار میتواند بهمین ترتیب عمل کند و کار و وقت کمتری مصرف نماید.

هرگاه برای شما لازم آید که گیاهان یک قطعه مرغزار را برحسب نوع و تعداد بشمارید شما میتوانید به همین ترتیب در زمان نسبتاً کوتاهی از عهدهٔ این کار بر آئید. روی تکه کاغذی جدولی رسم نموده و انواع نباتاتی را که بنظر شما رسید، هر یک در سطر خود، در آن درج میکنید ضمناً چند سطر خالی نیز میگذارید تا هرگاه نباتات جدیدی را ببینید در آنجا بگنجانید. شما شمارش را

کاج	
صنوبر	
غان	
اشنک	

شکل ۳٤. فرم پر شده در نتیجهٔ شمارش.

گل قاصد	
آلاله	
بارهنك	
گندمك	
خاکشیر تلخ	

شکل ۳۰. چگونه شمارش گیاهان قطعه‌ای از مرتع را باید آغاز نمود.

مثلاً با چنین جدولی که در شکل ۳۰ نشان داده شده است شروع میکنید.

بعد همان عملی را که ضمن شمارش درختان قطعهٔ جنگل اجراء نمودید تکرار میکنید.

۴۴. چرا باید درختان جنگل را شمارش کرد؟ این امر برای ساکنان شهر ناممکن بنظر میرسد. در رمان «آنا کارنینا» نوشتهٔ لئون تولستوی، لوین متخصص زراعت از خویشاوندش که در رشتهٔ زراعت وارد نیست و میخواهد جنگلش را بفروش برساند سؤال میکند:

— آیا تو تعداد درختان را شمارش کرده‌ای؟ دوستش با تعجب جواب میدهد:

— چطور میتوان تعداد درختان را شمرد؟ عقل عالی گرچه تواند ریگها و انوار سیارات را بشمارد...

— بلی، عقل عالی ریابینین (تاجر) میتواند. و هیچ دهقان بدون شمارش خریداری نمیکند.

درختان جنگل را برای تعیین مترهای مکعب چوب آن میشمارند. بجای درختان تمام جنگل، تعداد درختان قطعه‌ای از آن را مثلاً در یک ربع یا نیم هکتار شمارش مینمایند و این قطعه را طوری انتخاب میکنند که درختان آن از لحاظ انبوهی، تعداد انواع، ضخامت و ارتفاع حد متوسط جنگل را تشکیل بدهند. برای انتخاب موفقانهٔ چنین قطعهٔ آزمایشی البته چشمی مجرب ضرور است.

هنگام شمارش دانستن تعداد درختان در هر نوع کافی نیست بلکه بعلاوه باید تعداد تنه‌ها را در هر ضخامت نیز دانست: در ضخامت ۲۵ سانتی‌متر، در ضخامت ۳۰ سانتی‌متر، در ضخامت ۳۵ سانتی‌متر و غیره. باین لحاظ در فرم شمارش برخلاف مثال ساده‌مان بجای چهار سطر خیلی زیادتر خواهد بود. حالا تصور نمائید که هرگاه تعداد درختان بطریق معمولی شمرده میگردید چند بار باید جنگل را دور میزدید.

بطوریکه ملاحظه میکنید شمارش فقط زمانی کار ساده‌ایست که اشیای متجانس را شمارش مینمایند. ولی هرگاه لازم بیافتد که اشیای غیرمتجانس را شمارش نمائید آنگاه باید از طریقه‌ایکه در فوق تشریح گردید و بسیاری اشخاص از موجودیت آن حتی خبری ندارند، استفاده شود.

فصل پنجم

معمی‌های عددی

۴۵. صد روبل در برابر پنج روبل. یکی از محاسبین واریته در موقع نمایشات خود پیشنهاد وسوسه‌آمیز ذیل را به حاضرین ارائه مینمود:

— در حضور شاهدان اعلام میدارم به هر کسی که بیست سکهٔ ۵۰، ۲۰ و ۵ کوپکی بمبلغ ۵ روبل بمن بدهد صد روبل میدهم. ۱۰۰ روبل در برابر ۵ روبل! که میل دارد؟

همه ساکت می‌شدند.

تمام حاضرین بفکر می‌افتادند. مدادها روی صفحات دفترچه‌های یادداشت بحرکت میافتاد ولی هیچ کس جواب نمی‌داد.

— من میبینم که از نظر حاضران پنج روبل در برابر صد روبل خیلی زیاد است. من آماده هستم دو روبل تخفیف بدهم و قیمت پائینتری را تعیین میکنم: بیست سکهٔ مذکور بمبلغ سه روبل. صد روبل در برابر سه روبل میپردازم! کسانیکه میل دارند بفرمایند!

ولی هیچکسی حاضر نمی‌شد. حاضرین برای استفاده از این فرصت عجله نمیکردند.

— آیا ۳ روبل هم گران است؟ خب، مبلغ را باز هم یک روبل کم میکنم. بیست سکهٔ نامبرده‌را تنها بمبلغ دو روبل بدهید و من فوراً صد روبل میپردازم.

چون هیچکسی حاضر به چنین مبادله نمی‌گردید، محاسب ادامه میداد:

— شاید شما با خود پول سیاهی نداشته باشید؟ خجالت نکشید من به شما نسیه میدهم. تنها شرطش این است که صورت حسابی برحسب سکه‌های مذکور بمن بدهید!

۴۶. هزار. آیا میتوانید عدد ۱۰۰۰ را با هشت رقم یکسان بیان نمائید؟
ضمناً علاوه بر ارقام میتوانید از علایم عملیات نیز استفاده نمائید.

۴۷. بیست و چهار. عدد ۲۴ را میتوان با سه هشت‌تائی بطور خیلی ساده بیان نمود: ۸ + ۸ + ۸. آیا میتوانید با سه رقم یکسان دیگر باین هدف برسید؟ این مسئله چند جواب دارد.

۴۸. سی. عدد سی را میتوان به آسانی با سه رقم پنج بیان نمود: ۵ × ۵ + ۵. اجرای این عمل با سه رقم یکسان دیگر مشکلتر است.
آزمایش کنید. شاید شما بتوانید چند جواب پیدا نمائید.

۴۹. ارقام غایب. در این مثال عمل ضرب بیش از نصف ارقام با علامت ستاره عوض شده است.

```
   *۱*
×  ۳*۲
  ----
   *۳*
  ۳*۲*
+ *۲*۵
 -----
 ۱*۸*۳۰
```

آیا شما میتوانید ارقام غایب را تعیین نمائید؟

۵۰. کدام اعداد؟ اینک یک مسئلهٔ مشابه دیگر. مطلوبست تعیین اعداد ضرب شونده در مثال زیر:

```
   **۵
×  ۱**
  ----
  ۲**۵
 ۱۳*۰
+ ***
 -----
 ۴*۷۷*
```

۵۱. کدام عدد را تقسیم نموده‌اند؟ ارقام غایب را در این مثال تقسیم تعیین نمائید:

```
 *۲*۵* | ۳۲۵
-***   |-----
 ----- | ۱**
 *۰**
-*۹**
 -----
  *۵*
 -*۵*
  ----
```

۵۲. تقسیم بر ۱۱. عدد نه‌رقمی‌ای را بنویسید که ارقام مکرر در آن وجود نداشته (تمام ارقام آن مختلف باشد) و بدون باقیمانده بر ۱۱ قابل تقسیم باشد.
بزرگترین این اعداد را بنویسید.
کوچکترین این اعداد را بنویسید.

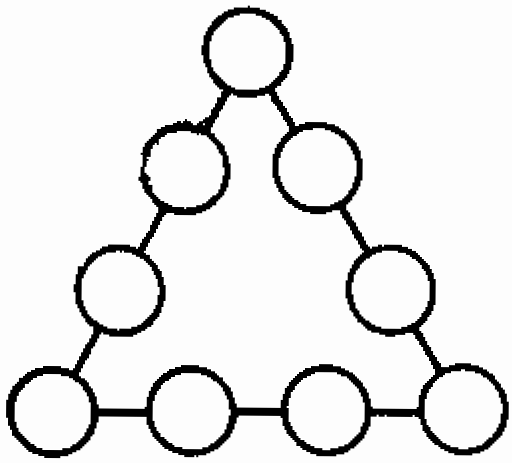
۵۳. حالت تعجب‌آور ضرب. این حالت ضرب دو عدد را در نظر بگیرید:

$$۴۸ \times ۱۵۹ = ۷۶۳۲$$

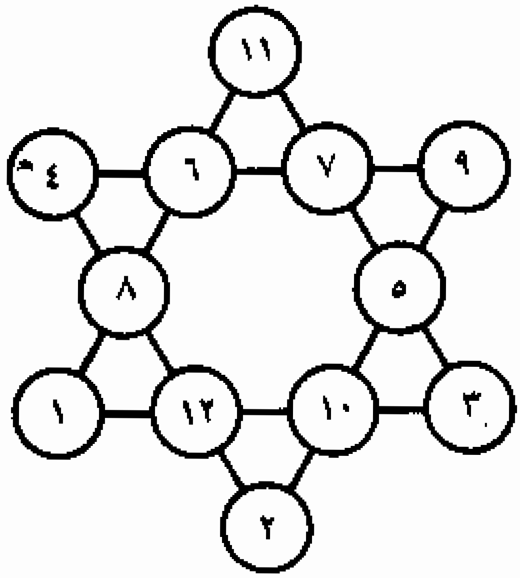
این حالت ضرب باین خاطر جالب است که هر نه رقم مخالف صفر در آن یک بار آمده است.
آیا میتوانید چند مثال مشابه دیگر را بیاورید؟ تعداد این مثالها، هرگاه وجود داشته باشند، چند است؟

۵۴. مثلث عددی. در حلقه‌های این مثلث (شکل ۳۶) هر نه رقم مخالف صفر را طوری جا دهید که حاصل‌جمع هر ضلع مساوی بیست باشد.

۵۵. یک مثلث عددی دیگر. تمام ارقام مخالف صفر را در حلقه‌های همان مثلث (شکل ۳۶) طوری قرار دهید که حاصل‌جمع آنها در هر ضلع مساوی ۱۷ باشد.
۵۶. ستارهٔ سحرآمیز. ستارهٔ شش‌پری که در شکل ۳۷ نشان داده شده است دارای خاصیت «سحرآمیز» میباشد: حاصل‌جمع هر شش ضلع عددی آن یکی میباشد:



شکل ۳۶. ۹ رقم را
در حلقه‌ها بگذارید.



شکل ۳۷. ستارهٔ عددی
شش‌پر.

۱۱ + ۶ + ۸ + ۱ = ۲۶
۱۱ + ۷ + ۵ + ۳ = ۲۶
۱ + ۱۲ + ۱۰ + ۳ = ۲۶

۴ + ۶ + ۷ + ۹ = ۲۶
۴ + ۸ + ۱۲ + ۲ = ۲۶
۹ + ۵ + ۱۰ + ۲ = ۲۶

ولی حاصل‌جمع اعدادیکه در رأس‌های ستاره قرار دارند فرق دارد:

۴ + ۱۱ + ۹ + ۳ + ۲ + ۱ = ۳۰

آیا میتوانید این ستاره را تکمیل کنید یعنی اعداد را طوری در حلقه‌ها جابجا نمائید که نه تنها حاصل‌جمع اضلاع یکی باشد (۲۶) بلکه حاصل‌جمع اعداد رأس‌های ستاره نیز همان باشد (۲۶)؟

شرح حل معمی‌های ۴۵ — ۵۶

۴۵. هر سه مسئله غیر قابل حل است. محاسب میتوانست بدون هراس برای حل آنها هر جایزهٔ دلخواهی را اعلام نماید. برای تحقیق این موضوع به زبان جبر مراجعه نموده و هر سه مسئله را یکی بعد از دیگری بررسی میکنیم.

پرداخت ۵ روبل. فرض میکنیم که چنین پرداختی امکان‌پذیر باشد و برای این منظور x سکهٔ ۵۰ کوپکی، y سکهٔ ۲۰ کوپکی

و z سکهٔ ٥ کوپکی لازم آید. در اینصورت معادلهٔ ذیل را حاصل میکنیم:

$$50x + 20y + 5z = 500$$

بعد از تحویل به پنج، دریافت مینمائیم:

$$10x + 4y + z = 100$$

علاوه بر آن چون بنا به فرض، تعداد کل سکه‌ها مساوی بیست است لذا x، y و z در معادلهٔ دیگری نیز با هم مربوط اند:

$$x + y + z = 20$$

با تفریق این معادله از معادلهٔ اول، حاصل میکنیم:

$$9x + 3y = 80$$

با تقسیم بر سه، معادله را بصورت زیر در میاوریم:

$$3x + y = 26^2/_3$$

اما $3x$ که سه برابر تعداد سکه‌های ٥٠ کوپکی است البته عددی صحیح میباشد. تعداد سکه‌های ٢٠ کوپکی، y، نیز صحیح است. حاصل‌جمع دو عدد صحیح نمیتواند عدد کسری ($26^2/_3$) باشد. بطوریکه میبینید فرضیهٔ ما در بارهٔ قابل حل بودن این مسئله منجر به تناقض میشود. پس مسئله قابل حل نیست.

به همین ترتیب خواننده قانع میشود که دو مسئله «ارزان شده» یعنی با پرداخت ٣ و ٢ روبل نیز قابل حل نیست. اولی آنها به معادلهٔ

$$3x + y = 13^1/_3$$

و دومی به معادلهٔ

$$3x + y = 6^2/_3$$

منجر میشود. هر دو معادله، با اعداد صحیح قابل حل نیست.

بطوریکه شما ملاحظه میکنید محاسب ضمن پیشنهاد پرداخت مبالغ هنگفت در برابر حل این مسائل به هیچوجه ریسک نمی‌کرد زیرا هیچگاه نمی بایست جایزه را پرداخت کند.

هرگاه بجای ۵، ۳ یا ۲ روبل مثلاً پرداخت ۴ روبل با بیست سکهٔ ۵۰، ۲۰ و ۵ کوپکی تقاضا شده بود در آنصورت مسئله به آسانی حل میشد و تازه هم به هفت طریقهٔ مختلف*.

۴۶. $۸۸۸ + ۸۸ + ۸ + ۸ + ۸ = ۱۰۰۰$

جواب‌های دیگر نیز وجود دارد.

۴۷. اینک دو جواب مسئله:

$$۲۲ + ۲ = ۲۴; \qquad ۳^{۳} - ۳ = ۲۴$$

۴۸. سه جواب را میاوریم:

$$۶ \times ۶ - ۶ = ۳۰; \qquad ۳^{۳} + ۳ = ۳۰; \qquad ۳۳ - ۳ = ۳۰$$

۴۹. ارقام غایب تدریجاً اگر از طریق زیر استدلال کنیم پیدا میشوند.

برای راحتی، سطور را شماره‌بندی میکنیم:

```
     *۱*   ............... I
   × ۳*۲   ............... II
   -----
     *۳*   ............... III
    ۳*۲*   ............... IV
  + *۲*۵   ............... V
  ------
  ۱*۸*۳۰   ............... VI
```

به آسانی میتوان دریافت که ستارهٔ نهائی در سطر III ارقام، صفر است زیرا در آخر سطر VI صفر قرار دارد.

اکنون کمیت ستارهٔ نهائی سطر I را دریافت میکنیم: این رقمی میباشد که حاصل‌ضرب آن در ۲ عددی را میدهد که به صفر ختم میشود و از ضرب نمودن آن در ۳ عددی حاصل میگردد

---

* یکی از جواب‌های ممکنه اینست: ۶ سکهٔ ۵۰ کوپکی، ۲ سکهٔ ۲۰ کوپکی و ۱۲ سکهٔ ۵ کوپکی.

که رقم نهائی آن ۵ است (سطر V). چنین رقمی تنها ۵ میتواند باشد.

بعد از این، واضح است که در پایان سطر IV رقم صفر قرار دارد. (ارقامی را که در جای ماقبل آخر سطور III و VI قرار دارند با هم مقایسه نمائید!)

به آسانی میتوان دریافت که ستارهٔ سطر II رقم ۸ را نشان میدهد زیرا تنها رقم ۸ است که با ضرب در ۱۵ عددی را میدهد که به ۲۰ ختم میشود (سطر IV).

بالاخره کمیت ستارهٔ اول سطر I واضح میشود: این رقم ٤ است زیرا تنها ٤ ضرب در ۸ نتیجه‌ای را میدهد که با ۳ شروع میشود (سطر IV).

اکنون دانستن سایر ارقام مجهول اشکالی ندارد: کافی است اعداد دو سطر اول را که کاملاً مشخص شده است در هم ضرب نمائیم.

در نتیجهٔ نهائی، چنین مثال ضرب را حاصل مینمائیم:

$$\begin{array}{r} \times\ ٤١٥ \\ ٣٨٢ \\ \hline ٨٣٠ \\ ٣٣٢٠ \\ +\ ١٢٤٥ \\ \hline ١٥٨٥٣٠ \end{array}$$

۵۰. با طریقهٔ استدلال مشابه به مسئلهٔ قبلی کمیت ستارگان را در این مسئله نیز دریافت مینمائیم. حاصل میکنیم:

$$\begin{array}{r} \times\ ٣٢٥ \\ ١٤٧ \\ \hline ٢٢٧٥ \\ ١٣٠٠ \\ +\ ٣٢٥ \\ \hline ٤٧٧٧٥ \end{array}$$

۵۱. حالت مطلوب تقسیم این است:

```
 ۵۲۶۵۰ | ۳۲۰
-۳۲۵     ۱۶۲
 ۲۰۱۵
-۱۹۵۰
  ۶۵۰
 -۶۵۰
```

۵۲. برای حل این مسئله باید نشانهٔ قابلیت تقسیم بر ۱۱ را دانست. عدد وقتی بر ۱۱ قابل تقسیم میباشد که تفاوت حاصل‌جمع ارقامیکه در جاهای زوج قرار دارند با مجموع ارقامیکه در جاهای فرد واقع‌اند بر ۱۱ قابل تقسیم، و یا مساوی صفر باشد.

بطور مثال عدد ۹۰۴ ۶۵۸ ۲۳ را آزمایش میکنیم.

حاصل‌جمع ارقامیکه در جاهای زوج قرار دارند:

۳ + ۵ + ۹ + ٤ = ۲۱

حاصل‌جمع ارقامی که در جاهای فرد قرار دارند:

۲ + ۶ + ۸ + ۰ = ۱۶

تفاوت آنها (باید عدد کوچک را از بزرگ تفریق نمود) عبارت است از:

۲۱ − ۱۶ = ۵

این حاصل‌تفریق (۵) بر ۱۱ تقسیم نمیشود لذا عدد داده شده نیز بدون باقیمانده بر ۱۱ قابل تقسیم نیست.

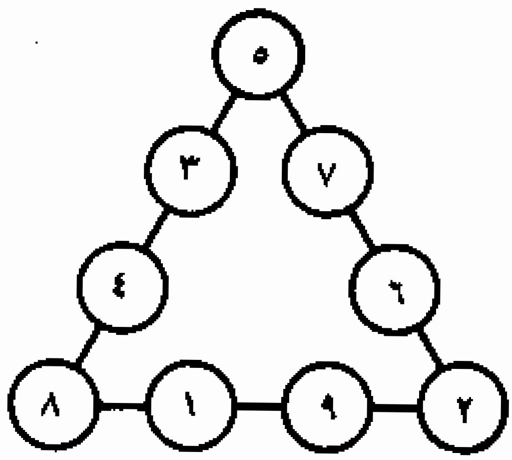
عدد دیگری را آزمایش میکنیم: ۵۳۵ ٤٤ ۳، ۷

۳ + ٤ + ۳ = ۱۰؛ ۷ + ٤ + ۵ + ۵ = ۲۱؛ ۲۱ − ۱۰ = ۱۱

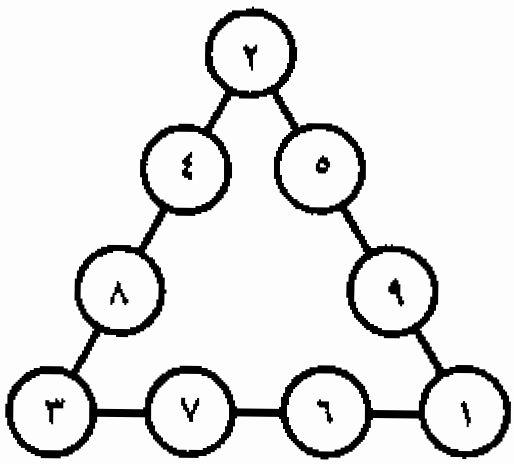
از آنجا که ۱۱ بر ۱۱ قابل تقسیم است عدد آزمایشی نیز مضربی از ۱۱ است.

اکنون بآسانی میتوان دریافت که نه رقم را بچه ترتیبی باید نوشت تا عددی حاصل گردد که مضربی از ۱۱ باشد و شرایط مسئله را برآورده کند.

مثلا ۷۸۶ ۰٤۹ ۳۵۲ را در نظر میگیریم.



شکل ۳۸



شکل ۳۹

آزمایش میکنیم: ۳ + ۲ + ۴ + ۷ + ۶ = ۲۲، ۵ + ۰ + ۹ + ۸ = ۲۲.
تفاوت عبارتست از ۲۲ − ۲۲ = ۰ بنا بر این عددی را که نوشتیم مضربی از ۱۱ است.

بزرگترین این اعداد ۹۸۷ ۶۵۲ ۴۱۳، و کوچکترین آنها ۱۰۲ ۳۴۷ ۵۸۶ است.

۵۳. خوانندهٔ شکیبا میتواند ۹ حالت اینگونه ضرب را پیدا نماید. آنها عبارت اند از

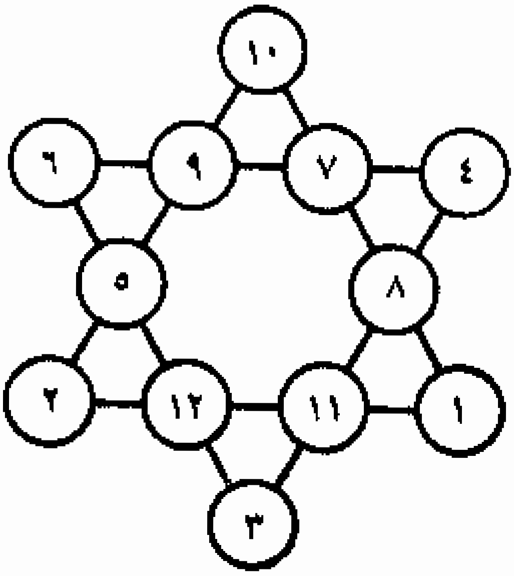
۱۲ × ۴۸۳ = ۵۷۹۶،   ۴۸ × ۱۵۹ = ۷۶۳۲،
۴۲ × ۱۳۸ = ۵۷۹۶،   ۲۸ × ۱۵۷ = ۴۳۹۶،
۱۸ × ۲۹۷ = ۵۳۴۶،   ۴ × ۱۷۳۸ = ۶۹۵۲،
۲۷ × ۱۹۸ = ۵۳۴۶،   ۴ × ۱۹۶۳ = ۷۸۵۲
۳۹ × ۱۸۶ = ۷۲۵۴،

۵۴ — ۵۵. جواب‌ها در اشکال ۳۸ و ۳۹ نشان داده شده‌اند. ارقام وسطی هر ضلع را میتوان با یکدیگر تعویض نمود و از این طریق باز هم یک سلسله جواب را دریافت کرد.

۵۶. برای تسهیل جستجوی موقعیت مطلوب ارقام ملاحظات ذیل را در نظر میگیریم.
حاصل‌جمع اعداد در رأس‌های ستارهٔ مطلوب مساوی ۲۶،

و حاصل‌جمع تمام اعداد ستاره مساوی ۷۸ میباشد. پس حاصل‌جمع اعداد شش‌ضلعی داخلی مساویست با ۵۲ = ۲۶ − ۷۸.

اکنون یکی از مثلثات بزرگ را در نظر میگیریم. حاصل‌جمع اعداد هر ضلع آن مساوی ۲۶ است. حاصل‌جمع هر سه ضلع آن مساویست با ۷۸ = ۳ × ۲۶، ضمناً هر عددیکه در رأس‌های مثلث قرار دارد دو مرتبه تکرار میشود. اما چون حاصل‌جمع سه



شکل ۴۰

جفت داخلی (یعنی حاصل‌جمع اعداد شش‌ضلعی داخلی) بطوریکه میدانیم باید مساوی ۵۲ باشد پس دو برابر حاصل‌جمع اعدادیکه در رأس‌های هر مثلث قرار دارند مساویست به ۲۶ = ۵۲ − ۷۸ و یک برابر آن ۱۳ است.

اکنون میدان جستجو به صورت قابل ملاحظه کوچکتر گردید. بطور مثال ما میدانیم که اعداد ۱۱ و ۱۲ نمیتوانند در رأسهای ستاره قرار گیرند (چرا؟). بنا بر این، آزمایش را میتوان از ۱۰ شروع نمود، ضمناً دفعتاً واضح میگردد که کدام دو عدد باید سایر رأس‌های مثلث را اشغال نمایند: ۱ و ۲.

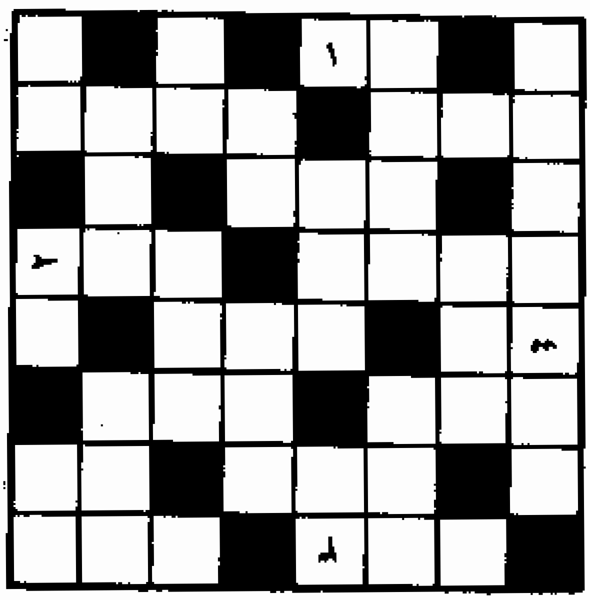
به همین ترتیب پیش رفته و بالاخره موقعیت مطلوب را حاصل میکنیم. این موقعیت در شکل ۴۰ نشان داده شده است.

فصل ششم

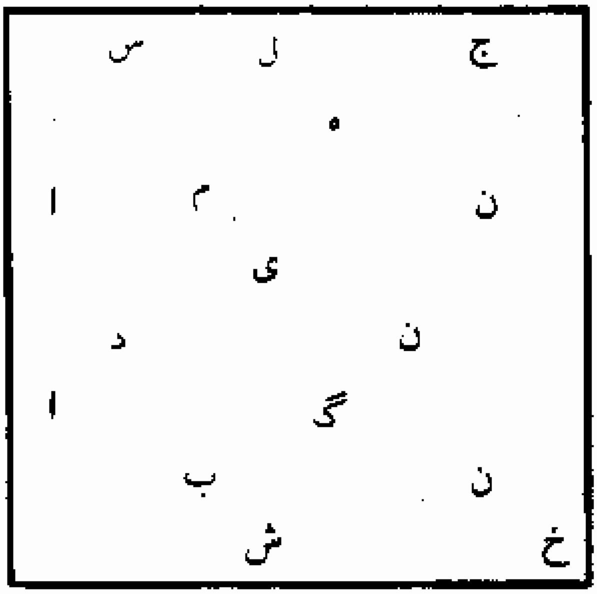
رمزنویسی

۵۷. شبکه. انقلابی مخفی مجبور است طوری یادداشت بردارد و با رفقای خود مکاتبه نماید که هیچ شخص بیگانه نتواند مفهوم نوشته‌ها را درک نماید. برای این منظور از طریق خاص نامه‌نویسی که «رمزنویسی» (یا «مخفی‌نویسی») نام دارد استفاده مینمایند. اصول مختلف رمزنویسی ابداع گردیده است که نه تنها انقلابیون مخفی بلکه دیپلوماتها و نظامیان نیز جهت حفظ اسرار دولتی از آن استفاده میکنند. اکنون راجع به یکی از طرق مکاتبهٔ محرمانه که باصطلاح «شبکه» نامیده میشود توضیحاتی میدهیم. این طریق مکاتبه نسبتاً ساده بوده و پیوند نزدیکی با حساب دارد.

هر کسی که بخواهد از این طریق مکاتبهٔ محرمانه‌ای را داشته باشد باید یک «شبکه» تهیه کند یعنی مربع کاغذی‌ایکه در آن دریچه‌هائی تعبیه شده است.



شکل ۴۱. شبکهٔ ویژهٔ رمزنویسی. (شبکهٔ مشابهی را از کاغذ درست کرده و نوشتهٔ سری شکل ۴۵ را بخوانید.)



شکل ۴۲. شبکه را بر داشته و نوشته‌ها را میبینیم.

نمونهٔ چنین شبکه‌ای را شما در شکل ۴۱ ملاحظه میکنید. دریچه‌ها نه بطور دلخواه بلکه به ترتیب معینی قرار گرفته‌اند که بعداً برایتان واضح میگردد.

فرض کنیم لازم شود نامه‌ای باین مضمون برای رفیقش ارسال کند: جلسهٔ نمایندگان بخش را تشکیل ندهید زیرا کسی این موضوع را به پلیس خبر داد. آنتون.

انقلابی مخفی شبکه را روی ورق کاغذ گذاشته و حروف را یکی بعد از دیگری در دریچه‌های شبکه مینویسد.

چون تعداد دریچه‌ها ۱۶ است پس بار اول فقط قسمتی از نامه جا میگیرد:

جلسهٔ نمایندگان بخش...

پس از برداشتن شبکه، نوشته‌ای را که در شکل ۴۲ نشان داده شده است ملاحظه میکنیم.

البته تا اینجا هیچ رمزی وجود ندارد: هرکس به آسانی میفهمد که موضوع از چه قرار است. ولی این هنوز شروع کار است، نامه به این شکل باقی نمیماند. انقلابی مخفی شبکه را یک چهارم دور در جهت حرکت عقربهٔ ساعت دور میدهد یعنی در همان صفحهٔ کاغذ آنرا به حالتی میاورد که رقم ۲ که قبلاً در طرف چپ قرار داشت حالا در بالا واقع گردد. در حالت فعلی

	ج	ر		ل	ا	س	
ت			ه	ش			
	ن	ک			م	ی	ا
ل			ن	ی			د
	ه	ن			ی	د	
			گ	د			ا
ز	ن	ی			ب	ر	
خ				ش			ا

شکل ۴۳. سپس ۱۶ حرف بعدی را مینویسیم.

شبکه همهٔ حروفیکه قبلاً نوشته شده بود کور میشوند و در دریچه‌ها کاغذ سفید نمایان میشود. در آنجا ۱۶ حرف بعدی اطلاع مخفی را مینویسند. هرگاه اکنون شبکه را برداریم حالتی حاصل میگردد که در شکل ۴۳ نشان داده شده است:

چنین نوشته‌ای را نه تنها شخص بیگانه بلکه نویسندهٔ آن هم نمیتواند بفهمد هرگاه متن اطلاعیه خویشرا فراموش کرده باشد ولی تا حال فقط نصفی از اطلاعیه نوشته شده است و همانا: جلسهٔ نمایندگان بخش را تشکیل ندهید زیرا...

برای نوشتن قسمت بعدی باید باز هم شبکه را یک ربع دور در جهت حرکت عقربهٔ ساعت چرخاند. شبکه همهٔ حروف نوشته شده را پنهان نموده و ۱۶ خانهٔ خالی را باز میکند. این خانه‌ها را چند کلمهٔ دیگر اشغال نموده و نوشته حالت شکل ۴۴ را بخود میگیرد.

بالاخره آخرین دور شبکه طوری انجام میشود که رقم ۴ در قسمت بالا قرار بگیرد و در ۱۶ مربع سفید، باقیماندهٔ یادداشت نوشته میگردد. چون دو خانهٔ آزاد باقی میماند در آن دو حرف دلخواه مثلاً ا و ب نوشته میشود تا جای خالی در نامه موجود نباشد.

نامه به حالت شکل ۴۵ در می‌آید.

س	س	ا	ل	ک	ر	ج	
	ا		ش	ه	ی		ت
ا	ی	م	ن		ک	ن	ی
د		و	ی	ن		م	ل
	د	ی		ض	ن	ه	
ا	ر		د	گ	ع		و
	ر	ب	ا		ی	ن	ز
ا	پ		ش	ه		ب	خ

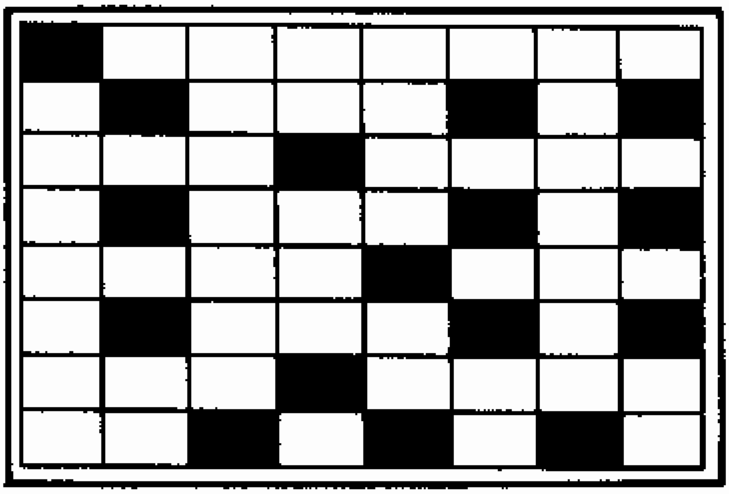
شکل ٤٤. دوباره باید شبکه را چرخاند.

آیا میتوانید از این نامه چیزی سر در آورید؟ بگذار این یادداشت بدست پلیس بیافتد، بگذار پلیس هر قدر میخواهد تصور کند که در این یادداشت اطلاع مهمی نهفته است، مضمون یادداشت را فقط گیرنده میتواند بداند زیرا او مانند فرستنده همان شبکه را دارد.

گیرنده چطور این نامهٔ مخفی را میخواند؟ او شبکهٔ خود را روی متن طوری میگذارد که رقم ۱ در بالا قرار گیرد و تمام

س	س	ا	ل	ک	ر	ج	ل
خ	ا	س	ش	ه	ی	ی	ت
ا	ی	م	ن	ب	ک	ن	ی
د	د	و	ی	ن	ر	م	ل
آ	د	ی	د	ض	ن	ه	ا
ا	ر	ت	د	گ	ع	ن	و
ن	ر	ب	ا	و	ی	ن	ز
ا	پ	ب	ش	ه	ا	ب	خ

شکل ٤٥. نامهٔ سری آماده است.



شکل ٤٦. شبکه‌ای بشکل کارت‌پستال.

حروفی را که در دریچه‌ها دیده میشوند یادداشت مینماید. این، ۱۶ حرف اول اطلاعیه میباشد. بعد شبکه را دور میدهد و در مقابل وی ۱۶ حرف بعدی قرار میگیرند. پس از دور چهارم تمام نامهٔ رمزی خوانده میشود.

بعوض شبکهٔ مربع میتوان از شبکهٔ مستطیل نیز استفاده نمود که شکل کارت پستال را دارد و دریچه‌های آن عریض‌تر میباشند (شکل ٤٦). در دریچه‌های چنین شبکه‌ای بجای حروف جداگانه قسمتی از کلمه و حتی اگر جا باشد تمام کلمه را مینویسند. فکر نکنید که در اینصورت نوشته خوانا تر خواهد شد. هرگز نه! اگرچه هجاها و کلمات جداگانه دیده میشوند ولی با چنان بی‌ترتیبی قرار دارند که سر آن کاملاً مطمئنانه محفوظ میباشد. شبکهٔ مستطیل را اول به یک حالت قرار میدهند، بعد آنرا بر عکس یعنی سرپائین میگذارند، بعد آنرا بطرف چپ دور میدهند و باز هم در دو حالت از آن استفاده مینمایند. در هر حالت جدید، شبکه همهٔ آنچه را که قبلاً نوشته شده بود میپوشاند.

هرگاه تنها یک شبکه وجود میداشت در آنصورت از لحاظ محرمیت استفاده از آن کاملاً بیهوده میبود. البته این یگانه شبکه در دست پلیس هم قرار میداشت و اسرار به زودی افشاء میشد. ولی موضوع این است که تعداد شبکه‌های مختلف فوق‌العاده زیاد است.

۱	۵	۹	۱۳	٤	۳	۲	۱
۲	٦	۱۰	۱٤	۸	۷	٦	۵
۳	۷	۱۱	۱۵	۱۲	۱۱	۱۰	۹
٤	۸	۱۲	۱٦	۱٦	۱۵	۱٤	۱۳
۱۳	۱٤	۱۵	۱٦	۱٦	۱۲	۸	٤
۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۵	۱۱	۷	۳
۵	٦	۷	۸	۱٤	۱۰	٦	۲
۱	۲	۳	٤	۱۳	۹	۵	۱

شکل ٤۷. بیش از یک ملیارد شبکهٔ سری در یک مربع.

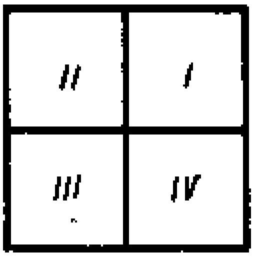
تمام شبکه‌هائیرا که میتوان بصورت مربع ٦٤ خانه‌ای تهیه نمود در شکل ٤۷ دیده میشوند. شما میتوانید ۱٦ خانهٔ دلخواهی را بعنوان دریچه انتخاب نمائید منتهی باید متوجه باشید که دو خانهٔ دارای همان شماره در میان خانه‌ها وجود نداشته باشند. برای آن شبکه‌ایکه ما هم‌اکنون از آن استفاده نمودیم خانه‌های دارای نمرات ذیل انتخاب شده بود:

۵، ٤، ۲
۱٤
۷، ۱۱، ۹
۱٦
۱۵، ۸
۱۲، ۳
٦، ۱۰
۱، ۱۳

بطوریکه ملاحظه مینمائید هیچ شماره‌ای تکرار نمیشود.

پی بردن به اصول قرارگیری ارقام در مربع (شکل ٤۷) مشکل نیست. این مربع توسط خطوط متقاطع به چهار مربع کوچک تقسیم میشود که برای راحتی بررسی آنها را با ارقام رومی I، II، III، IV نشان میدهیم (شکل ٤۸). در مربع I خانه‌ها به ترتیب معمولی

نمره‌بندی شده اند. مربع II عین مربع I است منتهی یک ربع دور بطرف چپ دور خورده است. هرگاه مربع II را باز هم یک ربع دور بچرخانیم، مربع III حاصل میشود و پس از یک ربع دور بعدی، مربع IV بدست می‌آید.

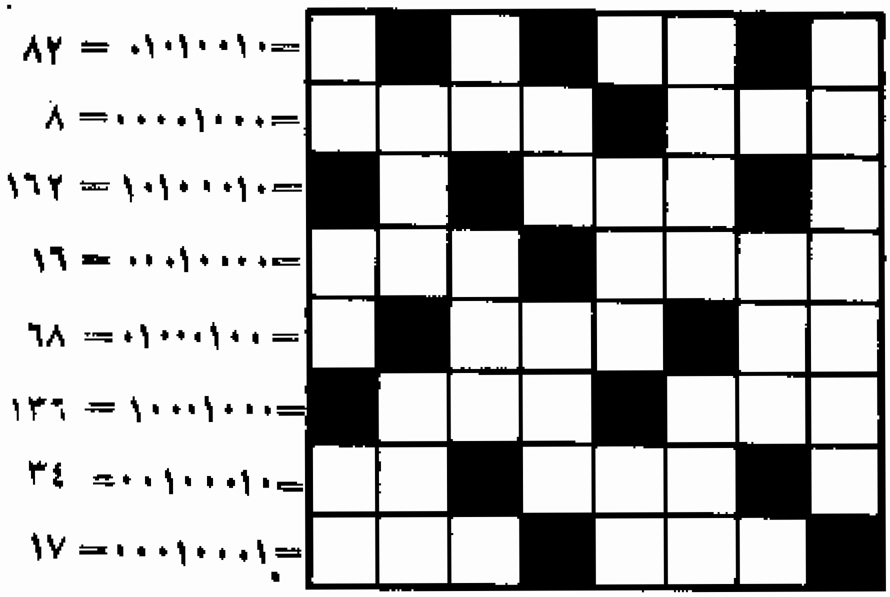


شکل ۴۸. طرح مربوط به شکل ۴۷.

اکنون محاسبه میکنیم که چند شبکهٔ مختلف میتوانند وجود داشته باشند.

خانه شمارهٔ ۱ را میتوان در چهار جا (بمثابهٔ دریچه) انتخاب نمود. در هر حالت میتوان خانهٔ شمارهٔ ۲ را که آن نیز در چهار جا انتخاب میشود افزود. بدینترتیب دو دریچه را میتوان به ۴ × ۴ یعنی به ۱۶ طریق، و سه دریچه را به ۶۴ = ۴ × ۴ × ۴ طریق انتخاب کرد. با استدلال از همین طریق در می یابیم که ۱۶ دریچه را به $۴^{۱۶}$ (حاصلضرب ۱۶ رقم ۴) طریق میتوان حاصل کرد. این عدد بزرگتر از ۴ میلیارد است. حتی اگر این محاسبه چند برابر مبالغه‌آمیز تلقی گردد (زیرا استفاده از شبکه‌های دارای دریچه‌های پهلو به پهلو نامناسب است و این حالات را مستثنی میشماریم) با آنهم چند صد میلیون شبکه باقی میماند یعنی یک اقیانوس تمام! بیائید سعی کنید شبکهٔ مطلوب را از آن میان پیدا نمائید.

اگر گروهی کارشناسان کشف رمز جهت تهیهٔ شبکه‌ای و آزمایش آن از لحاظ داشتن نتیجهٔ معقول فقط یک دقیقه مصرف نمایند در آنصورت برای کشف رمز یادداشت صدها میلیون دقیقه یعنی هزارساله‌ها ممکن است لازم آید! ضمناً تمام این گفته‌ها تنها وقتی صدق میکند که کشف رمز باصطلاح «با دستان خالی» صورت بگیرد. در کتاب «سرگرمی‌های جبر» نوشتهٔ اینجانب شما میتوانید راجع به ماشینهای حساب سریع‌العمل مطالعه نمائید. چنین ماشینهائی بر اساس برنامهٔ معین میتوانند صدها هزار و حتی میلیون‌ها عمل در یک ثانیه انجام دهند. این ماشینها نه تنها محاسبه میکنند. بطور مثال آنها میتوانند تمام شبکه‌های ممکنه را بصورت جداگانه بررسی و امتحان نمایند که آیا هر کدام شبکه‌ها میتواند متن معقولی بدهد. برای اینکار باید برنامهٔ مناسبی جهت چنین ماشینی تنظیم گردد. و هرگاه برای امتحان یک شبکه



شکل ۴۹. شماره‌گذاری شبکهٔ سری.

توسط ماشین بطور مثال یک هزارم ثانیه ضرور باشد آنگاه برای بررسی صدها میلیون شبکه، صدها هزار ثانیه یعنی چند شبانه‌روز لازم خواهد بود. بطوریکه ملاحظه میکنید در شرایط کنونی حفظ محرمیت مکاتبه خیلی دشوار میباشد.

۵۸. چطور میتوان شبکه را بخاطر سپرد؟ فرض کنیم که ماشینی در بین نباشد تا رمز را کشف نماید. بطور مثال گیریم که مضمون یادداشت باید ظرف ۲ — ۳ روز محرمانه بماند و میتوان امیدوار بود که این مدت برای توقیف نامه و فرستادن آن به مرکز محاسباتی و کشف رمز آن کافی نباشد. انقلابیون مخفی تصمیم گرفتند از شبکه استفاده نمایند. کاملاً واضح است که هر دو شرکت‌کنندهٔ مکاتبه باید متوجه باشند که شبکهٔ آنها بدست شخص بیگانه نیافتد. بهتر است که شبکه حفظ نگردد بلکه هنگام رسیدن نامه تهیه شود و بزودی پس از خواندن آن نابود گردد. ولی چطور میتوان موقعیت دریچه‌ها را بخاطر سپرد؟ در اینجا باز هم ریاضی به کمک ما میشتابد. دریچه‌ها را با رقم ۱، و سایر خانه‌ها را با رقم ۰ نشان میدهیم. در اینصورت ردیف اول خانه‌های شبکه بصورت زیر نشان داده میشود (شکل ۴۹):

۰۱۰۱۰۰۱۰

یا اگر صفر طرف چپ را از بین برداریم:

۱۰۱۰۰۱۰

ردیف دوم اگر صفرهای طرف چپ را دور کنیم بدینترتیب نوشته میشود:

۱۰۰۰

سایر ردیف‌ها بصورت زیر در می‌آیند:

۱۰۰۰۱۰۰۰	۱۰۱۰۰۰۰۱۰
۱۰۰۰۱۰	۱۰۰۰۰
۱۰۰۰۱	۱۰۰۰۱۰۰

برای اینکه نوشتن این اعداد را ساده‌تر بسازیم فرض میکنیم که این اعداد نه در دستگاه اعشاری که معمولاً از آن استفاده میشود بلکه در دستگاه «دوگانی» نوشته شده‌اند. این بدان معناست که رقم یک نسبت به رقم یک مجاور آن در طرف راست نه ۱۰ بار بلکه دو بار بزرگتر است. رقم یک که در آخر عدد قرار دارد مثل معمول واحد ساده‌ای است. رقم یک ماقبل آخر بمعنای دو؛ رقم یک در جای سوم از طرف آخر بمعنای چهار؛ رقم یک در جای چهارم از آخر بمعنای هشت؛ رقم یک در جای پنجم از آخر بمعنی ۱۶ است و الی آخر. در چنین دستگاهی عدد ۱۰۱۰۰۱۰ که موقعیت دریچه‌های ردیف اول را مشخص میسازد بوسیلهٔ واحدهای ساده اینطور بیان میشود:

$$۶۴ + ۱۶ + ۲ = ۸۲$$

زیرا صفرها بر عدم موجودیت یک در مرتبهٔ داده شده دلالت میکند.

عدد ۱۰۰۰ (ردیف دوم) در دستگاه اعشاری به عدد ۸ تبدیل میشود.

سایر اعداد را باید توسط اعداد ذیل تعویض نمود:

$$۱۲۸ + ۳۲ + ۲ = ۱۶۲$$

$$۱۶$$

$$۶۴ + ۴ = ۶۸$$

$$١٢٨ + ٨ = ١٣٦$$
$$٣٢ + ٢ = ٣٤$$
$$١٦ + ١ = ١٧$$

بخاطر سپردن اعداد ۸۲، ۸، ۱۶۲، ۱۶، ۶۸، ۱۳۶، ۳۴ و ۱۷ آنقدر مشکل نیست. با دانستن این اعداد همیشه میتوان آن گروه اعداد اولیه‌ایرا حاصل نمود که سرچشمهٔ این اعداد بوده و طرز قرارگیری پنجره‌ها در شبکه را مستقیماً نشان میدهند.

روش انجام این عمل را بعنوان مثال روی عدد اول یعنی ۸۲ نشان میدهیم. آن را بر دو تقسیم مینمائیم تا بدانیم که چند مرتبه دو را در بر دارد و عدد ۴۱ را حاصل میکنیم. چون بدون باقیمانده تقسیم گردید پس در جای آخر، در مرتبهٔ یکان ساده باید صفر قرار داشته باشد. تعداد دوهای حاصله را بر دو تقسیم مینمائیم تا بدانیم عدد ما چند رقم چهار را در بر دارد:

$$٤١/٢ = ٢٠$$ و یک باقی میماند

این بدان معناست که در مرتبهٔ دوها یعنی در جای ماقبل آخر عدد یک قرار دارد.

بعد ۲۰ را بر ۲ تقسیم مینمائیم تا بدانیم تعداد هشت‌ها در عدد ما چند است:

$$٢٠/٢ = ١٠$$

باقیمانده وجود ندارد یعنی در جای چهارها صفر قرار دارد.

۱۰ را بر ۲ تقسیم میکنیم و ۵ بدون باقیمانده حاصل میشود یعنی در جای هشت‌ها صفر واقع میباشد.

با تقسیم ۵ بر ۲، عدد ۲ حاصل میگردد و ۱ باقی میماند یعنی در این مرتبه رقم ۱ قرار دارد. بالاخره ۲ را بر ۲ تقسیم نموده حاصل میداریم که در مرتبهٔ بعدی صفر، و در آخرین مرتبه ۱ قرار دارد. (این مرتبه مطابق با ٦٤ است).

بدینترتیب تمام ارقام عدد مطلوب تعیین گردید:

۱۰۱۰۰۱۰

چون در اینجا مجموعاً هفت رقم وجود دارد و در هر ردیف شبکه ۸ خانه وجود دارد، پس واضح است که یک صفر در طرف چپ

حذف شده است و موقعیت دریچه‌ها در ردیف اول توسط ارقام ذیل مشخص میگردد:

۰۱۰۱۰۰۱۰

یعنی دریچه‌ها در جاهای دوم، چهارم و هفتم قرار دارند.
به همین ترتیب موقعیت دریچه‌ها در سایر ردیف‌ها تعیین میگردد.

بطوریکه قبلاً گفته شد اشکال مختلف رمزنویسی وجود دارد. ما شبکه را باین خاطر انتخاب نمودیم که با ریاضی رابطهٔ نزدیک دارد و یکبار دیگر ثابت میسازد که چقدر آن جوانب زندگی که علم ریاضی در آن ذی‌دخل است متنوع میباشند.

فصل هفتم

حکایات در بارهٔ اعداد بزرگ

۵۹. معاملهٔ سودمند. اینکه چه وقت و در کجا این حادثه بوقوع پیوسته است معلوم نیست. شاید هم اصلاً بوقوع نپیوسته باشد. باحتمال قوی، این قضاوت درست‌تر باشد. اما این داستان اعم از اینکه صحت داشته یا نداشته باشد فوق‌العاده جالب است و ارزش شنیدن را دارد.

۱.

یکی از ثروتمندان میلیونر پس از مسافرت با سرور غیرعادی به خانه بازگشت: در راه برای او ملاقاتی اتفاق افتاده بود که وعدهٔ سود بزرگ را میداد.

او به اعضای خانواده‌اش حکایت میکرد که «چه شانس‌های خوشی وجود دارند! بیهوده نیست که میگویند پول پول میاره. اینک پولهای من هم پولهای تازه را میآورد. چقدر غیر مترقبه بود! در راه با یک شخص عادی ناشناس رو برو شدم. من حتی آرزوی صحبت با او نداشتم ولی چون دید که من ثروتمند هستم خودش شروع کرد. در ختم صحبت چنان کار سودمندی را پیشنهاد نمود که سرم گیج رفت.

او گفت که «بیائید با هم قراری بگذاریم. من در جریان یک ماه همه‌روزه برایت صدها هزار روبل میآورم. البته این کار را برایگان نمیکنم گرچه مزد ناچیزی میخواهم. روز اول من باید طبق قرارداد، اگرچه خنده‌آور است، تنها یک کوپک باو بدهم.

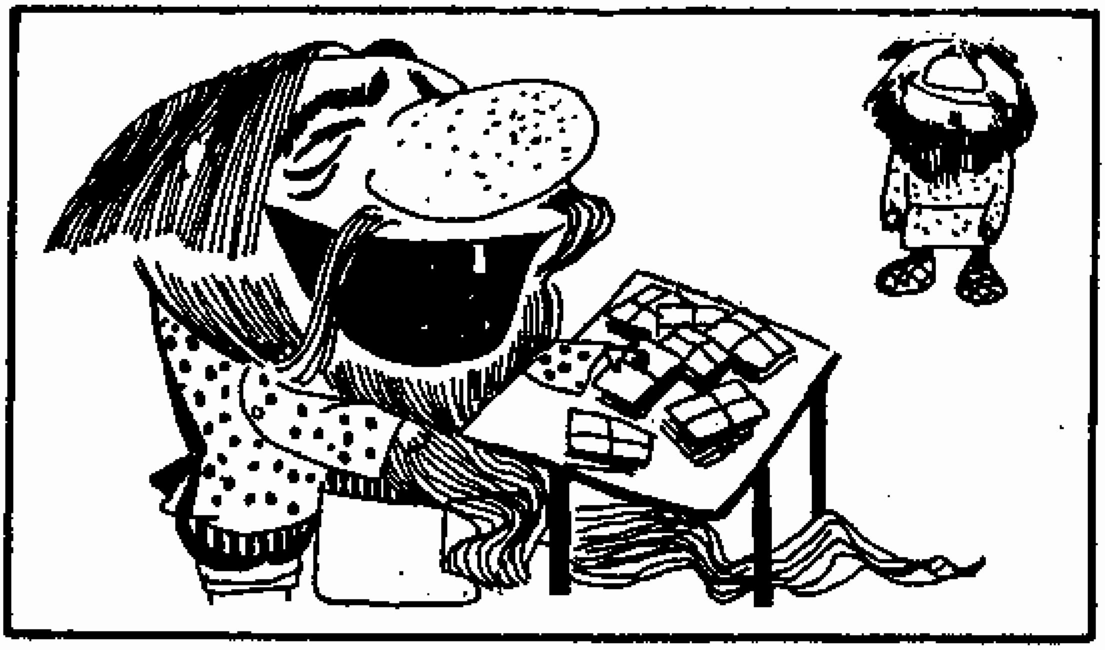
من فکر کردم غلط شنیده‌ام و پرسیدم:

— یک کوپک؟

— بلی یک کوپک. در برابر صدهزار دوم بمن دو کوپک میپردازی.

من با بی‌حوصلگی پرسیدم که «بعد چه؟»

– بعد در برابر صد هزار سوم ، کوپک، در برابر صد هزار چهارم ۸ کوپک، در برابر صدهزار پنجم ۱۶ کوپک و بدینترتیب تمام ماه هر روز بعدی دو بار بیشتر از روز قبلی.
من پرسیدم: و بعد چه؟
– فقط همین! دیگر هیچ طلبی ندارم. منتهی قرارداد باید اکیداً مراعات گردد: هر صبح برایت صد هزار روبل میآورم و در مقابل تو به من مزد مقرره را میپردازی. قبل از اتمام یک ماه فسخ قرارداد جایز نیست.
صدها هزار روبل را در برابر چند کوپک میدهد! هرگاه پولها ساختگی نباشد پس این شخص دیوانه است. ولی این کار خیلی سودمند است و نباید فرصت را از دست داد.
من باو گفتم:
– بسیار خوب، پولها را بیاور. من مزد ترا دقیقاً میدهم ولی تو مواظب خودت باش، پولها را بدون فریب بیاور. او جواب داد:
– آسوده باش، فردا صبح منتظر باش.
فقط از یک چیز در هراس هستم: آیا او میآید یا خیر؟ مبادا بخاطرش برسد که معامله فوق‌العاده زیان‌آوری را پیش‌نهاد کرده است! به هر صورت تا فردا انتظار میکشم».
۲.
یک روز سپری شد. صبح زود آن شخص ناشناسی که او را در راه ملاقات نموده بود در خانه‌اش را زد و گفت:
– پولها را حاضر کن. من پولهایم را آوردم.
حقیقتاً پس از اینکه داخل اتاق شد این مرد عجیب پولهای حقیقی و نه ساختگی را جلو گذاشت. او صد هزار روبل را حساب نمود و گفت:
اینست پولهای من طبق قرارداد. حالا نوبت توست.
شخص ثروتمند یک کوپک مسی روی میز گذاشت و با نگرانی منتظر بود که آیا او سکه را برمیدارد یا منصرف شده و پولهایش را باز میطلبد. مهمان کوپک را امتحان نمود، روی کف دستش وزن کرد و در کیسهٔ خود انداخت.



شکل ۵۰. «صد هزار از آسمان نازل شده است!»

— فردا در همین ساعت منتظر باش. فراموش نکنی که باید دو کوپک حاضر کنی. اینرا گفت و خانه را ترک نمود.

ثروتمند حتی این خوشبختی را باور نداشت. صد هزار روبل از آسمان افتاد! یکبار دیگر پولها را حساب کرد و بخوبی مطمئن گردید که ساختگی نیست: همه درست است. پولها را در جای امنی پنهان نموده و منتظر فردا شد.

شب هنگام ثروتمند دچار شک و تردید شده و فکر میکرد: شاید آن مرد یک راهزن باشد و خود را به ساده‌لوحی زده است. میخواهد ببیند که پولهای من در کجا قرار دارد و بعد با طایفهٔ سارقین به خانهٔ من دست‌برد بزند؟

ثروتمند در خانه را محکم بسته و از آغاز شب هی از پنجره نگاه مینمود، مدت زیادی خوابش نبرد. صبح باز هم در زده میشود و آن شخص ناشناس پول میآورد. صد هزار روبل را برای ثروتمند حساب نمود، دو کوپک خود را گرفت، به کیسه انداخت و رفت. ضمن خداحافظی گفت:

— برای فردا ۴ کوپک آماده کن.

باز هم شخص ثروتمند اظهار خوشحالی میکند: دومین صد هزار مفت برایم رسید. مهمان به یک غارتگر شبیه نیست: باطراف

نگاه نمیکند، فقط کوپک‌های خود را میگیرد و میرود. چه آدم ساده‌ای! ای کاشکه اینگونه اشخاص در جهان زیاد بودند آنوقت اشخاص عاقل خوب زندگی میکردند...

روز سوم باز هم آن شخص ناشناس در خانهٔ ثروتمند حاضر شد و بعوض ٤ کوپک، سومین صد هزار را تسلیم نمود.

یک روز دیگر سپری شد و به همین ترتیب در برابر ٨ کوپک، چهارمین صد هزار نصیب شخص ثروتمند گردید.

پنجمین صد هزار هم در برابر ١٦ کوپک، و ششمین صد هزار در برابر ٣٢ کوپک دریافت گردید.

پس از هفت روز از شروع معامله، شخص ثروتمند هفت صد هزار روبل حاصل کرد و در مقابل، مبلغ ناچیزی پرداخت:

١ کوپک + ٢ کوپک + ٤ کوپک + ٨ کوپک + ١٦ کوپک + ٣٢ کوپک + ٦٤ کوپک = ١ روبل و ٢٧ کوپک.

این معامله خیلی مورد پسند میلیونر حریص واقع شد و تأسف میخورد که فقط برای یک ماه قرارداد را انعقاد کرده است. بیش از سه میلیون روبل عایدش نمیشود. آیا میشود این ساده‌لوح را متقاعد نمود مدت قرارداد را اقلاً نیم‌ماه دیگر تمدید نماید؟ مبادا وی دریابد که بمن پول مفت میدهد...

آن شخص مرتباً هر صبح با صد هزار روبل حاضر میشد. روز هشتم او ١ روبل و ٢٨ کوپک، روز نهم ٢ روبل و ٥٦ کوپک، روز دهم ٥ روبل و ١٢ کوپک، روز یازدهم ١٠ روبل و ٢٤ کوپک، روز دوازدهم ٢٠ روبل و ٤٨ کوپک، روز سیزدهم ٤٠ روبل و ٩٦ کوپک، و روز چهاردهم ٨١ روبل و ٩٢ کوپک حاصل نمود.

ثروتمند با کمال میل این پولها را میپرداخت؛ آخر او یک میلیون و ٤٠٠ هزار روبل حاصل نمود و در مقابل، به آن شخص ناشناس فقط در حدود صد و پنجاه روبل پرداخت.

ولی سرور ثروتمند مدت دیری دوام نیافت؛ بزودی او درک نمود که شخص ناشناس آدم ساده‌ای نبوده و معامله با وی بر خلاف اینکه اول بنظر میرسید آنقدر سودمند نیست. پس از ١٥ روز شخص ثروتمند مجبور بود بابت هر صد هزار نه کوپک‌ها بلکه

صدها روبل بپردازد و مبلغ پرداختی وی با سرعت سرسام‌آوری افزایش می‌یافت. حقیقتاً، مبالغ پرداختی شخص ثروتمند در نیمهٔ دوم ماه بشرح زیر بود:

در برابر پانزدهمین صد هزار . . . . . . ۱۶۳ روبل و ۸۴ کوپک،
در برابر شانزدهمین صد هزار . . . ۳۲۷ روبل و ۶۸ کوپک،
در برابر هفدهمین صد هزار . . . ۶۵۵ روبل و ۳۶ کوپک،
در برابر هجدهمین صد هزار . . . ۱۳۱۰ روبل و ۷۲ کوپک،
در برابر نوزدهمین صد هزار . . . ۲۶۲۱ روبل و ۴۴ کوپک.

ضمناً شخص ثروتمند خود را دور از زیان میدید: او اگرچه بیش از پنج هزار پرداخته ولی در مقابل ۱۸۰۰ هزار روبل حاصل کرده بود.

اما سود روزانه هر روز، تازه هم با سرعت فزاینده، رو به تنزل بود.

پرداخت‌های بعدی بصورت زیر بود:

در برابر بیستمین صد هزار . . . ۵۲۴۲ روبل و ۸۸ کوپک،
در برابر بیست و یکمین صد هزار . . . ۱۰۴۸۵ روبل و ۷۶ کوپک،
در برابر بیست و دومین صد هزار . . . ۲۰۹۷۱ روبل و ۵۲ کوپک،
در برابر بیست و سومین صد هزار . . . ۴۱۹۴۳ روبل و ۰۴ کوپک،
در برابر بیست و چهارمین صد هزار . . . ۸۳۸۸۶ روبل و ۰۸ کوپک،
در برابر بیست و پنجمین صد هزار . . . ۱۶۷۷۷۲ روبل و ۱۶ کوپک،
در برابر بیست و ششمین صد هزار . . . ۳۳۵۵۴۴ روبل و ۳۲ کوپک،
در برابر بیست و هفتمین صد هزار . . . ۶۷۱۰۸۸ روبل و ۶۴ کوپک.

اکنون دیگر پرداخت‌های ثروتمند از عایدات وی فزونی یافته بود. او میخواست در همینجا واایستد ولی فسخ قرارداد مجاز نبود.

بعد وضع باز هم بدتر شد. میلیونر خیلی دیر یقین حاصل کرد که شخص ناشناس بیرحمانه او را فریب داده و پولی بمراتب بیشتر از مبلغی که میپردازد دریافت مینماید...

6-0625

از روز بیست و هشتم به بعد ثروتمند مجبور بود میلیونها روبل بپردازد. و دو روز آخر او را به ورطهٔ افلاس انداخت.
این پرداخت‌های هنگفت از این قرار است:
در برابر بیست و هشتمین صدهزار... ۱ ۳۴۲ ۱۷۷ روبل و ۲۸ کوپک،
در برابر بیست و نهمین صدهزار... ۲ ۶۸۴ ۳۵۴ روبل و ۵۶ کوپک،
در برابر سیمین صدهزار... ۵ ۳۶۸ ۷۰۹ روبل و ۱۲ کوپک.
وقتیکه مهمان برای آخرین بار خانهٔ ثروتمند را ترک گفت میلیونر حساب نمود که این سه میلیون روبلی که در آغاز خیلی ارزان به نظر میرسید برایش چند تمام شده بود. معلوم شد که او به شخص ناشناس

۱۰ ۷۳۷ ۴۱۸ روبل و ۲۳ کوپک

پرداخته است.
یعنی کمی کمتر از ۱۱ میلیون روبل!.. در صورتیکه تمام قضیه از یک کوپک شروع شده بود. شخص ناشناس میتوانست همه‌روزه حتی سه صد هزار روبل بیاورد باز هم نمی باخت.

۳.

قبل از اینکه به این داستان خاتمه بدهم، نشان میدهم که به کدام طریق میتوان خسارات میلیونر را سریعتر محاسبه نمود یا بعبارت دیگر چگونه میتوان رشته عددی زیر را جمع نمود:

$$۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶ + ۳۲ + ۶۴ + \ldots$$

بسادگی میتوان خاصیت ذیل این اعداد را کشف نمود:

$$
\begin{aligned}
۱ &= ۱ \\
۲ &= ۱ + ۱ \\
۴ &= (۱ + ۲) + ۱ \\
۸ &= (۱ + ۲ + ۴) + ۱ \\
۱۶ &= (۱ + ۲ + ۴ + ۸) + ۱ \\
۳۲ &= (۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ۱۶) + ۱ \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

ما مشاهده میکنیم که هر عدد این رشته مساویست به حاصل‌جمع تمام اعداد قبلی باضافهٔ یک. بنا بر این وقتیکه لازم میافتد که

تمام اعداد چنین رشته‌ای را بطور مثال از ۱ الی ۳۲ ۷۶۸ جمع کنیم، کافیست به عدد نهائی (۳۲ ۷۶۸) حاصل جمع تمام اعداد قبلی را بیافزائیم یا بعبارت دیگر همان عدد نهائی منهای یک (۱ - ۳۲ ۷۶۷) را با آن جمع بینمائیم. حاصل میکنیم ۶۵ ۵۳۵.

بدینترتیب بمحض دانستن آخرین مبلغ پرداختی میلیونر حریص، خیلی زود میتوان خسارات وی را محاسبه نمود. آخرین پرداخت وی ۵ ۳۶۸ ۷۰۹ روبل و ۱۲ کوپک بود.

بنا بر این، پس از جمع ۵ ۳۶۸ ۷۰۹ روبل و ۱۲ کوپک با ۵ ۳۶۸ ۷۰۹ روبل و ۱۱ کوپک، دفعتاً به نتیجهٔ مطلوب میرسیم:

۱۰ ۷۳۷ ٤۱۸ روبل ۲۳ کوپک

۶۰. شایعات شهری. تعجب‌آور است که به چه سرعتی شایعات در شهر پخش میگردد! گاهی اوقات حتی دو ساعت هم از حادثه‌ای نمیگذرد که فقط چند نفر ناظر آن بودند و خبر آن در تمام شهر پخش شده است: همه از آن آگاهی دارند، همه در بارهٔ آن شنیده‌اند. این سرعت غیر عادی، تعجب‌آور و حتی مرموز است.

اما هرگاه با این پدیده از طریق حساب برخورد شود واضح میگردد که هیچ کار معجزه‌آسائی صورت نگرفته است: همه چیز به خواص اعداد و نه به خصوصیات مرموز شایعات توجیه میشود.

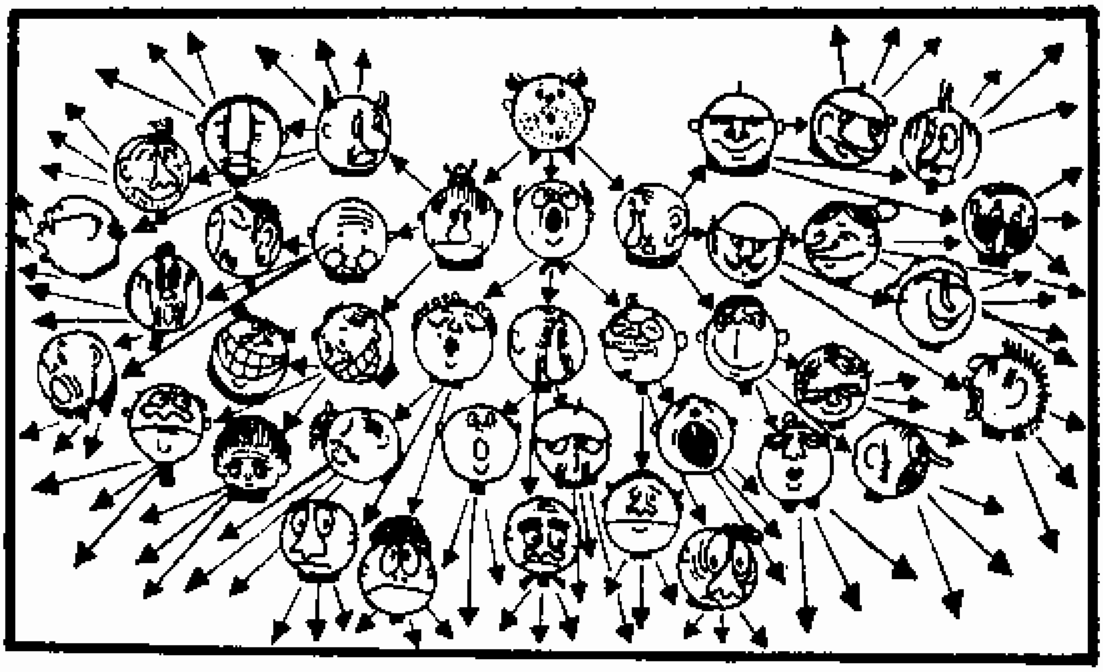
بطور مثال حادثهٔ زیر را در نظر میگیریم.

۱.

ساعت ۸ صبح یکی از ساکنین پایتخت به شهر کوچکی که نفوس آن ۵۰ هزار نفر است آمده و خبر جالب تازه‌ای با خود میاورد.

در خانه‌ای که مسافر اقامت گزید این خبر را تنها به سه نفر از ساکنان محل گفت. فرض کنیم این جریان ۱۵ دقیقه بطول انجامیده باشد.

بدینترتیب ساعت ۸ و ۱۵ دقیقهٔ صبح از این خبر فقط چهار نفر یعنی خود مسافر و سه تن از اهالی شهر مطلع بودند.



شکل ۵۱. راه پخش شایعه.

هر یک از سه اهل شهر پس از دانستن این خبر فوراً آنرا به سه نفر دیگر از ساکنین شهر اطلاع داد. این جریان نیز ۱۵ دقیقه طول کشید. یعنی نیم‌ساعت بعد از رسیدن این خبر به شهر ۴+(۳×۳)=۱۳ نفر از آن آگاه بودند.

هر یک از ۹ نفر تازه‌آگاه نیز خبر را در مدت یک ربع ساعت به ۳ تن دیگر رساند و بدینترتیب ساعت ۸ و ۴۵ دقیقه این خبر برای

۱۳+(۹×۳)=۴۰ نفر

معلوم بود.

هرگاه بعداً نیز به همین ترتیب شایعه در شهر پخش شود یعنی هر کسیکه از خبر اطلاع یافته است بتواند بلافاصله در ظرف یک ربع ساعت آنرا به سه نفر دیگر برساند آنگاه پخش خبر در شهر بصورت زیر زمان‌بندی میگردد:

در ساعت ۹ از خبر ۴۰+(۲۷×۳)=۱۲۱ نفر مطلع میشوند.

در ساعت $\frac{1}{4}$ ۹ از خبر ۱۲۱+(۸۱×۳)=۳۶۴ نفر مطلع میشوند.

در ساعت $\frac{1}{2}$ ۹ از خبر ۳۶۴+(۲۴۳×۳)=۱۰۹۳ نفر مطلع میشوند.

بدینترتیب یک ساعت و نیم بعد از رسیدن خبر به شهر

بطوریکه مشاهده میکنید مجموعاً در حدود ۱۱۰۰ نفر از آن مطلع میشوند. چنین بنظر میرسد که این تعداد در مقابل ۵۰۰۰۰ نفر نفوس شهر آنقدر زیاد نیست. گمان می‌رود که بزودی تمام اهالی شهر از این خبر آگاه نمیشوند. ولی بیائید جریان بعدی پخش خبر را پیگیری نمائیم:

در ساعت ۹ ۳/۴ از خبر ۱۰۹۳+(۷۲۹×۳)=۳۲۸۰ نفر مطلع میشوند.

در ساعت ۱۰ از خبر ۳۲۸۰+(۲۱۸۷×۳)=۹۸۴۱ نفر مطلع میشوند.

پس از ربع ساعت دیگر بیش از نصف اهالی شهر از خبر اطلاع میبابند:

۹۸۴۱+(۶۵۶۱×۳)=۲۹۵۲۴ نفر

و بدینترتیب قبل از ساعت ده و نیم صبح تمام شهروندان شهر بزرگ از خبری که ساعت ۸ صبح فقط یکنفر از آن اطلاع داشت آگاه میشوند.

۲.

اکنون پیگیری میکنیم محاسبهٔ قبلی چگونه صورت گرفت. در حقیقت امر این محاسبه در جمع سلسلهٔ عددی ذیل خلاصه میشود:

۱ + ۳ + (۳ × ۳) + (۳ × ۳ × ۳) + (۳ × ۳ × ۳ × ۳) + ...

آیا نمیتوان این حاصل‌جمع را بطور مختصرتر مانند حاصل‌جمع رشتهٔ عددی قبلی ۱ + ۲ + ۴ + ۸ + ...، دریافت نمود؟ این امر در صورتی ممکن است که ویژگی اعداد مورد جمع را در نظر بگیریم:

۱ = ۱
۳ = ۱ × ۲ + ۱
۹ = (۱ + ۳) × ۲ + ۱
۲۷ = (۱ + ۳ + ۹) × ۲ + ۱
۸۱ = (۱ + ۳ + ۹ + ۲۷) × ۲ + ۱
. . . .