مقدمه نشر الکترونیک

اتحاد شوروی در عمر کوتاه خود منشا خدمات بسیاری برای بشریت بوده است.نسل پیشین ایران به خوبی کتابهایی را که توسط انتشارات پروگرس ومیر مسکو برای خوانندگان فارسی زبان منتشر می شد به یاد دارد. واغراق نیست اگر بگوییم که این کتابها تاثیر فراوانی بر دانش نسل گذشته وطن داشته وکماکان روشنگر راه آیندگان خواهد بود.

کتاب«ریاضیات زنده» از جمله همین کتابهاست که در آن مباحثی مطرح می شود که امروزه روز نیز مشکل جامعه ما است.

راز شرکتهای هرمی –بررسی افسانه طوفان نوح– وصدها مثال ومساله کاربردی دیگر.

شما را به مطالعه این کتاب دعوت می کنم.

جنت مکان

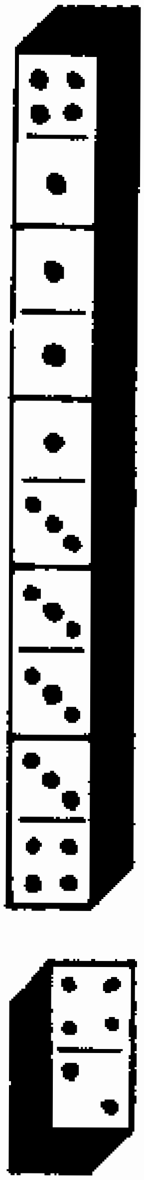
ی. پرلمان

ریاضیات زنده

انتشارات «میر» مسکو

ریاضیات
زنده

Я.И. Перельман



ЖИВАЯ МАТЕМАТИКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»
МОСКВА

ی. پرلمان

ریاضیات زنده

چاپ دوم

انتشارات «میر» مسکو

چاپ اول – ۱۹۸۲
چاپ دوم – ۱۹۸۶

ترجمه : ذبیح الله بشردوست

На персидском языке

فصل اول

صبحانه با معمی‌ها

۱. سنجاب در مرغزار. شخصی هنگام صرف صبحانه در استراحتگاه حکایت میکرد: امروز صبح من با سنجاب قایم موشک بازی کردم.

— شما در جنگل ما مرغزار دایروی‌را دیده‌اید که در وسط آن یک درخت غان قرار دارد؟ در عقب همان درخت سنجاب از من پنهان شده بود. پس از آنکه من از جای انبوه خارج شدم، دفعتاً به پوز سنجاب با چشمان زنده‌اش که از عقب درخت بمن نظر دوخته بود، توجه کردم. بدون آنکه نزدیک شوم، محتاطانه شروع به گردش دورادور مرغزار نمودم تا سراپای این حیوان‌را نگاه کنم. تقریباً چهار مرتبه دورادور درخت گشتم، اما حیوان حیله‌گر به طرف دیگر درخت پناه برده مانند سابق فقط پوزش‌را نشان میداد. بدینترتیب موفق نگردیدم سراپای سنجاب را ببینم.

یکی از حاضرین بصورت اعتراض‌آمیز گفت:

— شما خود میگوئید که چهار مرتبه دورادور درخت گشتید.

— بلی، دورادور درخت، نه دورادور سنجاب!

— اما سنجاب در درخت بود؟

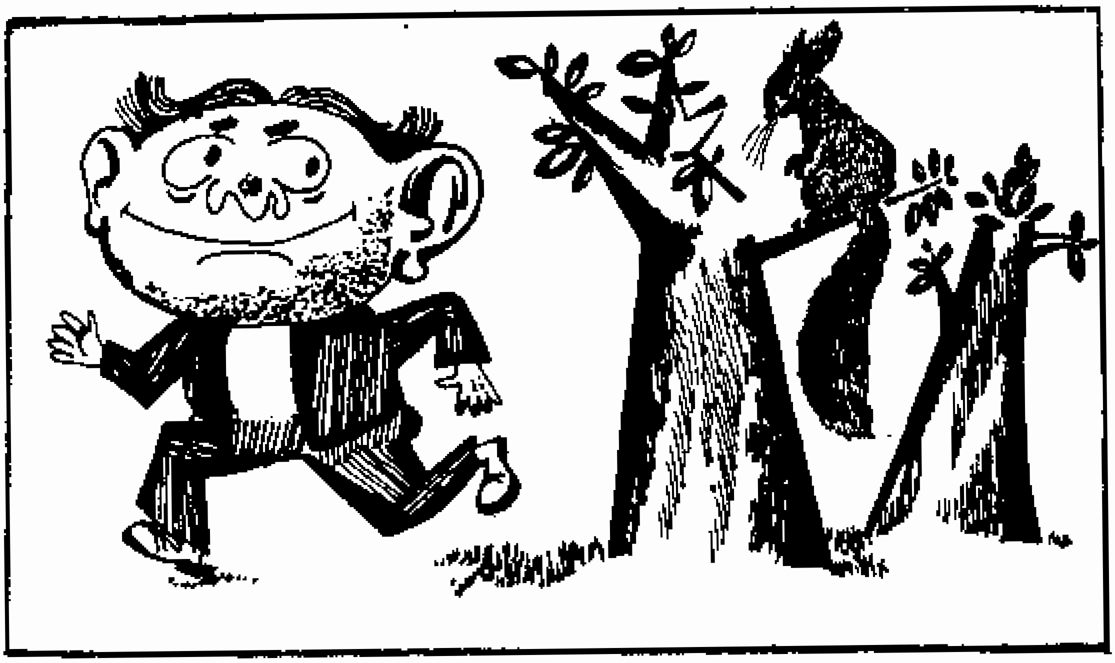
— از اینجا چه نتیجه‌ای حاصل میشود؟

— اینکه، شما دورادور سنجاب نیز گشتید.

— اینقدر خوب دورادورش گشتم که حتی یکبار هم پشت او را ندیدم.

— پشت سنجاب به موضوع چه ربطی دارد؟ سنجاب در مرکز است و شما بصورت دایروی حرکت میکنید، پس دورادور سنجاب هم میچرخید.

— به هیچ وجه این طور نیست. تصور کنید که من دورادور



شکل ۱. «حیوانک حیله‌گر بطرف دیگر عقب میرفت».

شما میچرخم و شما همیشه رویتانرا به من کرده و پشتتانرا نشان نمیدهید. آیا شما میگوئید که من دورادور شما میچرخم؟

— البته میگویم. وگر نه چه؟

— مگر میچرخم، آخر یک مرتبه هم در عقب شما قرار نگرفته و پشت شمارا نمی‌بینم؟

— شما چرا به موضوع پشت چسبیدید؟ آخر، ماهیت امر در آن است که شما دورادور من در مسیر بسته‌ای حرکت میکنید، نه در آنکه پشت مرا ببینید.

— اجازه بدهید: چرخیدن دورادور چیزی یعنی چه؟ به عقیدهٔ من معنای آن فقط یک چیز است: بطور متوالی قرار گرفتن در حالاتیکه کلیه جوانب شیيء ملاحظه گردد. آیا درست نیست جناب استاد؟ — گوینده به پیرمردی خطاب کرد که پشت میز نشسته بود.

دانشمند جواب داد:

— بحث شما اصلا روی کلمات است. در چنین مواردی همیشه باید از چیزی شروع کرد که هم اکنون شما پیرامون آن شروع به گفتگو کردید: باید در بارهٔ مفهوم کلمات توافق نمود. چطور باید این کلمات را فهمید: «حرکت کردن دورادور

چیزی»؟ مفهوم آن شاید دوگانه باشد. اولا میتوان جملهٔ مذکور را بمثابهٔ حرکت در مسیر بسته‌ای که شیئ، در داخل آن قرار دارد، معنی کرد. این یک تعبیر است. مفهوم دیگر عبارت است از حرکت دورادور شیئ، بطوریکه همه جوانب آن دیده شود. با در نظر داشتن مفهوم اولی، شما باید اعتراف کنید که چهار مرتبه دورادور سنجاب گشتید. اما طبق تعبیر دومی شما یکبار هم دورادور سنجاب در حرکت نبوده‌اید. بطوریکه میبینید، هرگاه طرفین به یک زبان تکلم کنند و معنی کلمات را بطرز واحدی درک نمایند، در اینجا هیچ دستاویزی برای مباحثه وجود ندارد.

– خیلی خوب، میتوان مفهوم دوگانهٔ کلمات‌را مجاز شمرد. اما کدام یک صحیحتر است؟

– ضرور نیست بدین نحو مسئله طرح گردد. قرار گذاشتن در بارهٔ هر چیز امکان‌پذیر است. ولی بجا خواهد بود اگر سؤال شود، کدامیک با مفهوم معمولی موافق است. به عقیدهٔ من مفهوم اولی با روحیهٔ زبان بهتر هماهنگی دارد و دلیل آن اینست: بطوریکه معلوم است خورشید بدور محور خود طی کمی بیشتر از ۲۵ شبانه‌روز یک دور کامل میخورد.

– خورشید دور میخورد؟

– البته، مثل زمین بدور محورش. اما تصور کنید که گردش خورشید بطی‌تر صورت گرفته و یک دور را نه در ۲۵ شبانه‌روز بلکه در جریان $۳۶۵ \frac{۱}{۴}$ شبانه‌روز یعنی یکسال انجام دهد. در آنصورت خورشید همیشه یک جانب خود را بطرف زمین متوجه کرده و آن طرفش را یعنی «پشت» خورشیدرا ما هرگز نمی‌دیدیم. اما آیا کسی به این سبب مدعی میشد که زمین بدور خورشید نمی‌چرخد؟

– بلی، اکنون واضح شد که من دورادور سنجاب چرخ میزدم.

یکی از سامعین بحث گفت:

– رفقا! من پیشنهادی دارم! لطفاً متفرق نشوید. چون در باران هیچ‌کس بگردش نمیرود، و باران طوریکه دیده میشود بزودی تمام نخواهد شد، پس بیائید وقت خودرا با حل معماها سپری نمائیم. اساس آن گذاشته شده است. بگذار هرکس به نوبت

یک معما اختراع کند و یا بخاطر آورد و شما، استاد، داور عالی ما باشید.

خانم جوانی اعلام داشت:

— هرگاه معماها با جبر یا هندسه ارتباط داشته باشد، من حاضر نیستم.

— و من هم همینطور، — کس دیگری با خانم هم‌نظر شد.

— نه خیر، نه خیر، باید همه شرکت کنند! و ما از حاضرین خواهش میکنیم که جبر و هندسه را در میان نگذارند، البته مسائل ابتدائی‌را میتوانند مطرح کنند. کسی اعتراض ندارد؟

— پس من موافقم و آماده‌ام اولین معمارا پیشنهاد کنم.

از هر طرف صداها بلند شد: بسیار خوب، بفرمائید! شروع کنید.

۲. در آشپزخانهٔ مشترک. — معمای من در شرایط آپارتمان ییلاقی بوجود آمد. مسئله‌ای، به اصطلاح، خانگی است. یکی از ساکنین، فرضاً ماریا در بخاری مشترک سه کنده چوب و دیگری موسوم به زینا پنج کنده چوب گذاشتند. ساکن سوم بنام لیدا که هیچ هیزم نداشت، از هر دو همسایه‌اش اجازهٔ استفاده از آتش خواسته و در مقابل به آنها ۸ کوپک پرداخت. چگونه آنها باید این پول را بین هم تقسیم نمایند؟

یکی از حاضرین با عجله گفت:

— باید دو نصف کنند. زیرا لیدا از آتش آنها بطور مساوی استفاده نموده است.

شخص دیگری اعتراض‌آمیزانه گفت:

— نه خیر، باید سهمیهٔ هیزم آنها در نظر گرفته شود. کسیکه ۳ کنده چوب داده باید ۳ کوپک و آنکه ۵ کنده چوب داده است باید ۵ کوپک بگیرد. این تقسیم‌بندی عادلانه خواهد بود.

کسیکه بازی‌را براه انداخته و اکنون رئیس مجلس شمرده میشد، رشتهٔ سخن‌را گرفته گفت:

— رفقا! بیائید جواب نهائی معماها را فعلا اعلام نکنیم.

بگذار هرکس روی آنها فکر و مداقه کند. جوابهای درست‌را هنگام صرف شام داور اعلام میدارد. حالا نفر بعدی! نوبت با شماست رفیق پیش‌آهنگ!

۳. کار انجمن‌های مکتبی. — پیش‌آهنگ معمایش‌را چنین شروع کرد. در مکتب ما پنج انجمن وجود دارد: فلزکاری، نجاری، عکاسی، شطرنج و آوازخوانی دسته‌جمعی (کر). انجمن فلزکاری یکروز در میان، نجاری دو روز در میان، عکاسی سه روز در میان، شطرنج چهار روز در میان و انجمن کر پنج روز در میان تمرین میکنند. در تاریخ اول ژانویه هر پنج انجمن در مکتب جمع شده و بعداً دروس مطابق برنامهٔ تعیین شده، بدون پس و پیش دایر گردید. سؤال در آنست که در سه‌ماههٔ اول چند بار هر پنج انجمن در یک روز واحد در مکتب جمع شدند.

— آیا سال عادی بود و یا کبیسه؟ — همه از پیش‌آهنگ پرسیدند.

— سال عادی بود. یعنی سه‌ماههٔ اول — ژانویه، فوریه و مارس — باید ۹۰ روز حساب گردد؟

— البته.

استاد گفت:

— اجازه دهید به سؤال معمای شما یک سؤال دیگری نیز اضافه نمایم و آن اینست: چند بار در همان سه‌ماههٔ اول سال، روزهائی وجود داشته که درس هیچ یک از انجمن‌ها صورت نگرفته باشد؟

— فهمیدم ها — صدائی بلند شد.

زیر کاسه نیم کاسه‌ای است. هیچ روزی وجود نخواهد داشت که هر پنج انجمن جمع گردد و هیچ روزی نخواهد بود که هیچ انجمنی درس نداشته باشد.

رئیس مجلس پرسید: «چرا؟»

— نمیتوانم تشریح کنم، ولی احساس میکنم برای حل کننده میخواهند تله‌ای بگسترند.

— این که دلیل نشد. شامگاهان معلوم میشود که پیشبینی شما درست است یا خیر، حالا نوبت با شماست، رفیق!

۴. که بیشتر؟ — دو نفر در جریان یکساعت تعداد کسانی‌را شمردند که در پیاده‌رو از کنار آنها عبور مینمودند. یکی در نزدیکی خانه ایستاده بود و دومی در پیاده‌رو این ور و آن ور قدم بر میداشت. کدامیک از آنها تعداد بیشتر عابرین‌را شمرده است؟

کسی از سر میز فریاد نمود: «واضح است که در حین راه رفتن زیادتر شمرده میشود».

رئیس مجلس اعلام کرد:

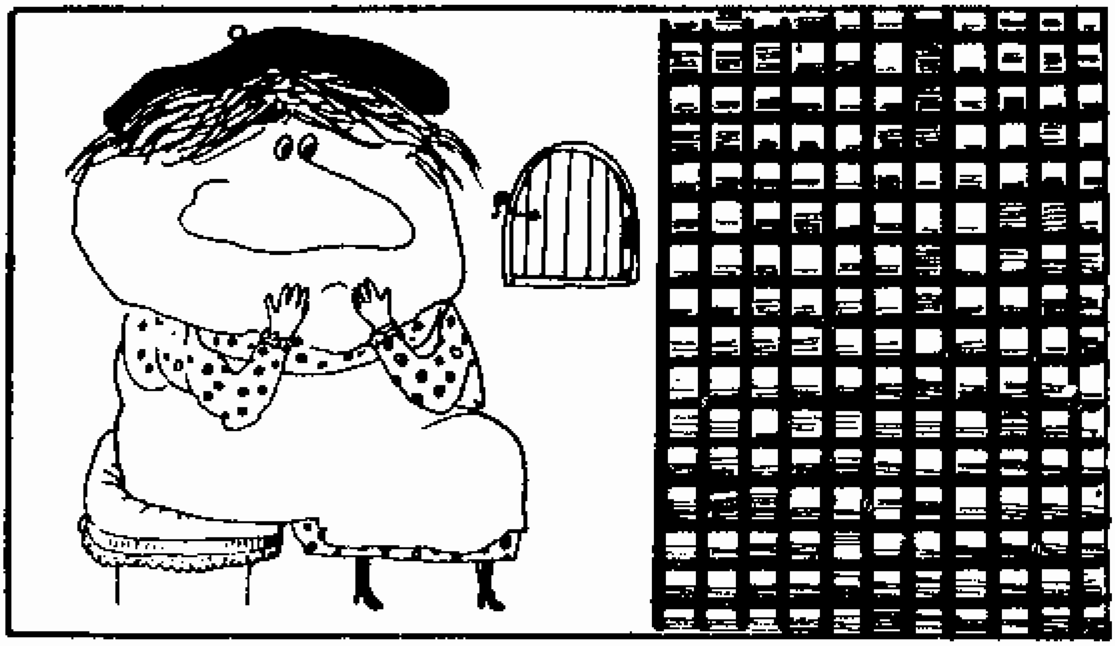
— جواب را هنگام صرف شام میدانیم. نفر بعدی!

۵. پدر بزرگ و نوه. — واقعه‌ای که من در بارهٔ آن صحبت میکنم در سال ۱۹۳۲ بوقوع پیوست. در آنزمان سن من مساوی با عددی بود که دو رقم آخر سال تولدم آنرا تشکیل میدهند. هنگامیکه من این موضوع‌را به پدر بزرگم گفتم او با سخنانش مبنی بر اینکه سن وی نیز عین وضع‌را دارد، مرا متعجب ساخت. به نظر من این امر محال آمد.

— البته، محال است، — صدای کسی نگوش رسید.

— باور کنید که کاملا امکان‌پذیر است. پدر بزرگم این مسئله را بمن ثابت نمود. پس هر کدام ما چند سال داشتیم؟

۶. بلیط‌های راه آهن. شرکت‌کنندهٔ بعدی، حرف‌های خودرا چنین شروع نمود. من بلیطفروش راه آهن هستم. بنظر اکثر کسان این یک کار ساده مینماید. حتی حدس نمیزنند بلیطفروش یک ایستگاه کوچک با چه تعداد زیاد بلیطها سر و کار دارد. آخر لازم است که مسافرین بتوانند از این ایستگاه تا هر ایستگاه دیگر در این خط، تازه هم در هر دو جهت، بلیط در یافت نمایند. من در خط راه آهنی کار میکنم که دارای ۲۵ ایستگاه



شکل ۲. «بلیط راه‌آهن میفروشم».

است. به عقیدهٔ شما در غرفهٔ بلیط فروشی هر ایستگاه چند نمونهٔ مختلف بلیط تهیه شده است؟

رئیس مجلس اعلام داشت:

— اکنون نوبت با شماست، رفیق خلبان.

۷. پرواز هلیکوپتر. — هلیکوپتری مستقیماً از لنینگراد به شمال پرواز کرد. پس از طی نمودن ۵۰۰ کیلومتر به سمت شمال، بطرف شرق پیچید. بعد از ۵۰۰ کیلومتر در این جهت بطرف جنوب پیچیده و در این سمت نیز ۵۰۰ کیلومتر طی نمود. سپس به طرف غرب پیچیده و پس از طی نمودن ۵۰۰ کیلومتر بزمین فرود آمد. سؤال میشود: در کدام جهت شهر لنینگراد هلیکوپتر فرود آمده است — در غرب، شرق، شمال یا جنوب؟

شخصی از جملهٔ آنان اظهار داشت: ما را ساده فکر کرده‌اید، — ۵۰۰ قدم به پیش، ۵۰۰ قدم بطرف راست، ۵۰۰ قدم به عقب و ۵۰۰ قدم بطرف چپ — به کجا میرسیم؟ واضح است از جائیکه حرکت کرده بودیم به همانجا میرسیم!

— پس، به عقیدهٔ شما هلیکوپتر در کجا فرود آمد؟

— در همان فرودگاه لنینگراد، از جائیکه پرواز کرده بود. آیا این طور نیست؟

— باور کنید که اینطور نیست.

— در این صورت من هیچ چیز نمی‌فهمم!

شخص پهلوی وی داخل صحبت شد: واقعاً در اینجا زیر کاسه نیم کاسه‌ای است. مگر هلیکوپتر در لنینگراد فرود نیامده است؟.. ممکن است یکبار دیگر سوألتانرا تکرار کنید؟

خلبان با کمال میل خواهش‌را پذیرفت. همهٔ حاضرین دقیقاً به حرفهای وی گوش دادند و از حیرت بطرف یکدیگر نگاه نمودند.

رئیس مجلس اعلام نمود: به هر صورت، تا شام برای تفکر در بارهٔ این مسئله وقت داریم و حالا ادامه میدهیم.

۸. سایه. — سوأل‌کنندهٔ بعدی گفت: لطفاً به من نیز اجازه بدهید بعنوان موضوع معمای خود، هلیکوپتر را انتخاب کنم. کدام یک وسیعتر است: هلیکوپتر و یا سایهٔ مطلق آن؟

— این تمام معمای شماست؟

— بلی.

دفعتاً حل معما داده شد: البته که سایه نسبت به هلیکوپتر وسیع‌تر است: آخر اشعهٔ آفتاب بصورت بادبزن دستی متباعد میشود.

— شخص دیگری با لحن اعتراض‌آمیز گفت: به عقیدهٔ من اشعهٔ آفتاب، برعکس، موازی بوده و سایه و هلیکوپتر عرض مساوی دارند.

— شما چه میگوئید؟ آیا شما اشعهٔ متباعد آفتابی را که پشت ابرها پنهان باشد هرگز ندیده‌اید؟ آنگاه میتوان کاملا یقین کرد که اشعهٔ آفتاب فوق‌العاده متباعد میشود. سایهٔ هلیکوپتر باید به مراتب بزرگتر از خود هلیکوپتر باشد، مانند اینکه سایهٔ ابر از خود آن بزرگتر است.

— پس چرا معمولا عقیده بر اینست که اشعهٔ آفتاب موازی است؟ ملاحین و ستاره شناسان — همه چنین نظری دارند...

رئیس مجلس اجازه نداد مباحثه طولانی شود و رشتهٔ سخن‌را به شخص بعدی داد.

۹. مسئله کبریت. سخنگوی بعدی تمام چوبهای کبریت‌را از قوطی آن بیرون ریخته و آنهارا روی میز به سه قسمت تقسیم نمود.

سامعین بشوخی گفتند: میخواهید آتش بیافروزید؟

— نه خیر، معمای من با کبریت خواهد بود. اینست سه توده نابرابر کبریت. هر سه توده با هم دارای ٤٨ کبریت است. اینکه در هر کدام چند است، من برایتان نمیگویم. ولی بخاطر داشته باشید که اگر از تودهٔ اول به تودهٔ دوم آنقدر کبریت علاوه شود که قبلا در توده دوم وجود داشت و سپس از تودهٔ دوم به تودهٔ سوم بتعداد کبریت‌هائی که قبلا در تودهٔ سوم وجود داشت افزوده شود و بالاخره هرگاه از تودهٔ سوم بتعداد کبریت‌هائی که در آنزمان در تودهٔ اول موجود بود، به تودهٔ اول علاوه شود، آنوقت تعداد کبریت‌ها در هرسه توده مساوی خواهد بود. پس در هر توده از اول چند کبریت وجود داشت؟

۱۰. کندهٔ درخت متقلب. معماگوی بعدی معمایش‌را چنین آغاز کرد: این معما مشابه به سؤالیست که مدت‌ها قبل ریاضی‌دان یک مدرسهٔ دهاتی برای من طرح کرده بود.

این معما یک داستان کامل و تا اندازه‌ای دلچسپ بود. دهقانی در جنگل با پیرمردی رو برو گردیده و شروع به صحبت کردند. پیرمرد دقیقاً به سراپای دهقان نظر انداخته گفت:

— در این جنگل من کندهٔ درخت تعجب‌آوری را سراغ دارم که به نیازمندان خیلی کمک میکند.

— چطور کمک میکند؟ معالجه میکند؟

— معالجه نمیکند اما پول‌را دوچندان میسازد. در زیر آن کیسهٔ پولی میگذاری و تا صد میشماری آنوقت پولی که در کیسه وجود داشت دوچندان میشود. چنین خاصیتی‌را دارد. کنده‌ای عالی است!

دهقان با لحنی پرآرزو گفت: آیا نمیشود من آزمایش کنم؟

— چرا، این امر ممکن است. منتها باید پول پرداخت کنید.

— به که پرداخت کنم؟ و چقدر؟

— پول‌را به کسی پرداخت کنید که راه را بشما نشان میدهد. یعنی به من. و اما در مورد مقدار آن صحبت علیحده‌ای خواهد بود. شروع به چانه زدن کردند. پیرمرد با فهمیدن اینکه در کیسهٔ دهقان پول زیاد وجود ندارد موافقت نمود که پس از هر مرتبه که پول دوچندان شد یک روبل و ۲۰ کوپک به وی پرداخت شود. بدینترتیب کنار آمدند.

پیرمرد دهقانرا بداخل جنگل راهنمائی کرده و پس از جستجوی زیاد، کندهٔ پیر و پر از خزهٔ درخت صنوبررا پیدا نمود. کیسهٔ پول‌را از دست دهقان گرفته و در بین ریشه‌های کنده فرو برد. تا صد شمردند. پیرمرد دوباره در بین ریشه‌های درخت شروع به جستجو کرد و بالاخره از آنجا کیسه‌را کشید و به دهقان سپرد.

دهقان به درون کیسه‌اش نظر انداخته دید که واقعاً پول آن دوچندان شده است. حسب وعده از آن مبلغ یک روبل و ۲۰ کوپک را به پیرمرد تحویل داد و خواهش کرد تا کیسه‌اش‌را دوباره به زیر این کندهٔ معجزه‌آسا بگذارد.

باز هم تا صد شمردند، باز هم پیرمرد شروع به لولیدن در ریشه‌های کنده درخت نمود و باز هم معجزه صورت گرفت: پول در کیسه دوچندان گردیده بود! پیرمرد دومرتبه یک روبل و ۲۰ کوپک موعودرا حاصل کرد.

برای بار سوم کیسه‌را در زیر کندهٔ درخت پنهان کردند و اینبار هم پول دوچندان گردید. اما وقتی دهقان حق‌الزحمه را به پیرمرد پرداخت نمود، در کیسه دیگر یک کوپک هم باقی نماند. بیچاره دهقان در این معامله تمام پول‌هایش را از دست داد و مایوسانه جنگل‌را ترک نمود.

البته دوچندان شدن پول برای شما واضح است: پیرمرد بدون هدف هنگام جستجوی کیسه آنقدر معطلی ایجاد نمیکرد. اما میتوانید شما به سؤال دیگری جواب دهید: چه مبلغی در کیسهٔ دهقان قبل از بازی با کندهٔ متقلب وجود داشت؟

۱۱. <u>مسئلهٔ دمامبر</u>. شخص مسنی که نوبت معما گفتن باو رسیده بود شروع به حرف زدن کرد: من، رفقا، زبانشناس و از

هر گونه ریاضی دور هستم. به این لحاظ از من انتظار مسئله ریاضی‌را نداشته باشید. فقط میتوانم از رشته‌ای که با آن آشنائی دارم سؤال نمایم. اجازه بدهید معمائی مربوط به تقویم برایتان تقدیم کنم.

— خواهش میکنیم!

— ماه دوازدهم بزبان ما «دسامبر» نام دارد. آیا شما میدانید که «دسامبر» یعنی چه؟ این کلمه از کلمهٔ یونانی دکا (یعنی ده) اشتقاق شده است. همچنین کلمهٔ دکالیتر (ده لیتر) وغیره نیز مشتق این ریشه است. بدینترتیب ماه «دسامبر» باید ماه دهم میبود. این مغایرت‌را چگونه میتوان توجیه کرد؟

رئیس مجلس اعلام نمود: خب، حالا فقط یک معما باقی مانده است.

۱۲. شعبدهٔ حساب. — معمای من آخری یعنی دوازدهم است. بخاطر تنوع من بشما شعبدهٔ حساب نشان میدهم و از شما خواهش میکنم راز آنرا افشاء کنید. بگذار یکی از حاضرین، مثلاً شما رفیق رئیس، عدد سه‌رقمی دلخواهی را طوری بنویسد که از من مخفی باشد.

— آیا این عدد میتواند صفرهارا هم داشته باشد؟

— هیچ محدودیتی‌را قایل نیستم. هر عدد سه‌رقمی دلخواهی را که میلتان باشد بنویسید.

— خب، نوشتم، حالا چه؟

— همین عدد را یکبار دیگر در پهلوی آن بنویسید. واضح است که عدد شش‌رقمی حاصل میشود.

— نوشتم. عدد شش‌رقمی حاصل شد.

— حالا کاغذرا بکسی که از من دورتر نشسته است بدهید. و بگذار او این عدد شش‌رقمی‌را به هفت تقسیم نماید.

— گفتنش که آسان است: به هفت تقسیم کنید! شاید به هفت قابل تقسیم نباشد.

— غصه نخورید، بدون باقیمانده تقسیم میشود.

— شما عددرا نمیدانید و ضمناً مطمئن هستید که تقسیم میشود.

— اول تقسیم کنید، بعد حرف میزنیم.
— از طالع خوش شما، تقسیم شد.
— نتیجه را بدون اینکه بمن بگوئید به شخص پهلوبتان بدهید. او آنرا به ۱۱ تقسیم میکند.
— فکر میکنید باز هم شانس یاری کند و تقسیم شود؟
— تقسیم کنید، باقی‌مانده هم ندارد.
— حقیقتاً بدون باقی‌مانده تقسیم شد. حالا چه کنیم؟
— نتیجه را به نفر بعدی بدهید. آنرا مثلا به ۱۳ تقسیم میکنیم.
— مقسوم علیه را خوب انتخاب نکردید. کمتر عددی هست که بدون باقی‌مانده به ۱۳ تقسیم میشود. اما نه، بدون باقی‌مانده تقسیم شد. شما بسیار خوش‌شانس هستید!
— لطفاً ورق با نتیجه‌را به من بدهید منتها کاغذ را طوری تا کنید که عدد را نبینم.
بدون آنکه کاغذ را باز کند «شعبده باز» آنرا به رئیس تقدیم کرد.
— خواهش میکنم عددی‌را که شما انتخاب کرده بودید تحویل بگیرید. درست است؟
— رئیس پس از آنکه به کاغذ نظر انداخت با تعجب گفت: کاملا درست است! همانا این عددرا انتخاب کرده بودم...
اکنون چون لیست سخنگویان بپایان رسید و از طرف دیگر باران هم خوشبختانه تمام شده است اجازه بدهید پایان مجلس‌را اعلام نمایم. جواب تمام معماها امروز پس از صرف شام اعلام خواهد شد. یاد داشت‌هایتانرا با شرح حل مسائل میتوانید به من بسپارید.

شرح حل معماهای ۱ — ۱۲

۱. معمای سنجاب در مرغزار قبلا بطور کامل بررسی گردید. به حل معمای بعدی میپردازیم.

۲. اکثراً چنین میپندارند که ۸ کوپک در مقابل ۸ کندهٔ چوب یعنی بر اساس هر کنده‌ای ۱ کوپک پرداخت شده است.

این پندار درست نیست. این پول فقط در برابر یک سوم تعداد ۸ کنده چوب پرداخت شده است زیرا هر سه نفر یک اندازه از آتش استفاده نمودند. از اینجا نتیجه میشود که ۸ کنده چوب ۸×۳ یعنی ۲۴ کوپک قیمت‌گذاری گردید یعنی قیمت یک کنده چوب ۳ کوپک است.

اکنون به سهولت میتوان در یافت که طلب هر نفر چند کوپک است. به زینا در برابر ۵ کنده‌اش باید ۱۵ کوپک پرداخت شود لکن وی خودش هم به اندازهٔ ۸ کوپک از آتش استفاده نموده است لذا او باید ۸ — ۱۵ یعنی ۷ کوپک بگیرد. ماریا در برابر سه کنده چوب باید ۹ کوپک بگیرد ولی اگر ۸ کوپک را که از آتش استفاده نموده است از آن تفریق کنیم به وی ۸ — ۹ یعنی تنها یک کوپک میرسد.

بدینترتیب در صورت تقسیم عادلانه زینا باید ۷ کوپک، و ماریا ۱ کوپک بگیرند.

۳. به سوءال اول مبنی بر اینکه بعد از چند روز همزمان هر ۵ انجمن در مکتب حاضر میشوند ما بآسانی میتوانیم جواب بدهیم هرگاه کوچکترین عددی‌را پیدا نمائیم که بر ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ بدون باقی‌مانده قابل تقسیم باشد. به آسانی میتوان در یافت که عدد مطلوب ۶۰ است. یعنی در روز شصت و یکم دوباره همه انجمن‌ها در مکتب حاضر میشوند: فلزکاران پس از ۳۰ فاصلهٔ دوروزه، نجاران بعد از ۲۰ فاصلهٔ سه‌روزه، عکاسان پس از ۱۵ فاصلهٔ چهارروزه، شطرنجبازان پس‌از ۱۲ فاصلهٔ پنج‌روزه و آوازخوانان پس از ۱۰ فاصلهٔ شش‌روزه. قبل از ۶۰ روز، چنین روزی نمیتواند باشد. یک روز مشابه دیگر پس از ۶۰ روز دیگر یعنی در سه‌ماههٔ آینده خواهد بود.

بدینترتیب در جریان سه‌ماههٔ اول فقط یک روز اتفاق میافتد که تمام انجمن‌ها جهت دروس گرد هم میایند.

یافتن جواب سوءال دوم مبنی بر اینکه چند روز از دروس انجمنها خالی خواهد بود با زحمت بیشتر توأم است. برای تعیین چنین روزهائی باید به ترتیب تمام اعداد را از ۱ تا ۹۰ نوشت

و در این سلسله، روزهای کار انجمن فلزکاران‌را یعنی اعداد ۱، ۳، ۵، ۷، ۹ و غیره را خط زد. بعد روزهای کار نجاران یعنی ٤، ۷، ۱۰ وغیره‌را خط میزنیم. پس از آنکه روزهای کار عکاسان، شطرنجبازان و آوازخوانان خط خورد فقط آن روزهای سه‌ماهه‌ٔ اول خط نخورده باقی میماند که هیچیک از انجمن‌ها کار نکرد.

کسیکه این کار را اجراء کند یقین خواهد کرد که تعداد روزهائی که خالی از درس است در سه‌ماهه‌ٔ اول نسبتاً زیاد است: ۲٤. در ماه ژانویه تعداد آنها ۸ است یعنی روزهای ۲ — م، ۸ — م، ۱۲ — م، ۱٤ — م، ۱۸ — م، ۲۰ — م، ۲٤ — م و ۳۰ — م، در ماه فوریه ۷، و در ماه مارس ۹ روز از چنین روزهائی وجود دارد.

٤. هر دو نفر به تعداد مساوی عابرین را شمرده‌اند. در حالیکه شخصیکه در نزدیکی خانه ایستاده بود و عابرین را در هر دو سوی حرکت آنها میشمرد شخصیکه پس و پیش میرفت با تعداد دو برابر عابرین رو برو شده است.

میتوان طور دیگری نیز قضاوت کرد. زمانیکه آن یکی از شمارشگران که در پیاده‌رو پس و پیش میرفت بار اول نزد رفیق ایستادهٔ خود برگشت هر دوی آنها به تعداد مساوی عابرین‌را شمرده بودند زیرا هر عابری که از پهلوی شخص ایستاده گذشته بود سر راه (رفت یا برگشت) شخص گردش‌کننده نیز واقع شده است (و برعکس). هر مرتبه در راه بازگشت نزد رفیق ایستادهٔ خود، شخص گردش‌کننده همان تعداد عابرین‌را میشمرد که رفیق ایستادهٔ وی. عین این امر در پایان یک ساعت نیز، زمانیکه آنها برای آخرین دفعه با هم ملاقات کردند و نتیجهٔ شمارش را به یکدیگر اعلام نمودند، صورت گرفت.

۵. در نظر اول واقعاً چنین بنظر میآید که مسئله درست طرح نشده است: چنین مینماید که نوه و پدر بزرگ همسن هستند. اما بطوریکه حالا میبینیم شرط مسئله به آسانی برآورده میشود.

واضح است که نوه در سدهٔ بیستم متولد شده است. بنا بر

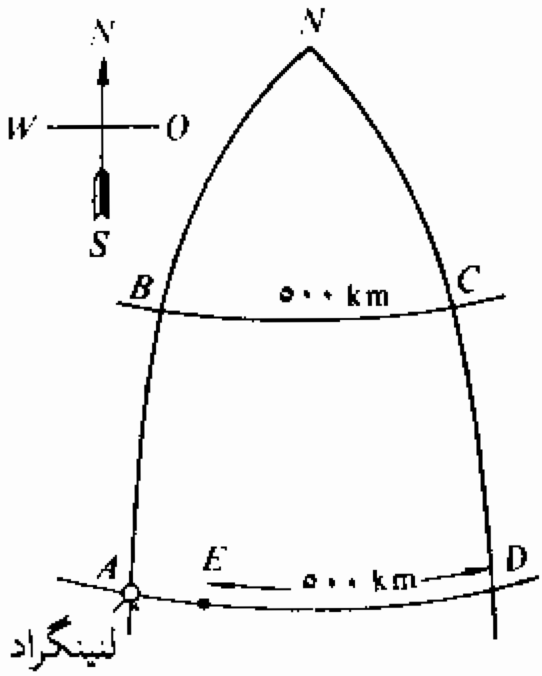
این، دو رقم اول سال تولدش ۱۹ است یعنی برابر با تعداد سده‌ها. عددیرا که سایر ارقام سال تولدش بیان میکنند پس از جمع شدن با خودش باید مساوی ۳۲ گردد. بنا بر این، این عدد ۱۶ است. بدینترتیب سال تولد نوه ۱۹۱۶، و در سال ۱۹۳۲، ۱۶ سال از عمرش گذشته بود. پدر بزرگش البته متولد قرن نوزده بوده است. بنا بر این، دو رقم اول سال تولدش ۱۸ است. دو برابر عددیکه با سایر ارقام سال تولدش بیان شده باید مساوی ۱۳۲ باشد. نتیجه اینکه خود این عدد نصفی از ۱۳۲ بوده و برابر ۶۶ است. بدینترتیب پدربزرگ در سال ۱۸۶۶ متولد گردیده و در سال ۱۹۳۲ سن، وی ۶۶ سال بود.

بدینترتیب در سال ۱۹۳۲ سن نوه و پدربزرگ مساوی با عددی بوده است که با دو رقم آخری سال تولد آنها بیان میشود.

۶. در هر یک از ۲۵ ایستگاه، مسافرین میتوانند برای هر ایستگاه دلخواه یعنی برای ۲٤ نقطه بلیط تقاضاء نمایند. بدینترتیب تعداد انواع مختلف بلیط که باید چاپ گردد برابر ۲۵ × ۲٤ = ٦۰۰ است.

هرگاه مسافرین حق خریداری بلیط‌های دوطرفه‌را نیز داشته باشند در آنصورت تعداد نمونه‌های بلیط دو برابر افزایش می‌یابد یعنی به ۱۲۰۰ میرسد.

۷. در این مسئله هیچ تضادی وجود ندارد. نباید فکر کرد که هلیکوپتر در مسیر محیط سربع پرواز نموده است: باید شکل کروی زمین‌را در نظر داشت. موضوع در اینست که خطوط نصف‌النهار در شمال با هم نزدیک میشوند (شکل ۳). به این لحاظ هلیکوپتر پس از طی نمودن ۵۰۰ کیلومتر در مدار موازی واقع در فاصلهٔ ۵۰۰ کیلومتری شمال مدار لنینگراد به تعداد درجه‌های بیشتر به طرف شرق رفته بود نسبت به پروازی که در مسیر معکوس کرد و دوباره در عرض جغرافیائی لنینگراد قرار گرفت. در نتیجه پس از پایان پرواز، هلیکوپتر از طرف شرقی در فاصله‌ای از لنینگراد فرود آمد.

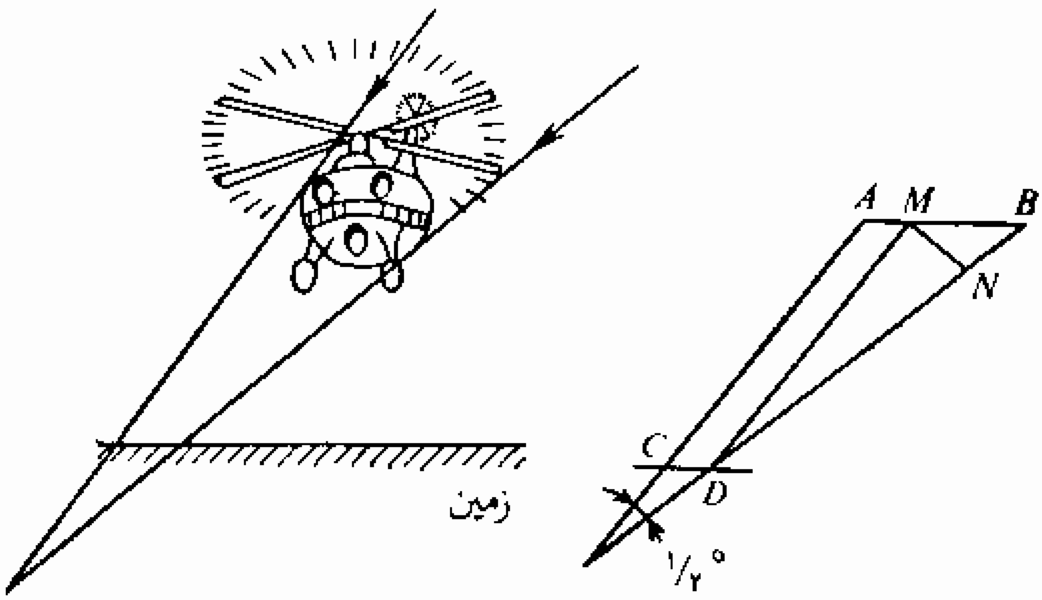


شکل ۳

اما دقیقاً در چه فاصله‌ای؟ این فاصله‌را میتوان محاسبه نمود. در شکل ۳ شما مسیر حرکت هلیکوپتر، $ABCDE$ را میبینید. نقطهٔ N قطب شمال است و خطوط نصف‌النهار AB و DC در این نقطه تلاقی میکنند. هلیکوپتر اولا ۵۰۰ کیلومتر به سمت شمال یعنی در مسیر نصف النهار AN پرواز نمود. چون یک درجهٔ نصف‌النهار معادل ۱۱۱ کیلومتر است پس کمان نصف النهار بطول ۵۰۰ کیلومتر حاوی $\frac{۵۰۰}{۱۱۱}\approx ۴,۵°$ میباشد. لنینیگراد در مدار °۶۰ واقع است لذا نقطهٔ B در عرض $۶۰° + ۴,۵° = ۶۴,۵°$ قرار دارد. سپس هلیکوپتر در جهت شرق یعنی در مسیر مدار BC فاصلهٔ ۵۰۰ کیلومتر را طی نمود. طول یکدرجهٔ این مدار را میتوان محاسبه نمود (و یا از جدول گرفت). آن تقریباً برابر با ۴۸ کیلومتر است. از اینجا به سهولت میتوان تعیین نمود که هلیکوپتر چند درجه به طرف شرق پرواز نموده است: $\frac{۵۰۰}{۴۸}\approx ۱۰,۴°$.

بعد هلیکوپتر سمت حرکتش را بطرف جنوب تغییر داده و در مسیر نصف النهار CD فاصلهٔ ۵۰۰ کیلومتر را طی نمود و باید دوباره در مدار لنینگراد قرار میگرفت. اکنون سمت حرکت به طرف غرب یعنی در مسیر AD میباشد. واضحست که ۵۰۰ کیلومتر این مسیر کوتاه‌تر از فاصلهٔ AD میباشد. فاصلهٔ AD دارای همان تعداد درجات است که فاصلهٔ BC دارد یعنی °۱۰,۴. اما طول هر درجه در عرض °۶۰ تقریباً ۵۵,۵ کیلومتر است. بنا بر این، فاصله بین A و D مساویست با $۵۵,۵ \times ۱۰,۴ \approx ۵۷۷$ کیلومتر.

ما می‌بینیم که هلیکوپتر نمیتوانست در لنینگراد فرود آید چون ۷۷ کیلومتر نرسیده بر فراز دریاچهٔ لادوژسکویه واقع شده بود و فقط روی آب میتوانست فرود آید.



شکل ٤

۸. شرکت‌کنندگان صحبت در بارهٔ این مسئله، مرتکب یک سلسله اشتباهات گردیدند. این مطلب که گویا اشعهٔ آفتاب که روی کرهٔ زمین می‌افتد بصورت قابل ملاحظه متباعد است درست نیست. زمین در مقایسه با فاصلهٔ آن تا آفتاب به اندازه‌ای کوچک است که اشعهٔ آفتاب که روی قسمتی از سطح آن میتابد به زاویهٔ غیر قابل ملاحظه کوچک متباعد میشوند و بنا بر این، اشعهٔ مذکور را عملا میتوان موازی شمرد. اینکه ما بعضی اوقات (هنگام به اصطلاح «تابش از پشت ابرها») اشعهٔ آفتاب را به شکل بادبزن متباعد میبینیم فقط نتیجهٔ دورنمائی است.

در اثر دورنمائی، خطوط موازی متقارب بنظر میرسد. برای مثال، منظرهٔ ریل‌ها و یا خیابان طویل مشجری را بخاطر آورید که بدور امتداد یافته است.

و اما از اینکه اشعهٔ آفتاب بصورت دستهٔ موازی روی زمین میتابد به هیچ وجه نتیجه نمیشود که سایهٔ مطلق هلیکوپتر مساوی به عرض خود آن است. با تماشای شکل ٤ شما در می‌یابید که سایهٔ مطلق هلیکوپتر در فضا در جهت زمین منقبض میگردد. و لذا سایه‌ایکه به زمین میافتد باید باریکتر از خود هلیکوپتر باشد: CD کوچکتر از AB است.

هرگاه ارتفاع پرواز هلیکوپتر را بدانیم میتوانیم این اختلاف‌را تعیین نمائیم. فرض کنیم هلیکوپتر در ارتفاع ۱۰۰ متر بالای

سطح زمین پرواز میکند. زاویه‌ای را که خطوط راست AC و BD تشکیل میدهند مساویست به زاویه‌ایکه تحت آن آفتاب از زمین روئیت میگردد. این زاویه معلوم است و تقریباً مساوی به ۱/۲ درجه میباشد. از طرف دیگر معلوم است هر شیئیکه تحت زاویهٔ ۱/۲ درجه دیده میشود بفاصلهٔ برابر با ۱۱۵ قطر خود از چشم قرار دارد. بدینترتیب، قطعه خط MN (این قطعه خط از سطح زمین تحت زاویهٔ ۱/۲ درجه دیده میشود) باید یکصد و پانزدهم AC را تشکیل دهد. اندازهٔ AC بزرگتر از فاصلهٔ عمودی نقطهٔ A تا سطح زمین است. هرگاه زاویه بین جهت اشعهٔ آفتاب و سطح زمین ۴۵ درجه باشد آنگاه AC (در حالیکه ارتفاع پرواز هلیکوپتر ۱۰۰ متر باشد) تقریباً ۱۴۰ متر خواهد بود و بنا بر این، قطعه خط MN مساویست به $\frac{۱۴۰}{۱۱۵} \approx ۱,۲$ متر.

اما اضافهٔ عرض هلیکوپتر نسبت به سایهٔ آن یعنی قطعه خط MB، از MN ۱,۴ مرتبه بزرگتر است زیرا زاویه MBD تقریباً مساوی به ۴۵ درجه است. لذا MB مساویست به ۱,۲×۱,۴ یعنی قریب ۱,۷ متر.

همهٔ مراتب فوق در مورد سایهٔ مطلق یا کاملا سیاه و واضح‌الحدود هلیکوپتر صدق میکند و با به اصطلاح نیمسایه که ضعیف و مبهم است هیچ ارتباطی ندارد.

ضمناً محاسبهٔ ما نشان میدهد که اگر بجای هلیکوپتر، با بادکنک اکتشافی هواشناسی با قطر کمتر از ۱,۷ متر سر و کار داشتیم به هیچ وجه سایهٔ مطلق‌را بر سطح زمین نمی‌انداخت و فقط نیمسایهٔ مبهم آن دیده میشد.

۹. این مسئله‌را از آخر حل میکنند. این نکته‌را مبدأ استدلال قرار میدهیم که پس از همهٔ جابجاشدگی‌ها تعداد کبریتها در توده‌ها با هم مساوی شده است. چون در نتیجهٔ این جابجاشدگی‌ها تعداد کلی کبریت‌ها تغییر نکرده و همان که بوده مانده (۴۸) پس در هر توده بعد از تمام جابجاشدگی‌ها ۱۶ عدد چوب کبریت از کار در آمده است.

بدینترتیب در آخرین مرحله داریم:

تودهٔ سوم	تودهٔ دوم	تودهٔ اول
۱۶	۱۶	۱۶

درست قبل از این به تودهٔ اول آنقدر کبریت علاوه گردید که قبلا در آن وجود داشت یا، بعبارت دیگر، تعداد کبریت‌ها در آن دوچندان شد. یعنی قبل از آخرین جابجاشدگی در تودهٔ اول نه ۱۶ کبریت بلکه فقط ۸ تا کبریت وجود داشت. و اما در تودهٔ سوم که از آن ۸ تا کبریت گرفته شد قبلا ۱۶ + ۸ = ۲۴ تا کبریت موجود بود.

اکنون کبریت‌ها بدینگونه به توده‌ها تقسیم شده است:

تودهٔ‌سوم	تودهٔ دوم	تودهٔ اول
۲۴	۱۶	۸

علاوه بر این، ما میدانیم که قبل از این از تودهٔ دوم به تودهٔ سوم همان تعداد کبریت علاوه شد که قبلا در تودهٔ سوم موجود بود. پس ۲۴ تعداد مضاعف کبریت‌هائی است که قبل از این جابجاشدگی در تودهٔ سوم وجود داشت. از اینجا تقسیمات کبریت‌هارا پس از جابجاشدگی اول در می‌یابیم:

تودهٔ سوم	تودهٔ دوم	تودهٔ اول
۱۲	۲۸ = ۱۲ + ۱۶	۸

به سهولت میتوان درک نمود که قبل از جابجاشدگی اول (یعنی قبل از آنکه از تودهٔ اول به تودهٔ دوم همان تعداد کبریت علاوه گردید که قبلا در تودهٔ دوم موجود بود) تقسیمات کبریت‌ها بدینگونه بود:

تودهٔ سوم	تودهٔ دوم	تودهٔ اول
۱۲	۱۴	۲۲

چنین بود تعداد اولیهٔ کبریت‌ها در توده‌ها.

۱۰. این معما نیز آسانتر است هرگاه از طرف آخر حل شود. ما میدانیم که پس از تضاعف سوم، در کیسه ۱ روبل و ۲۰ کوپک

موجود بود (این پول‌را پیرمرد برای آخرین بار حاصل کرد). اما قبل از این تضاعف، مقدار پول چقدر بود؟ واضح است که ۶۰ کوپک و این ۶۰ کوپک بعد از پرداخت ۱ روبل و ۲۰ کوپک برای دومین بار به پیرمرد، باقیمانده بود. اما قبل از پرداخت، در کیسه ۱ روبل و ۲۰ کوپک + ۶۰ کوپک = ۱ روبل و ۸۰ کوپک موجود بود.

حال، ۱ روبل و ۸۰ کوپک پس از تضاعف دوم در کیسه وجود داشت. و قبل از آن فقط ۹۰ کوپک در کیسه موجود بود که پس از پرداخت اولین ۱ روبل و ۲۰ کوپک به پیرمرد باقی مانده بود. از اینجا در می‌یابیم که قبل از پرداخت در کیسه ۹۰ کوپک + ۱ روبل و ۲۰ کوپک = ۲ روبل و ۱۰ کوپک موجود بود. همین مقدار پول بعد از اولین تضاعف در کیسه موجود بود. و اما قبل از آن، دو مرتبه کمتر یعنی ۱ روبل و ۵ کوپک بود. و این مقدار پولی است که با آن دهقان به این عملیات مالی غیر موفقانه خود شروع کرد.

جواب‌را امتحان میکنیم:

پول در کیسه:

پس از تضاعف اول... ۱ روبل و ۵ کوپک × ۲ = ۲ روبل و ۱۰ کوپک،

پس از پرداخت اول..... ۲ روبل و ۱۰ کوپک — ۱ روبل و ۲۰ کوپک = ۹۰ کوپک،

پس از تضاعف دوم... ۹۰ کوپک × ۲ = ۱ روبل و ۸۰ کوپک،

پس از پرداخت دوم.... ۱ روبل و ۸۰ کوپک — ۱ روبل و ۲۰ کوپک = ۶۰ کوپک،

پس از تضاعف سوم... ۶۰ کوپک × ۲ = ۱ روبل و ۲۰ کوپک،

پس از پرداخت سوم... ۱ روبل و ۲۰ کوپک — ۱ روبل و ۲۰ کوپک = صفر.

۱۱. تقویم اروپایی براساس تقویم رومیان قدیم بنا شده است. رومیان(تا ژولیوس سزار) شروع سال را نه در اول ژانویه بلکه در

اول ماه مارس قرار داده بودند. بنا بر این، در آن دوران دسامبر ماه دهم بود. پس از انتقال شروع سال به اول ژانویه اسامی ماهها تغییر نکرد. اختلاف کنونی بین اسامی و شماره ترتیبی بعضی ماه‌ها ناشی از این امر میباشد.

نام ماه	مفهوم نام ماه	شمارهٔ ترتیبی
سپتامبر	هفتم	۹
اکتبر	هشتم	۱۰
نوامبر	نهم	۱۱
دسامبر	دهم	۱۲

۱۲. عملیات معموله بر عدد مورد نظر را پی‌گیری میکنیم. قبل از همه در پهلوی آن، عدد سه‌رقمی انتخابی یک بار دیگر نوشته شد. این عمل معادل آنست که در پهلوی عدد مذکور سه صفر گذاشته، و بعد عدد اولیه اضافه شود. بطور مثال:

$$۸۷۲+۸۷۲۰۰۰=۸۷۲۸۷۲$$

حالا واضح است که با این عدد چه عملیاتی صورت گرفته است: آنرا ۱۰۰۰ مرتبه بزرگتر ساختند و بعد خود آنرا اضافه کردند. مخلص کلام اینکه عدد مذکور را در ۱۰۰۱ ضرب کردند. خوب، بعداً این حاصل‌ضرب چه شد؟ آن را بطور پی در پی بر ۷، بر ۱۱ و بر ۱۳ تقسیم نمودند. پس در نهایت امر آن را بر ۱۳×۱۱×۷ یعنی بر ۱۰۰۱ تقسیم کردند. بدینترتیب عدد مورد نظر را اولا در ۱۰۰۱ ضرب، و سپس بر ۱۰۰۱ تقسیم کردند. آیا میتوان تعجب کرد که در نتیجه همان عدد حاصل شد؟

قبل از اینکه فصل معماهای خانهٔ استراحت را بپایان برسانم راجع به سه معمای دیگر حساب حکایت میکنم که بکمک آنها شما میتوانید رفقایتانرا در موقع فراغت سرگرم نگهدارید. دو تا از آنها

مربوط به حدس زدن عدد، و سومی مربوط به پیدا کردن صاحبان اشیاء میباشد.

این معماها بسیار قدیمی بوده و شاید هم برایتان آشنا باشند ولی گمان نمیرود که پایه‌ٔ آنهارا همه بدانند. حال آنکه بدون دانستن پایه‌ٔ نظری معما نمیتوان آنرا آگاهانه و مطمئنانه انجام داد. توجیه دو معمای اول از ما ایجاب مینماید یک سیر کوچک و دور از خستگی‌را در قلمرو جبر ابتدائی انجام دهیم.

۱۳. رقم خط خورده. بگذار رفیق شما یک عدد چندرقمی مثلا ۸۴۷ را در ذهن خود انتخاب کند. به او پیشنهاد کنید که حاصل‌جمع ارقام این عدد یعنی $(۸ + ۴ + ۷) = ۱۹$ را پیدا نماید و آنرا از عدد مورد نظر تفریق کند. ماحصل عبارت است از

$$۸۴۷ - ۱۹ = ۸۲۸$$

بعد بگذار در عدد حاصله یکی از ارقام را خط بزند، تازه هم مهم نیست کدام یک را، و دو رقم دیگررا به شما بگوید. شما بلافاصله رقم خط خورده را باو میگوئید اگر چه عدد مورد نظر را نمی‌دانید و شاهد نبودید چه عملیاتی روی آن صورت گرفته بود.

به چه ترتیبی شما میتوانید این کاررا انجام دهید و کلید این معما چیست؟

این کار بطور بسیار ساده‌ای انجام میشود: رقمی را انتخاب میکنید که با حاصل‌جمع ارقام ابلاغی، نزدیکترین عددی را تشکیل دهد که بدون باقیمانده بر ۹ قابل تقسیم باشد. هرگاه بطور مثال در عدد ۸۲۸ رقم اول (۸) خط خورده و به شما ارقام ۲ و ۸ ابلاغ گردیده است آنگاه پس از جمع نمودن ۲ + ۸ شما در می‌یابید که تا نزدیکترین عدد قابل تقسیم بر ۹ یعنی تا عدد ۱۸، ۸ کم است. و همین هم رقم خط خورده است.

چرا اینطور میشود؟ به خاطر اینکه هرگاه از یک عدد حاصل‌جمع ارقام آن تفریق گردد عددی حاصل میشود که بر ۹ قابل تقسیم است و یا بعبارت دیگر عددیکه حاصل‌جمع ارقام آن بر ۹ قابل تقسیم میباشد. در واقع هم فرض میکنیم که در عدد مورد نظر، a رقم

صده‌ها، b رقم دهه‌ها و c رقم آحاد باشد. بنا بر این، تعداد آحاد در این عدد عبارت است از

$$۱۰۰\, a+۱۰\, b+c$$

از این عدد، حاصل‌جمع ارقام آن، $a+b+c$، را تفریق میکنیم. حاصل میکنیم:

$$۱۰۰\, a+۱۰\, b+c-(a+b+c)=۹۹\, a+۹\, b=۹\,(۱۱\, a+b)$$

اما واضح است که $(۱۱\, a+b)$ ۹ بر ۹ قابل تقسیم است. بنا بر این، پس از تفریق نمودن حاصل‌جمع ارقام یک عدد از خودش، همیشه عددی حاصل میگردد که بر ۹ بدون باقیمانده قابل تقسیم میباشد.

شاید چنین اتفاق افتد که خود حاصل‌جمع ارقام ابلاغ شده بر ۹ قابل تقسیم باشد (مثلا ٤ و ٥). این نشانگر آنست که رقم خط خورده یا صفر است و یا ۹. و شما باید به همین ترتیب جواب دهید: صفر یا ۹.

اینک شکل تغییر یافته این معما را می‌آوریم: بجای آنکه از عدد مورد نظر، حاصل‌جمع ارقام آنرا تفریق نمائید، میتوانید عددی را تفریق کنید که از عدد داده شده از طریق جابجا کردن ارقام آن حاصل شده باشد. مثلا از عدد ۸۲٤۷ میتوان عدد ۲۷٤۸ را تفریق کرد (هرگاه عدد حاصله بزرگتر از عدد مورد نظر باشد آنگاه عدد کوچکتر را از عدد بزرگتر تفریق نمائید). بعد بطوری عمل میکنید که قبلا گفته شد: ٥٤۹۹ = ۸۲٤۷ − ۲۷٤۸. هرگاه رقم ٤ خط خورده باشد پس شما با دانستن ارقام ٥، ۹، ۹ در می‌یابید که نزدیکترین به ۹ + ۹ + ٥ یعنی به ۲۳ عددی که بر ۹ قابل تقسیم باشد ۲۷ است. بنا بر این، عدد خط خورده ٤ = ۲۳ − ۲۷ است.

۱٤. دریافتن عدد بدون هیچگونه پرسشی. شما به رفیقتان پیشنهاد میکنید که یک عدد دلخواه سه‌رقمی را که رقم آخر آن صفر نباشد در نظر بگیرد (منتها عدد باید چنان باشد که اختلاف بین ارقام کناری آن از ۲ کمتر نباشد) و بعد خواهش میکنید که ارقام آنرا به ترتیب معکوس بگذارد. پس از اجرای این عمل او باید عدد

کوچکتر را از عدد بزرگتر تفریق نماید و حاصل تفریق را با خودش منتها به ترتیب معکوس ارقام آن جمع نماید. بدون آنکه از رفیقتان سؤالی کنید عدد حاصله را برایش میگوئید.

هرگاه بطور مثال عدد ٤٦٧ در نظر گرفته شود، رفیقتان باید عملیات ذیل را انجام دهد:

$$٤٦٧;\ ٧٦٤;\ -\begin{array}{r}٧٦٤\\ ٤٦٧\\ \hline ٢٩٧\end{array}\qquad +\begin{array}{r}٢٩٧\\ ٧٩٢\\ \hline ١٠٨٩\end{array}$$

شما هم این نتیجهٔ نهائی یعنی ١٠٨٩ را به رفیقتان اعلام میدارید. ولی چطور شما این عدد را پیدا میکنید؟

مسئله را به شکل کلی آن بررسی میکنیم. عددی را با ارقام a، b، c در نظر میگیریم بطوریکه رقم a حد اقل دو واحد بزرگتر از c باشد. این عدد چنین نوشته میشود:

$$١٠٠a+١٠b+c$$

عددیکه ارقام آن به ترتیب معکوس قرار دارند بشکل زیر است:

$$١٠٠c+١٠b+a$$

حاصل تفریق اعداد اولی و دومی مساویست با

$$٩٩a-٩٩c$$

تبدیلات زیر را انجام میدهیم:

$$٩٩a-٩٩c=٩٩(a-c)=١٠٠(a-c)-(a-c)=$$
$$=١٠٠(a-c)-١٠٠+١٠٠-١٠+١٠-a+c=$$
$$=١٠٠(a-c-١)+٩٠+(١٠-a+c)$$

یعنی حاصل تفریق از سه رقم زیر متشکل میباشد:

رقم صده‌ها: $a-c-١$،
رقم دهه‌ها: ٩،
رقم واحدها: $١٠+c-a$

عددیکه ارقام آن به ترتیب معکوس قرار دارند شکل زیر را بخود میگیرد :

$$۱۰۰(۱۰+c-a)+۹۰+(a-c-۱)$$

با جمع نمودن هر دو عبارت

$$\begin{array}{r} ۱۰۰(a-c-۱)+۹۰+۱۰+c-a \\ + \quad ۱۰۰(۱۰+c-a)+۹۰+a-c-۱ \end{array}$$

حاصل میکنیم :

$$۱۰۰\times۹+۱۸۰+۹=۱۰۸۹$$

بدینترتیب، اعم از چگونگی انتخاب ارقام a، b و c همیشه همان عدد ۱۰۸۹ حاصل میگردد. بنا بر این، حدس زدن نتیجه‌ٔ این محاسبات مشکل نیست زیرا از قبل برایتان معلوم بود.

واضح است که نباید این معما دو مرتبه به یک شخص نشان داده شود والا راز آن فاش میشود.

۱۵. کدام کس کدام چیز را گرفت؟ جهت نمایش این معمای جالب باید سه شییء کوچکی را که راحت در جیب جا بگیرد تهیه کنیم مثلا مداد، کلید و چاقوی قلمتراش. بعلاوه، در روی میز بشقابی حاوی ۲٤ دانه پسته‌را بگذارید و اگر احیاناً پسته وجود نداشت میتوانید از مهره‌های نرد، شطرنج و یا از چوبهای کبریت و غیره استفاده نمائید.

به سه رفیقتان پیشنهاد می‌کنید که در غیاب شما مداد، کلید و یا چاقوی قلمتراش را هر کی هر چه میخواهد به جیب بگذارند. شما ادعا میکنید که میتوانید بگوئید کدام شییء در جیب کدام کس قرار دارد.

روش دریافت جواب چنین است. پس از آنکه اشیاء در جیب های رفقا قرار گرفتند شما به اتاق بازگشت میکنید و به هر یک از آنان

از بشقاب پسته میدهید تا نگه دارند. به رفیق اولی یک دانه پسته، به دومی دو دانه و به سومی سه دانه پسته میدهید. بعد دوباره اتاق‌را ترک میکنید و این دستور را برای آنها میگذارید: هر یک از رفقا باید باز هم از بشقاب پسته بگیرند بطوریکه دارندهٔ مداد به اندازه‌ای که به او داده شده بود، دارندهٔ کلید دو بار بیشتر از تعدادیکه باو داده شده بود، و دارندهٔ چاقوی قلمتراش چهار بار بیشتر از تعداد پسته‌هائیکه به او داده شده بود بگیرد.

بقیهٔ پسته‌ها در بشقاب میمانند.

وقتیکه تمام این عملیات انجام یافت و بشما علامت داده شد که میتوانید به اتاق باز گردید، شما به بشقاب نگاهی میکنید و اعلام میکنید کدام چیز در جیب کدام کس است.

این معما رفقا را بیشتر باین علت به مخمصه میاندازد که بدون شرکت مددکار مخفی نمایش داده میشود که بتواند بطور نامشهود بشما علامت بدهد. هیچ فریبی در این معما وجود ندارد و سراپا بر اساس محاسبات حسابی مبتنی است. شما دارندهٔ هر شییء را فقط از روی تعداد پسته‌های باقیمانده پیدا میکنید. تعداد پسته‌های باقیمانده در بشقاب زیاد نیست، از ۱ تا ۷ است و با یک نگاه میتوان آنهارا شمرد. و اما چگونه با شمارش تعداد باقیماندهٔ پسته‌ها میتوان دریافت که کدام کس کدام چیز را گرفته است؟

بسیار ساده: با هر حالت توزیع اشیاء بین رفقا تعداد معین پسته‌های باقیمانده متناظر است. ما اکنون از این امر یقین حاصل میکنیم.

فرض میکنیم اسامی رفقای شما که یک، دو و سه دانه پسته دریافت کرده‌اند بترتیب، ولادیمیر، گیورگی و کنستانتین باشد. آنها را با حروف اول اسامی‌شان V، G و K نشان میدهیم. اشیاءرا نیز با حروف نشان میدهیم: مداد — a، کلید — b و چاقوی قلمتراش — c. چگونه سه شییء ممکن است بین سه نفر تقسیم گردد؟ به شش طریق ذیل:

V	G	K
a	b	c
a	c	b
b	a	c
b	c	a
c	a	b
c	b	a

واضح است که حالات دیگر نمیتواند وجود داشته باشد و جدول ما تمام حالات را در بر میگیرد.

حال ببینیم کدام باقیمانده با هر یک از شش حالت فوق متناظر است:

باقیمانده	حاصل جمع	تعداد پسته‌های گرفته شده	VGK
۱	۲۳	۱ + ۱ = ۲؛ ۲ + ٤ = ٦؛ ۳ + ۱۲ = ۱٥	abc
۳	۲۱	۱ + ۱ = ۲؛ ۲ + ۸ = ۱۰؛ ۳ + ٦ = ۹	acb
۲	۲۲	۱ + ۲ = ۳؛ ۲ + ۲ = ٤؛ ۳ + ۱۲ = ۱٥	bac
٥	۱۹	۱ + ۲ = ۳؛ ۲ + ۸ = ۱۰؛ ۳ + ۳ = ٦	bca
٦	۱۸	۱ + ٤ = ٥؛ ۲ + ۲ = ٤؛ ۳ + ٦ = ۹	cab
۷	۱۷	۱ + ٤ = ٥؛ ۲ + ٤ = ٦؛ ۳ + ۳ = ٦	cba

شما ملاحظه میکنید که در هر حالت، باقیماندهٔ پسته‌ها مختلف است. بنا بر این، با دانستن باقیمانده شما به سادگی درمی‌یابید که تقسیم اشیاء بین رفقایتان چگونه است. شما مرتبهٔ سوم اتاق‌را ترک گفته و در دفترچهٔ یادداشت خود به جدول مذکور در فوق نگاه میکنید (در حقیقت، فقط ستون اول و آخر جدول برایتان لازم

است). بخاطر داشتن جدول مشکل بوده و تازه هم لزومی ندارد. جدول به شما خبر میدهد که کدام شیء در جیب کدام کس قرار دارد. بطور مثال هرگاه در بشقاب ۵ دانه پسته باقی مانده باشد بمعنی آنست که (حالت bca) کلید نزد ولادیمیر، چاقوی قلمتراش نزد گیورگی و مداد نزد کنستانتین است.

برای اینکه معما باموفقیت نشان داده شوُد شما باید دقیقاً بخاطر داشته باشید که چند دانه پسته به هر رفیق دادهاید.

مظاهر ریاضی در بازیها

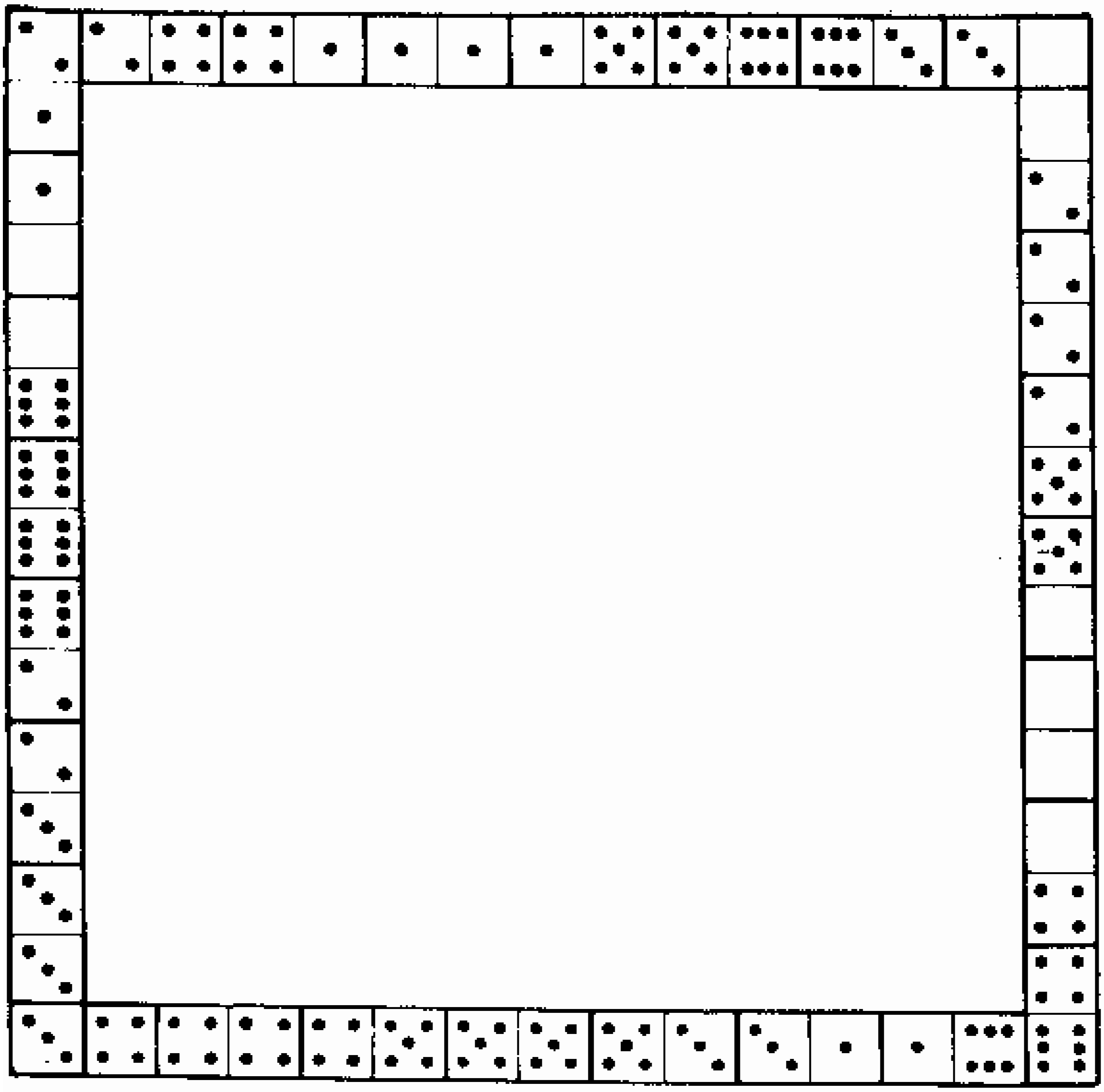
بازی دمینو

۱۶. زنجیری از ۲۸ مهرهٔ دمینو. چرا میتوان با رعایت قواعد بازی دمینو هر ۲۸ مهرهٔ آن را بصورت یک زنجیر ممتد ترتیب داد؟

۱۷. ابتدا و انتهای زنجیر. فرض میکنیم وقتیکه ۲۸ مهرهٔ دمینو در یک زنجیر ترتیب یافت در یکی از سرهای آن شمارهٔ ه قرار گرفته باشد.
در سر دیگر آن چه شماره‌ای قرار میگیرد؟

۱۸. شعبده بازی دمینو. رفیق شما یکی از مهره‌های دمینو را بر داشته و به شما پیشنهاد میکند که از ۲۷ مهرهٔ باقیمانده، زنجیر ممتدی را تشکیل دهید و ضمناً ادعا میکند که این امر همیشه ممکن است اعم از اینکه مهرهٔ بر داشته شده کدام باشد. و خودش به اتاق مجاور میرود تا زنجیر شمارا نبیند.
شما شروع بکار میکنید و قانع میشوید که حق بجانب رفیق شما است یعنی ۲۷ مهره در یک زنجیر ترتیب یافت. ولی تعجب‌آورتر اینست که رفیق‌تان از اتاق پهلو بدون آنکه زنجیرتان را دیده باشد اعلام میکند کدام شماره‌ها در دو سر آن قرار گرفته است.
چطور او این موضوع را میداند؟ و چرا او مطمئن است که از هرگونه ۲۷ مهرهٔ دمینو میتوان زنجیر ممتدی را تشکیل داد؟

۱۹. چهارچوب. در شکل ه چهارچوب مربعی ترسیم شده است که از مهره‌های دمینو با رعایت قواعد بازی تشکیل شده است. اضلاع چهارچوب از لحاظ طول مساوی ولی از لحاظ مجموع

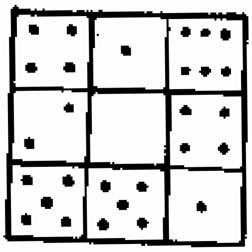


شکل ٥

نمراتشان مختلفند: اضلاع فوقانی و چپ حاوی ٤٤ خال و دو ضلع دیگر دارای ٥٩ و ٣٢ خال میباشد.

آیا شما میتوانید چنان چهارچوب مربعی‌را تشکیل بدهید که همهٔ اضلاع آن دارای مجموع‌های متساوی نمرات باشد یعنی هر یکی ٤٤ خال داشته باشد؟

٢٠. هفت مربع. چهار مهرهٔ دمینورا میتوان طوری انتخاب نمود که از آنها مربعی تشکیل گردد که مجموع نمرات در هر ضلع آن یکی باشد. (نمونهٔ آنرا میتوانید در شکل ٦ تماشا کنید: در همهٔ موارد، با جمع نمودن نمرات در هر ضلع مربع، عدد ١١ را حاصل میکنید.)



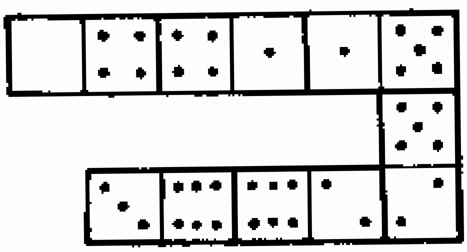
شکل ٦

آیا میتوانید از تمام مهره‌های دمینو در عین حال هفت مربع از این گونه را تشکیل دهید؟ ضمناً ضرور نیست که مجموع نمرات در هر یک از اضلاع تمام مربع‌ها یکی باشد. تنها شرط اینستکه مجموع نمرات در هر چهار ضلع هر مربع یکی باشد.

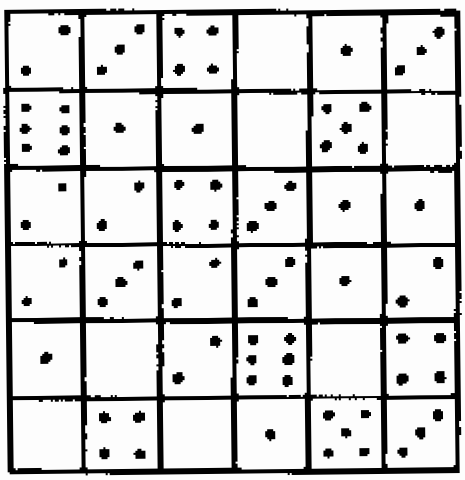
۲۱. مربعات معجزه‌آسا از دمینو. در شکل ۷ مربعی متشکل از ۱۸ مهرهٔ دمینو نشان داده شده است که مجموع نمرات در هر ردیف آن چه در امتداد عرض و طول و چه در امتداد قطر یکسان و مساوی به ۱۳ میباشد. چنین مربعاتی از قدیم‌الایام «معجزه‌آسا» نامیده میشوند.

به شما پیشنهاد میشود که چند مربع معجزه‌آسای ۱۸ مهره‌ای از همین گونه‌را تشکیل دهید منتها بطوریکه مجموع نمرات ردیف مخالف ۱۳ باشد. ناگفته نماند که در مربع معجزه‌آسای مشتمل بر ۱۸ مهره، کمترین و بزرگترین مجموع ردیف میتواند، بترتیب، ۱۳ و ۲۳ باشد.

۲۲. تصاعد از دمینو. شما در شکل ۸، ٦ مهرهٔ دمینو را مشاهده میکنید که مطابق با قواعد بازی گذاشته شده‌اند و فرق میان آنها اینست که تعداد خالها در مهره‌ها (در دو نیمه هر مهره)



شکل ۸



شکل ۷

یک واحد افزایش مییابد. رشته از ٤ شروع شده و متشکل از نمره‌های زیر میباشد:

٤; ٥; ٦; ٧; ٨; ٩

چنین رشته اعدادی که به همان مقدار افزایش (و یا کاهش) می‌یابد بنام «تصاعد حسابی» معروف است. در رشتهٔ ما هر عدد به اندازهٔ یک واحد از عدد ماقبل خود بزرگتر است ولی مقدار «اختلاف» در تصاعد ممکن است هر اندازه باشد.

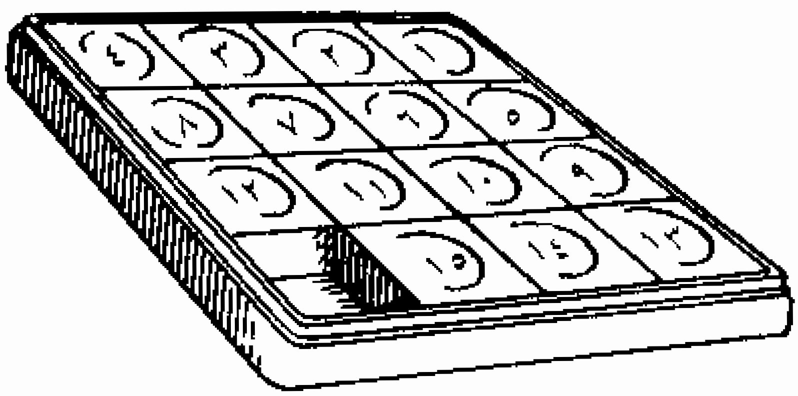
مسئله در آنست که چند تصاعد ٦ مهره‌ای دیگر نیز تشکیل شود.

نرد ١٥ مهره‌ای

با جعبهٔ دارای ١٥ مهرهٔ مربعی‌شکل شماره‌گذاری شده همه آشنا هستند. این جعبه تاریخچهٔ بس جالبی دارد که کمتر کسی از بازی‌کنان آنرا میداند. در بارهٔ این بازی از زبان پژوهشگر بازیها، ریاضیدان آلمانی و. آرنس نقل قول میکنیم.

«تقریباً نیم‌قرن پیش در اواخر سالهای ٧٠ در ایالات متحده بازی نرد ١٥ مهره‌ای سبز شد. این بازی بزودی پخش گردید و به خاطر اینکه تعداد بازی‌کنان آن بینهایت زیاد شده بود به بلای واقعی اجتماعی مبدل گردید.

«عین این صحنه در اینسوی اقیانوس در قارهٔ اروپا بنظر



شکل ٩. بازی ١٥.

میرسید. در اینجا حتی در وسایل حمل و نقل عمومی در دستهای مسافرین جعبهٔ دارای ۱۵ مهره دیده میشد. در دفاتر و مغازه‌ها مالکان از سرگرمی مستخدمین‌شان مأیوس گردیده و مجبور شدند آنهارا از این بازی در اوقات کار و تجارت منع کنند. صاحبان مؤسسات تفریحاتی و خوشگزرانی از این اشتیاق با مهارت استفاده نموده و مسابقات بزرگ را ترتیب میدادند.

این بازی حتی در تالارهای باشکوه پارلمان امپراطوری آلمان نفوذ کرد. زیگموند گونتر عالم مشهور جغرافیا و ریاضی که در سالهای اوج این بازی نمایندهٔ پارلمان بود بخاطر میاورد: «هنوز هم موسفیدانی را در ذهن خود میبینم که در تالار پارلمان نشسته و بادقت تام به جعبهٔ مربعی در دست‌هایشان نگاه میکنند».

یکی از نویسندگان فرانسوی مینویسد: «در پاریس این بازی در هوای آزاد، در خیابان‌ها پا گذاشته و بزودی از پایتخت به تمام ولایات سرایت کرد. هیچ خانه‌ای در دهکده‌های دوردست وجود نداشت که این عنکبوت در آنجا تار ندوانده باشد تا شکار بیچاره را قربانی خود سازد».

«در سال ۱۸۸۰ تب این بازی به نقطهٔ اوج رسید. ولی بزودی این ظالم بوسیلهٔ علم ریاضی خلع سلاح و مغلوب شد. نظریهٔ ریاضی این بازی ثابت نمود که از تعداد زیاد مسایل پیشنهادی فقط نصف آن قابل حل است و نصف دیگر آن هیچگونه حلی ندارد.

«واضح گردید که چرا بعضی مسایل علیرغم سرسختانه‌ترین مساعی حل نمیشدند و چرا ترتیب‌دهندگان مسابقات، جوایز بزرگ‌را برای حل کنندگان مسایل تعیین مینمودند. در این مورد مخترع این بازی که به ناشر یک روزنامهٔ چاپ نیویورک پیشنهاد نمود تا در شمارهٔ روز یکشنبه یک مسئله حل‌ناپذیر را با جایزهٔ ۱۰۰۰ دلار برای حل‌کنندهٔ آن بگنجاند، نسبت به همه برتری یافت. چون ناشر روزنامه در تردید بود مخترع آمادگی کامل خویشرا اعلام داشت که این مبلغ را از جیب خود سپردازد. این مخترع ساموئل لوید نام داشت. او بعنوان طراح مسائل جالب و معمی‌های متعدد شهرت وسیعی یافته بود. جالب است که گرفتن سند ثبت اختراع این بازی در امریکا برای وی میسر نبود. مطابق دستورالعمل وی باید «مدل

قابل کار» را جهت ساخت پارتی آزمایشی ارائه میداد. او مسئله‌را به مامور ثبت اختراعات پیشنهاد کرد و هنگامیکه مامور سوٴال کرد که آیا این مسئله قابل حل است یا خیر، مخترع مجبور شد چنین جواب دهد: «نه خیر، از نقطهٔ نظر ریاضی این امر امکان‌ناپذیر است». جواب رد این بود که «در اینصورت ساختن مدل قابل کار نیز ناممکن است و بدون مدل صدور سند ثبت اختراع هم مجاز نیست». لوید به این قطع‌نامه قناعت نمود ولی گمان میرود او بیشتر اصرار میکرد اگر موفقیت بینظیر اختراع خود را پیش‌بینی کرده بود*».

اکنون حکایت خود مخترع بازی را راجع به بعضی وقایع از تاریخچهٔ آن نقل قول میکنیم:

لوید مینویسد: «با سابقه‌ترین علاقه‌مندان سلطنت تیزهوشی به یاد دارند که چگونه در اوائل سالهای ۷۰ من تمام جهانیان را مجبور ساختم روی جعبهٔ مهره‌های متحرک که بنام «بازی ۱۵» مسمی گردید سر خود را بدرد آورند (شکل ۱۰). ۱۵ مهره بازی را در جعبهٔ مربع به ترتیب درست چیده بودند و تنها جای مهره‌های شمارهٔ ۱٤ و ۱۵ را بطوریکه در شکل ۱۱ دیده میشود عوض کرده بودند. مسئله در آن بود که بازی‌کنندگان با حرکت دادن پی در پی مهره‌ها آنها را بشکل عادی در آورده و ضمناً ترتیب مهره‌های شماره ۱٤ و ۱۵ را نیز عادی کنند.

«جایزهٔ هزار دلاری را که در برابر اولین حل درست این

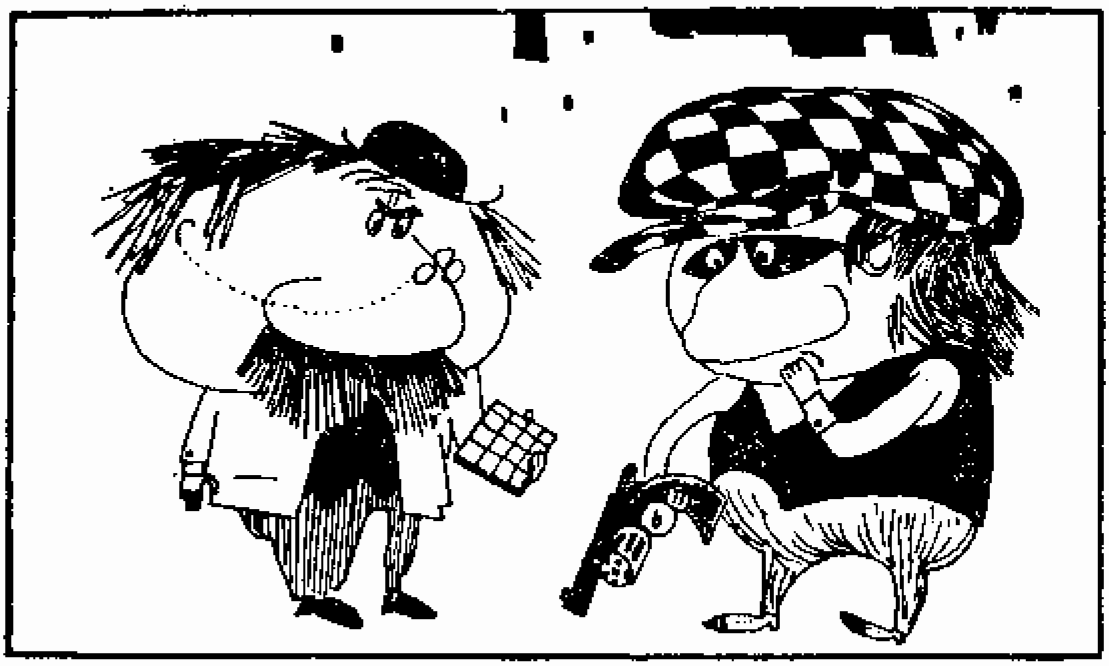
٤	٣	٢	١
٨	٧	٦	٥
١٢	١١	١٠	٩
	١٥	١٤	١٣

شکل ۱۰

٤	٣	٢	١
٨	٧	٦	٥
١٢	١١	١٠	٩
	١٤	١٥	١٣

شکل ۱۱

* از این واقعه در رمان مارک تواین بنام «مدعی امریکائی» استفاده شده است.



شکل ۱۲. «...مامورین محترمی که شبها تا صبح پای تیر چراغ ایستاده بودند...»

مسئله پیشنهاد شده بود به هیچ کس تعلق نگرفت اگر چه همگان به صورت خستگی‌ناپذیر مشغول حل این مسئله بودند. حکایات جالب در بارهٔ مغازه‌دارانی که به این خاطر فراموش میکردند مغازه‌های خودرا باز کنند یا در بارهٔ مامورین جاافتاده‌ایکه تمام شب در زیر چراغهای خیابانی ایستاده و راه حل این مسئله را جستجو میکردند از همه طرف بگوش میرسید. هیچ کس نمیخواست از جستجوی راه حل مسئله منصرف شود زیرا همه اطمینان داشتند که بالاخره موفق خواهند شد. میگویند کشتی‌رانان بخاطر این بازی کشتی‌هایشانرا به پایاب راه میدادند، رانندگان قطارهای راه‌آهن بدون توقف از ایستگاه رد میشدند، کشاورزان گاوآهن‌هایشانرا ول میکردند».

حالا خواننده را با اصول نظری این بازی آشنا میسازیم. این نظریه بصورت کامل خود خیلی پیچیده بوده و با یکی از بخش‌های جبر عالی («نظریهٔ مبین‌ها *») قرابت نزدیک دارد. ما فقط به بعضی ملاحظاتی که توسط و. آرنس مطرح گردیده است اکتفاء مینمائیم.

---

* مبین را دترمینان هم میگویند (مترجم).

«معمولا هدف بازی آن است که از طریق حرکت دادن پی در پی مهره‌ها بفراخور جای آزاد، هرگونه حالت اولیهٔ ۱۵ مهره به حالت عادی در آورده شود یعنی به حالتی که مهره‌ها به ترتیب شماره‌های خود قرار گیرند: در گوشهٔ راست بالا — ۱، به طرف چپ — ۲، سپس — ۳، بعد در گوشهٔ چپ بالا — ٤، در ردیف بعدی از راست به چپ، ٥، ٦، ٧، ۸ و غیره. چنین حالت عادی در شکل ۱۰ نشان داده شده است.

«اکنون حالتی‌را تصور کنید که ۱٦ مهره بی نظم و ترتیب قرار گرفته باشند. پس از یک سلسله حرکت دادن‌ها میتوانیم مهرهٔ شمارهٔ ۱ را به حالتی در آوریم که در شکل نشان داده شده است.

«به همان ترتیب میشود مهرهٔ شماره ۲ را بدون دست زدن به مهرهٔ شمارهٔ ۱ در جای مجاور طرف چپ قرار داد. سپس بدون آنکه به مهره‌های شمارهٔ ۱ و ۲ دست بزنیم میتوانیم مهره‌های شمارهٔ ۳ و ٤ را به حالت عادی در آوریم: هرگاه تصادفاً آنها در دو ستون عمودی آخری قرار نداشته باشند میتوان بآسانی آنهارا به این محل آورد و سپس با یک سلسله حرکت دادن‌ها به حالت مطلوب رسید. اکنون که سطر بالائی مهره‌های شمارهٔ ۱، ۲، ۳، ٤ سر و سامان پیدارد ضمن عملیات بعدی روی مهره‌ها ما به این ردیف دست نمیزنیم. به همان ترتیب کوشش میکنیم سطر دوم مهره‌های شمارهٔ ٥، ٦، ٧، ۸ را به ترتیب عادی در آوریم. بآسانی میتوان دید که این امر همیشه قابل اجراء میباشد. بعد باید مهره‌های شمارهٔ ۹ و ۱۳ را در فضای دو ردیف آخر به حالت عادی آورد. این امر نیز همیشه ممکن است. از تمام مهره‌های ۱، ۲، ۳، ٤، ٥، ٦، ٧، ۸، ۹ و ۱۳ که به حالت عادی قرار گرفته اند هیچیک را از جایش تکان نمیدهیم. فضای کوچکی مشتمل بر شش خانه باقی میماند که از آنجمله یک خانه خالی و در پنج خانهٔ دیگر مهره‌های شمارهٔ ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱٤ و ۱٥ به ترتیب دلخواه قرار دارند. در حدود این فضای شش‌خانه‌ای همیشه میتوان مهره‌های شمارهٔ ۱۰، ۱۱، ۱۲ را به حالت عادی در آورد. پس از آنکه این عمل هم انجام گرفت در ردیف آخر، مهره‌های شمارهٔ ۱٤ و ۱٥ یا به ترتیب عادی قرار میگیرند و یا بر عکس (شکل ۱۱). از این طریق که

خوانندگان به آسانی میتوانند آنرا عملی کنند ما به نتیجهٔ زیر میرسیم.
«هر حالت اولیه را میتوان یا به حالت شکل ۱۰ (حالت ۱) و یا به حالت شکل ۱۱ (حالت ۲) در آورد.

«هرگاه یک حالت که به خاطر اختصار آنرا با حرف S نشان میدهیم قابل تبدیل به حالت ۱ باشد پس معلوم است که عکس آن نیز امکان‌پذیر است یعنی تبدیل حالت ۱ به حالت S. زیرا تمام حرکات مهره‌ها برگشت‌پذیر میباشد: بطور مثال هرگاه ما بتوانیم در طرح ۱، مهرهٔ شمارهٔ ۱۲ را در خانهٔ خالی قرار دهیم آنگاه میتوانیم با حرکت در جهت معکوس مهرهٔ مذکور را به جای اولیه‌اش باز گردانیم.

«بدینترتیب ما با دو سلسله حالت‌ها سر و کار داریم که حالات یکی را میتوان به حالت عادی ۱، و حالات دیگری را به حالت ۲ آورد. و برعکس، از حالت عادی میتوان هرگونه حالت سلسلهٔ اول را، و از حالت ۲، هرگونه حالت سلسلهٔ دوم را بدست آورد. بالاخره هرگونه دو حالت متعلق به همان سلسله قابل تبدیل متقابل میباشند.

«آیا ممکن نیست جلو برویم و این دو حالت ۱ و ۲ را با هم متحد سازیم؟ میتوان بطور قطعی ثابت نمود (ما وارد تفصیلات نمیشویم) که این دو حالت با هیچ تعداد حرکت‌ها قابل تبدیل متقابل نیستند. بنا بر این، تعداد هنگفت حالات مهره‌ها به دو سلسلهٔ جدا از هم تقسیم میشود:

۱ — حالاتی که قابل تبدیل به حالت عادی ۱ بوده و قابل حل میباشند،

۲ — حالاتی که قابل تبدیل به حالت ۲ بوده و لذا تحت هیچ شرایط به حالت عادی تبدیل نمی‌گردند یعنی حالاتی که حل کنندهٔ آنها مستحق جایزهٔ بزرگ میشد.

«چگونه میتوان دانست که آیا حالت داده شده به سلسلهٔ اولی متعلق است و یا به دومی؟ مثال زیر جواب این سوٴال را میدهد.

«حالت ذیل را در نظر میگیریم.

«ردیف اول به حالت عادی بوده و ردیف دوم نیز به جز آخرین مهره (شمارهٔ ۹) حالت عادی را دارد. این مهره جائی را اشغال کرده که در حالت عادی باید مهرهٔ شمارهٔ ۸ اشغال کند. پس، مهرهٔ

شمارهٔ ۹ قبل از مهرهٔ شماره ۸ واقع شده است: این سبقت از حالت عادی را «بی‌نظمی» میگویند. راجع به مهرهٔ شماره ۹ ما میگوییم که در اینجا یک بی‌نظمی وجود دارد. با بررسی مهره‌های بعدی، ما متوجه سبقت مهرهٔ شمارهٔ ۱۴ میشویم. این مهره سه مقام (مهره‌های شمارهٔ ۱۲، ۱۳، ۱۱) قبل از جای عادی خود قرار گرفته است. در اینجا سه بی‌نظمی وجود دارد (۱۴ قبل از ۱۲؛ ۱۴ قبل از ۱۳ و ۱۴ قبل از ۱۱). در مجموع ما ۴ = ۳ + ۱ بی‌نظمی را بحساب آوردیم. گذشته از این، مهرهٔ شماره ۱۲ قبل از شمارهٔ ۱۱، و مهرهٔ ۱۳ نیز قبل از مهرهٔ ۱۱ قرار دارد. این امر دو بی‌نظمی دیگر را بدست میدهد. مجموعاً ما با شش بی‌نظمی مواجه هستیم. بدینترتیب در هر حالت تعداد کل بی‌نظمی‌ها را تعیین می‌نمائیم، البته قبلا آخرین جا را در گوشهٔ پایین چپ خالی میسازیم. هرگاه تعداد کل بی‌نظمی‌ها، مانند حالت بررسی شده، زوج باشد آنگاه این حالت به حالت عادی قابل تبدیل است. بعبارت دیگر، این حالت به سلسلهٔ قابل حل متعلق است. هرگاه تعداد بی‌نظمی‌ها فرد باشد آنگاه چنین حالتی به سلسلهٔ دوم، یا غیر قابل حل، متعلق است (هرگاه تعداد بی‌نظمی‌ها مساوی صفر باشد آنگاه بعنوان تعداد زوج بشمار میرود).

«در پرتو توضیحات ریاضی این بازی، آن ذوق‌زدگی تب‌دار پیشین اکنون مفهومی ندارد. علم ریاضی نظریهٔ جامع این بازی‌را بوجود آورده است، نظریه‌ایرا که از هرگونه ابهام مبری است. نتیجهٔ این بازی، بر خلاف بازی‌های دیگر، به هیچگونه اتفاق یا زرنگی بستگی نداشته بلکه تابع عوامل صرفاً ریاضی میباشد که آن را با صحت قطعی مشخص میسازند».

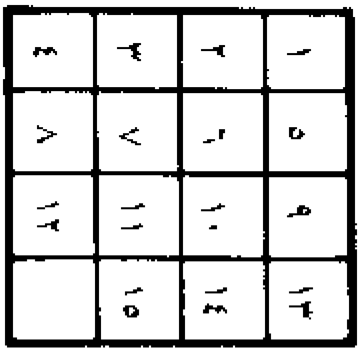
حال، به معماهای مربوط به این رشته روآور میشویم.

اینک چند مسئلهٔ قابل حل می‌آید که توسط مخترع بازی پیشنهاد شده است:

۲۳. مسئله اول لوید. بر اساس حالت شکل ۱۱ مهره‌ها را طوری به حالت عادی در آورید که در گوشهٔ راست بالا، خانهٔ خالی باشد (شکل ۱۳).

۳	۲	۱	
۷	٦	۵	٤
۱۱	۱۰	۹	۸
۱۵	۱٤	۱۳	۱۲

شکل ۱۳



شکل ۱٤

۲٤. مسئلهٔ دوم لوید. بر اساس حالت شکل ۱۱، جعبه را به اندازهٔ یک ربع دور چرخانیده و مهره‌ها را تا موقعیکه بحالت شکل ۱٤ در آیند حرکت دهید.

۲۵. مسئلهٔ سوم لوید. مطابق با مقررات بازی مهره‌ها را از حالت شکل ۱۱ حرکت داده و جعبه‌را به «مربع سحرآمیز» تبدیل نمائید یعنی مهره‌ها را طوری ترتیب دهید که جمع اعداد در هر جهت مساوی ۳۰ باشد.

کروکت

وقتی که ما با معماهای مربوط به دمینو و بازی ۱۵ سر و کار داشتیم پا بیرون از حدود علم حساب ننهاده‌ایم. ولی با مراجعه به معماهای روی میدان کروکت، ما تا اندازه‌ای به قلمرو هندسه وارد میشویم.

پنج مسئلهٔ ذیل را به بازی کنان کروکت پیشنهاد میکنم.

۲٦. باید گوی را به دروازه زد یا به گوی دیگر؟ دروازهٔ کروکت شکل مربع مستطیل دارد. عرض آن دو برابر قطر گوی میباشد. در چنین شرایطی کدام یک آسانتر است: گوی را پاک به دروازه بزنیم یعنی بدون اینکه به سیم‌ها تماس پیدا کند یا اینکه از همان فاصله آن را به گوی دیگر بزنیم؟

۲۷. گوی و تیرک. ضخامت قسمت پائینی تیرک کروکت ۶ سانتی‌متر، و قطر گوی ۱۰ سانتی‌متر است. زدن به گوی دیگر از زدن به تیرک واقع در همان فاصله چند برابر آسانتر است؟

۲۸. باید گوی‌را به دروازه یا به تیرک زد؟ قطر گوی دو برابر کمتر از عرض دروازهٔ راست‌گوشه و دو برابر بیشتر از قطر تیرک است. کدام یک آسانتر است: از بهترین موضع، گوی را پاک به دروازه، یا از همان فاصله به تیرک بزنیم؟

۲۹. باید گوی را به تلهٔ موش زد یا به گوی دیگر؟ عرض دروازهٔ راست‌گوشه سه برابر قطر گوی است. کدام یک آسانتر است: از بهترین موضع، گوی را پاک به تلهٔ موش یا، از همان فاصله، به گوی دیگر بزنیم؟

۳۰. تلهٔ موش غیر قابل عبور. به ازای کدام تناسب بین عرض دروازهٔ راست‌گوشه و قطر گوی عبور گوی از تلهٔ موش ناممکن میشود؟

شرح حل معمی‌های ۱۶ — ۳۰

۱۶. جهت سادگی مسئله عجالتاً هر هفت مهرهٔ دوگانه را کنار میگذاریم: ۰ — ۰، ۱ — ۱، ۲ — ۲ و غیره. ۲۱ مهره باقی میماند که در آنها هر شماره ۶ بار تکرار میشود. بطور مثال نمرهٔ ٤ (در یک نیمه) در شش مهرهٔ ذیل وجود دارد:

٤ — ۰، ٤ — ۱، ٤ — ۲، ٤ — ۳، ٤ — ۵، ٤ — ۶

بدینترتیب ما میبینیم که هر نمره تعداد دفعات زوج تکرار میشود. واضح است که مهره‌های این مجموعه را میتوان یکی پس از دیگری تا تمام شدن ذخیرهٔ آنها بنحوی قرار داد که نمره‌های مجاور هر جفت مهره یکی باشد. پس از انجام این عمل، وقتیکه ۲۱ مهرهٔ ما بصورت زنجیر پیوسته‌ای قرار داده شد، لای درزهای ۰ — ۰، ۱ — ۱،

۲ — ۲ و غیره آن هفت مهرهٔ دوگانه را که کنار گذاشته بودیم جا میدهیم. بعد از این، هر ۲۸ مهرهٔ دمینو مطابق مقررات بازی در یک زنجیر واقع میشوند.

۱۷. بآسانی میتوان نشان داد که زنجیر متشکل از ۲۸ مهرهٔ دمینو باید به همان نمره منتهی گردد که در ابتدای آن است. حقیقتاً اگر اینطور نمیبود در آنصورت نمرات دو انتهای زنجیر تعداد فرد مرتبه تکرار میشد (زیرا در داخل زنجیر نمرات جفت جفت قرار دارد) ولی ما میدانیم که در مجموعهٔ کامل مهره‌های دمینو هر نمره ۸ بار تکرار میشود یعنی تعداد زوج مرتبه. بنا بر این، فرضیهٔ ما در بارهٔ نمرات متفاوت در دو سر زنجیر اشتباهی میباشد و نمرات باید مساوی باشد. (این طریقهٔ استدلال را در ریاضیات بنام «اثبات از طریق ادعای عکس قضیه» گویند.)

ضمناً از خاصیت تازه اثبات شدهٔ زنجیر نتیجهٔ جالب ذیل نیز ناشی میشود: دو سر زنجیر ۲۸ مهره‌ای را همیشه میتوان بهم رسانید و حلقه‌ای حاصل کرد. یعنی مجموعهٔ کامل مهره‌های دمینو را میتوان با رعایت مقررات بازی نه تنها بصورت زنجیری با سرهای آزاد بلکه بصورت حلقهٔ بسته‌ای نیز ترتیب داد.

شاید در برابر خواننده این سؤال عرض اندام کند که به چند طریق میتوان چنین زنجیر یا حلقه‌ای را ترتیب داد؟ بدون اینکه وارد جزئیات محاسبه شویم میگوئیم که تعداد شیوه‌های مختلف تشکیل زنجیر (یا حلقهٔ) ۲۸ مهره‌ای خیلی زیاد، بیشتر از ۷ تریلیون میباشد. این است عدد دقیق آن:

۷ ۹۵۹ ۲۲۹ ۹۳۱ ۵۲۰

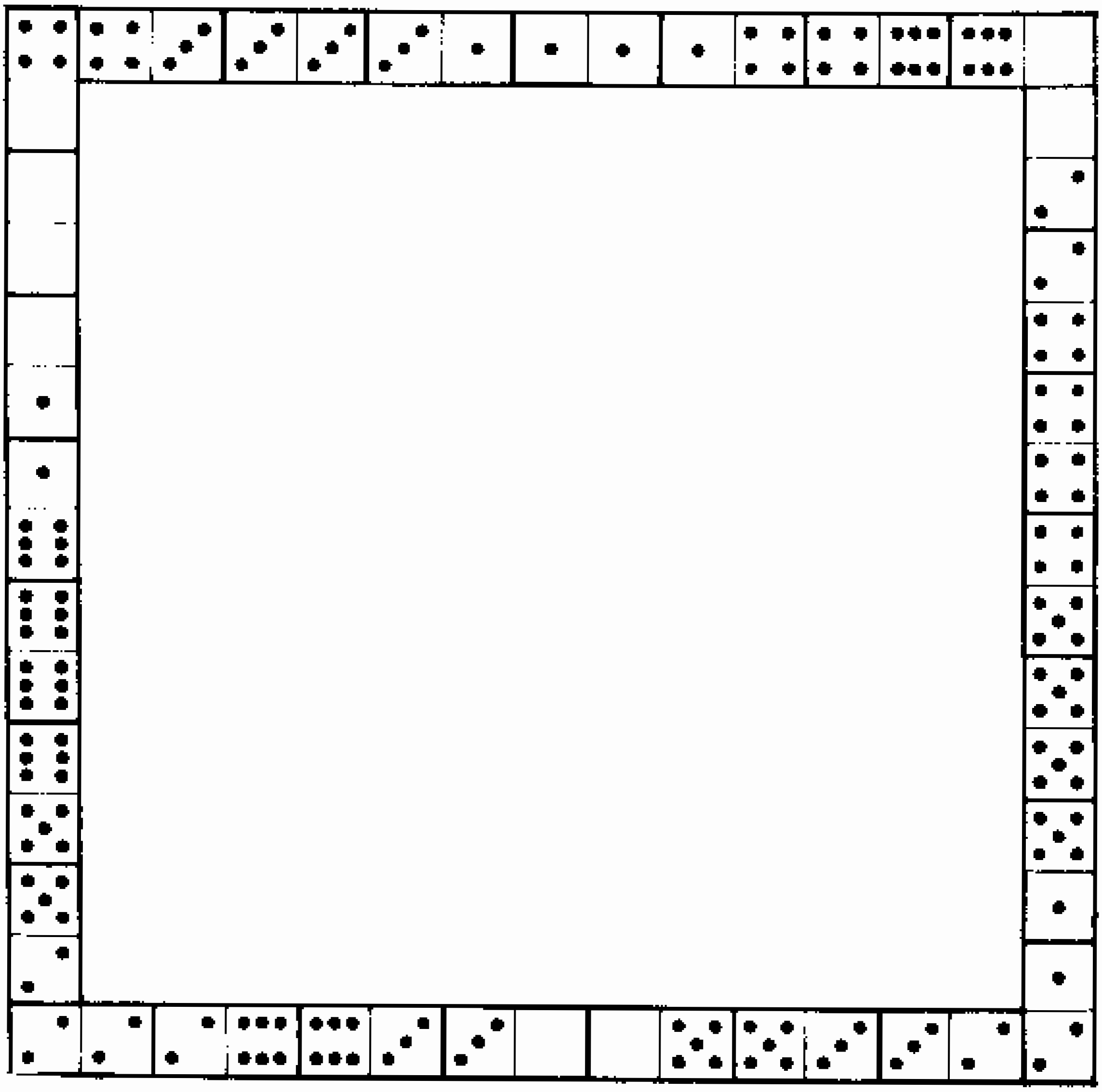
(این عدد عبارتست از حاصلضرب سازه‌های $۲^{۱۳} \times ۳^{۸} \times ۵ \times ۷ \times ۴۲۳۱$).

۱۸. حل این معمی از شرح حل مسئلهٔ قبلی نتیجه میشود. ما میدانیم که ۲۸ مهرهٔ دمینو را همیشه میتوان بصورت یک حلقهٔ بسته قرار داد. بنا بر این، هرگاه از این حلقه یک مهره را برداریم آنگاه:

۱) ۲۷ مهرهٔ باقی‌مانده یک زنجیر پیوسته دوسرآزاد را تشکیل میدهند؛
۲) نمرات انتهائی این زنجیر با نمرات مهرهٔ بر داشته شده یکی است.

بدین ترتیب با قایم نمودن یک مهرهٔ دمینو ما میتوانیم از قبل بگوئیم چه نمراتی در دو سر زنجیر متشکل از مهره‌های باقی‌مانده قرار دارد.

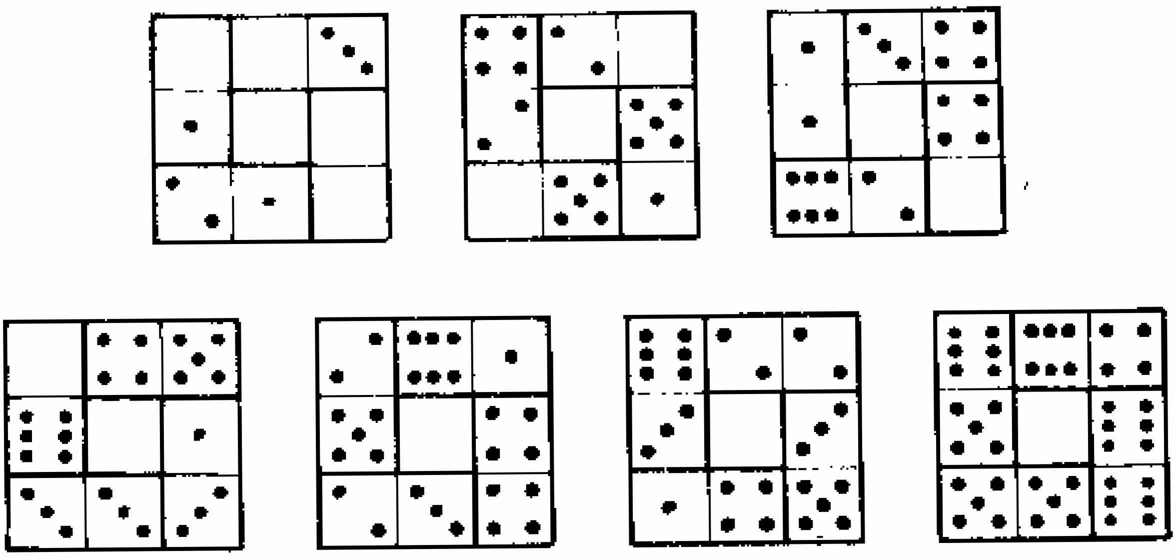
۱۹. حاصل‌جمع نمرات تمام اضلاع مربع مطلوب باید مساوی به ۱۷۶ = ٤ × ٤٤، یعنی ۸ خال بیشتر از مجموع نمرات مجموعهٔ کامل دمینو باشد (۱۶۸). البته این امر بخاطر این صورت میگیرد



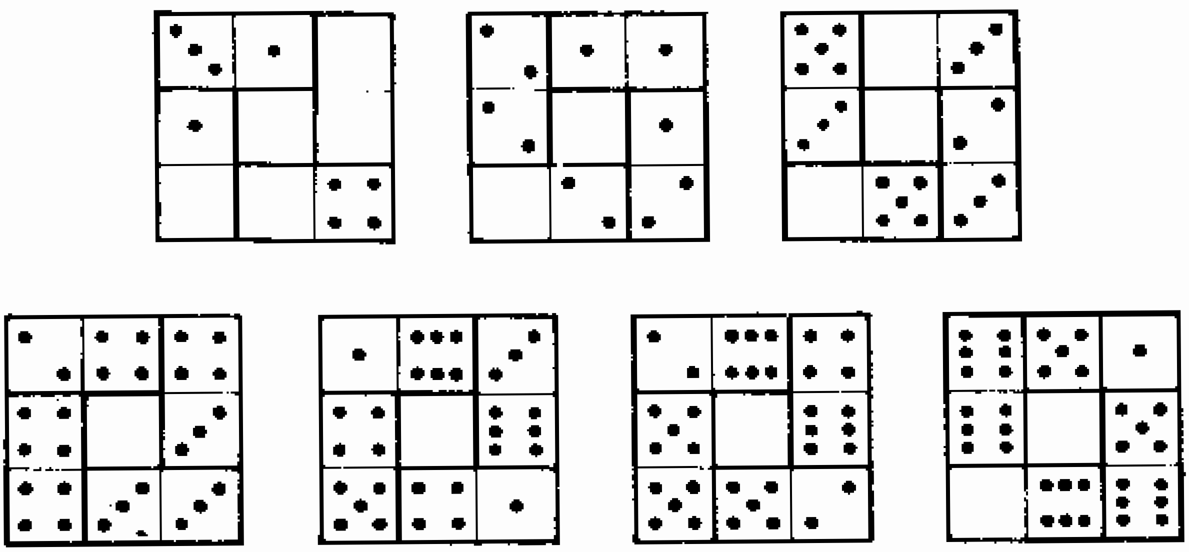
شکل ۱۵

که نمرات واقع در رئوس مربع دو بار حساب میشود. از اینجا نتیجه میشود که حاصل‌جمع نمرات واقع در رئوس مربع باید مساوی به ۸ باشد. این امر تا اندازه‌ای تجسس موقعیت مطلوب را تسهیل میکند لیکن یافتن آن خالی از اشکال نیست. راه حل این مسئله در شکل ۱۵ نشان داده شده است.

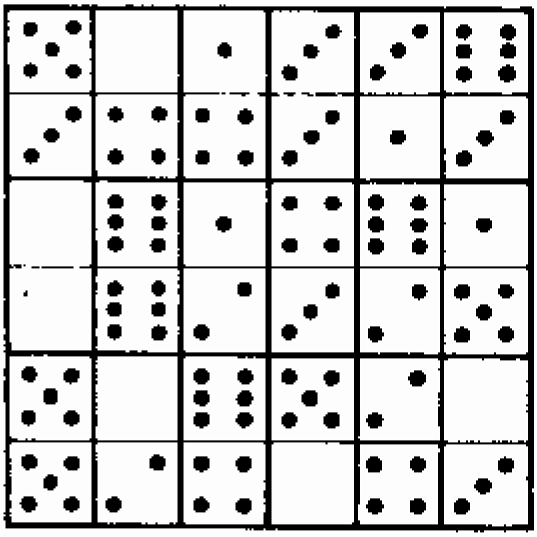
۲۰. از تعداد کثیر جواب‌های این مسئله، در زیر، دو جواب می‌آوریم. در جواب اول (شکل ۱۶)، داریم:



شکل ۱۶



شکل ۱۷



شکل ۱۸

۱ مربع با حاصل‌جمع ۳، ۲ مربع با حاصل‌جمع ۹،
۱ مربع با حاصل‌جمع ٦، ۱ مربع با حاصل‌جمع ۱۰،
۱ مربع با حاصل‌جمع ۸، ۱ مربع با حاصل جمع ۱٦

در جواب دوم (شکل ۱۷):

۲ مربع با حاصل‌جمع ٤، ۲ مربع با حاصل‌جمع ۱۰،
۱ مربع با حاصل‌جمع ۸، ۲ مربع با حاصل‌جمع ۱۲

۲۱. در شکل ۱۸ نمونهٔ مربع سحرآمیز با حاصل‌جمع نمرات ردیف مساوی ۱۸ نشان داده شده است.

۲۲. در زیر، بطور مثال، دو تصاعد با قدر تفاضل ۲ را میاوریم:
الف) ۰ — ۰؛ ۰ — ۲ ؛ ۰ — ٤ ؛ ۰ — ٦ ؛ ٤ — ٤ ؛ (یا ۳ — ٥)؛ ٥ — ٥ (یا ٤ — ٦).
ب) ۰ — ۱ ؛ ۰ — ۳ (یا ۱ — ۲)؛ ۰ — ٥ (یا ۲ — ۳)؛ ۱ — ٦ (یا ۳ — ٤)؛ ۳ — ٦ (یا ٤ — ٥)؛ ٥ — ٦.
مجموعاً میتوان ۲۳ تصاعد ٦ مهره‌ای تشکیل داد. مهره‌های ابتدائی آنها از قرار ذیل است:

الف) برای تصاعدهای دارای قدر تفاضل ۱ :

۰ — ۰   ۱ — ۱   ۱ — ۲   ۲ — ۲   ۲ — ۳
۱ — ۰   ۰ — ۲   ۰ — ۳   ۱ — ۳   ۴ — ۲
۰ — ۱   ۳ — ۰   ۴ — ۰   ۴ — ۱   ۵ — ۳
۲ — ۰   ۲ — ۱   ۳ — ۱   ۳ — ۲   ۴ — ۳

ب) برای تصاعدهای دارای قدر تفاضل ۲ :

۰ — ۰؛ ۲ — ۰؛ ۱ — ۰

۲۳. حالت مطلوب از حالت اولیه پس از ۴۴ حرکت ذیل حاصل میگردد (از راست به چپ) :

۱۴، ۱۱، ۱۲، ۸، ۷، ۶، ۱۰، ۱۲، ۸، ۷،
۴، ۳، ۶، ۴، ۷، ۱۴، ۱۱، ۱۵، ۱۳، ۹،
۱۲، ۸، ۴، ۱۰، ۸، ۴، ۱۴، ۱۱، ۱۵، ۱۳،
۹، ۱۲، ۴، ۸، ۵، ۴، ۸، ۹، ۱۳، ۱۴،
۱۰، ۶، ۲، ۱

۲۴. حالت مطلوب پس از ۳۹ حرکت ذیل بدست میآید :

۱۴، ۱۵، ۱۰، ۶، ۷، ۱۱، ۱۵، ۱۰، ۱۳، ۹،
۵، ۱، ۲، ۳، ۴، ۸، ۱۲، ۱۵، ۱۰، ۱۳،
۹، ۵، ۱، ۲، ۳، ۴، ۸، ۱۲، ۱۵، ۱۴،
۱۳، ۹، ۵، ۱، ۲، ۳، ۴، ۸، ۱۲

۲۵. مربع سحرآمیز دارای حاصل‌جمع ۳۰ پس از حرکات ذیل حاصل میگردد :

۱۲، ۸، ۴، ۳، ۲، ۶، ۱۰، ۹، ۱۳، ۱۵،
۱۴، ۱۲، ۸، ۴، ۷، ۱۰، ۹، ۱۴، ۱۲، ۸،
۴، ۷، ۱۰، ۹، ۶، ۲، ۳، ۱۰، ۹، ۶،
۵، ۱، ۲، ۳، ۶، ۵، ۳، ۲، ۱، ۱۳،
۱۴، ۳، ۲، ۱، ۱۳، ۱۴، ۳، ۱۲، ۱۵، ۳

۲۶. حتی بازی‌کن مجرب لابد خواهد گفت که در شرایط مذکور زدن گوی به دروازه از زدن آن بگوی دیگر آسانتر است زیرا