## روشهای انتگرال‌گیری:

در بخش قبلی بطور مفصل در مورد مفهوم و تعریف انتگرال بحث شد.

دیدیم که انتگرال‌گیری در اصل پادمشتق‌گیری[1] است یعنی پیدا کردن تابعی که (تابع اولیه) مشتق آن انتگرال ده را بدهد.

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow \frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

در این فصل می‌خواهیم روشهایی را بیان کنیم تا با آن بتوانید بعضی انتگرالها را بگیرید. تا بحال انتگرالهای زیر را گرفته‌ایم:

$$\int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + C \quad ; \ r \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int sinx dx = -cosx + C$$

$$\int cosx dx = sinx + C$$

حال می‌ماند با استفاده از قواعدی که در این فصل می‌آموزید انتگرال توابع بیشتری را بتوانید بگیرید.

در مورد تغییر متغیر در بخش قبل بحث شد باز مرور می‌کنیم:

---

[1] *Antidiffrentiate*

$$\int F'\big(g(x)\big)\, g'(x)\, dx = \int F'(g)\, dg = F(g)+C$$

**اگر بخواهیم انتگرال**

$$\int f(x)dx$$

**را بگیریم و تغییر متغیر $u = u(x)$ را انجام دهیم:**

$$du = u'(x)dx$$

$$\int f(x)dx = \int \frac{f(x)}{u'}u'dx = \int \frac{f(x)}{u'(x)}du$$

**باید بتوان $\frac{f(x)}{u'(x)}$ را برحسب $u$ نوشت:**

$$\frac{f(x)}{u'(x)} = h(u(x))$$

$$\Rightarrow \int f(x)dx = \int h(u)du$$

**آنچه که در مسائل اتفاق می‌افتد آنست که ما باید $u$ مناسبی پیدا کنیم که انتگرال $h(u) = \frac{f}{u'}$ ساده باشد.**

**مثال. انتگرال $tanx$ چه می‌شود؟**

**حل.**

$$\int tanx\,dx = \int \frac{sinx}{cosx}dx$$

**می‌دانیم که $\frac{dcosx}{dx} = -sinx$ پس $u = cosx$ انتخاب می‌کنیم.**

$$\Rightarrow \int \frac{-\sin x\,dx}{-\cos x} = \int -\frac{d\cos x}{\cos x} = -\int \frac{du}{u} = -ln|u|+C = -ln|cosx|+C$$

و با همین شیوه می‌توان نشان داد.

$$\int cotx\,dx = ln\left|sinx\right| + C$$

مثال. انتگرال $xe^{-x^2}$ چه می‌شود؟

حل. بهترین کار آنست که $du = -2xdx \Leftarrow u = -x^2$

$$= -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$$
$$= -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)$$

$$\int xe^{-x^2}dx = \int \frac{-2xe^{-x^2}dx}{-2} = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2}(-2xdx)$$

بعضی اوقات تغییر متغیر بگونه معکوس است یعنی فرض می‌کنیم مثلاً $x = h(q)$ آنوقت انتگرال

را برحسب $q$ می‌نویسیم:

$$\int f(x)\,dx = \int f(h(q))\,dh(q) = \int (foh)(q)\,h'(q)\,dq$$

که معکوس کارهای قبل است بعضی اوقات این روش است که جواب می‌دهد.

مثال. انتگرالهای $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ , $\frac{1}{1+x^2}$ را بگیرید.

حل. در مورد اول اگر $x = 1 - x^2$ بگیریم $\Leftarrow$ $du = -2xdx$ که $x = \pm\sqrt{1-u}$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \pm\frac{1}{\sqrt{u}}\frac{1}{\sqrt{1-u}}du$$

که چیز بدرد بخوری نمی‌شود.

بیایید کار معکوس را انجام دهیم: $x = sinq$

$$\Rightarrow 1-x^2 = 1-sin^2q = cos^2q \;\; ; \;\; dx = cosq\,dq$$

توجه کنید این تغییر متغیر بی‌اشکال است زیرا $0 > (1-x^2) \Leftarrow |x|<1$ که با انتخاب $x = sinq$ و $q \in \left(-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$ تمام $x$ها قابل قبول ایجاد می‌شوند.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int \frac{cos\theta d\theta}{\sqrt{cos^2\theta}} = \int \frac{cos\theta}{|cos\theta|}d\theta$$

در بازه مورد بحث یعنی $\left(-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$ ، $cosq > 0$ است پس

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int 1 dq = q + C$$

حال $q$ را باید برحسب $x$ جایگذاری کنیم، می‌دانیم که $x = sinq \Rightarrow q = sin^{-1}(x)$

پس

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = sin^{-1}(x) + C$$

در مورد $\frac{1}{1+x^2}$ بنظرتان چه نوع تغییر متغیری مناسب است؟

$$x = tanq \Rightarrow dx = dtanq = (1+tan^2q)dq = (1+x^2)dq$$

اینجا هم چون به ازای هر $x$ قطعاً $q \in \left(-\frac{p}{2},\frac{p}{2}\right)$ بطور یکتا موجود است تغییر متغیر بلامانع است:

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{1+x^2}{1+x^2}dq = \int dq = q + C$$

که $q = tan^{-1}(x) \Rightarrow tan^{-1}(x) + C$

**مثال.** انتگرال $\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ چه می‌شود؟

**حل.** طبق مثال قبل واضح است که

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sin^{-1}(x) + C$$

**امّا اگر یادتان باشد:**

$$y = \cos^{-1}(x) \Rightarrow \cos(y) = x$$

$$\Rightarrow \left(\cos(y)\right)' = 1 \Rightarrow -\sin y y' = 1$$

$$\Rightarrow y' = \left(\cos^{-1}(x)\right)' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}$$

$$\left(\cos^{-1}(x)\right)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

**پس باید**

$$\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \cos^{-1}(x) + K$$

**شود. این چگونه ممکن است؟**

**اگر دقت کرده باشید ثابت انتگرال‌گیری، انتگرال دوم را $K$ نوشتیم نه $C$.**

**اگر یادتان باشد اگر دو تابع $G,F$ تابع اولیه یک تابع باشند باید** $F(x) - G(x) = C$ **: ثابت**

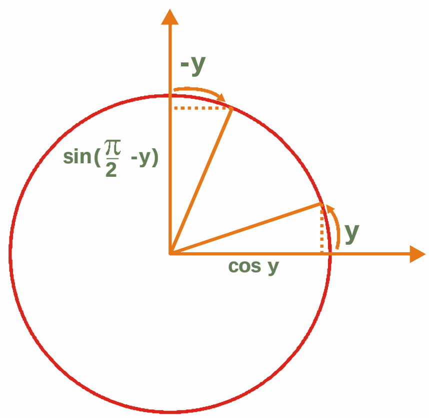
**پس حتماً فرق $\sin^{-1}(x)$ با $\cos^{-1}(x)$ در یک ثابت است.**

**می‌دانیم که:**

$$y = \cos^{-1}(x) \qquad y \in [0,\pi]$$

$x = cosy$

امّا $cosy = sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right)$




$$\Rightarrow x = sin\left(\frac{p}{2} - y\right)$$

$$\Rightarrow \frac{p}{2} - y = sin^{-1}(x)$$

که چون $y \in [0,p] \Rightarrow -\frac{p}{2} \le \left(\frac{p}{2} - y\right) \le +\frac{p}{2}$ و با برد $sin^{-1}$ همخوانی دارد.

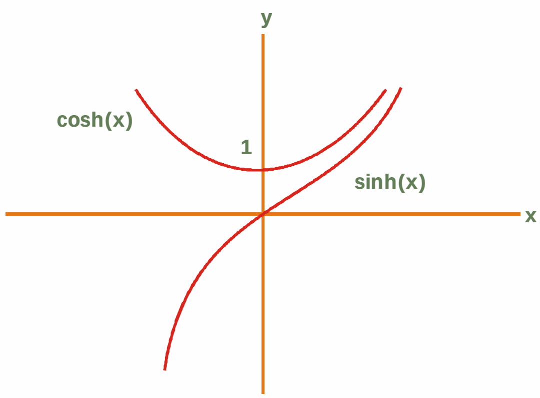
$$\Rightarrow \frac{p}{2} - cos^{-1}(x) = sin^{-1}(x) \Rightarrow cos^{-1}(x) = -sin^{-1}(x) + \frac{p}{2}$$

که همانطور که حدس می‌زدیم فرق این دو تابع صرفاً یک ثابت است یعنی: $K + \frac{p}{2} = C$

مثال. انتگرال $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ چه می‌شود؟

حل. اگر این بار هم $x = tan q$ آنگاه انتگرال به $\int \sqrt{1+tan^2 q}\, dq$ تبدیل می‌شود که فعلاً با روشهای کنونی آن را نمی‌توانیم بگیریم. پس چه تغییر متغیری بدهیم؟

توابع سینوس هیپربولیک[2] و کسینوس هیپربولیک را به فرم زیر تعریف می‌کنیم.




$$sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

خوبی این تعاریف در خواص زیر است:

$$(sinh(x))' = cosh(x)$$

$$(cosh(x))' = sinh(x)$$

$$cosh^2(x) = \frac{1}{4}\left(e^{2x} + 2 + e^{-2x}\right) = \frac{1}{4}\left(4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}\right) = 1 + sinh^2(x)$$

$$cosh^2(x) - sinh^2(x) = 1$$

حال کافی است در انتگرال $x = sinh(q)$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \int \frac{cosh q}{cosh q} dq = q + C$$

---

[2] hyperbolic

$$=\sinh^{-1}(x)+C$$

به همین صورت می‌توان نشان داد.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}=\cosh^{-1}(x)+C$$

## انتگرال توابع گویا

در مسائل با انتگرالهایی مشابه $\int\frac{x^3-3x+1}{x^4-1}dx$ زیاد برمی‌خوریم. به توابع مشابه این تابع توابع

گویا می‌گویند. یعنی اگر تابع $Q$ به فرم:

$$Q_{(x)}=\frac{P_n(x)}{P_m(x)}$$

تعریف شود که $P_m,P_n$ چند جمله‌ایهایی از درجه $m,n$ باشد آنگاه به $Q$ تابع گویا گویند. هدف از این

قسمت پیدا کردن راهی کلی برای محاسبه چنین انتگرالهایی است:

$$\int Q_{(x)}dx=\int\frac{P_n(x)}{P_m(x)}dx$$

اولین کاری که به ذهن می‌رسد آنست که $P_n$ را بر $P_m$ تقسیم کنیم تا خارج قسمت، که خود

چند جمله‌ای است، به سادگی انتگرال‌گیری شود:

$$Q_{(x)}=\frac{P_n(x)}{P_m(x)}=\frac{R_l(x)}{P_m(x)}+P_k(x)$$

که $P_k,R_l$ چند جمله‌ایهایی از درجه $k,l$ هستند. بدیهی است که $k<n$ , $l<m$ هستند. با این کار

مسئله ساده‌تر می‌شود زیرا انتگرال $P_k$ ساده است و چند جمله‌ای صورت هم کاهش درجه یافته است.

مثال. انتگرال $\frac{x^2}{x-3}$ را بگیرید:

حل.

$$= \int (x+3)dx + \int \frac{9}{x-3}dx = \frac{x^2}{2} + 3x + \ln|x-3| + C$$

$$\int \frac{x^2}{x-3}dx = \int \left( \frac{x^2-9}{x-3} + \frac{9}{x-3} \right) dx$$

در مثال فوق با تقسیم کردن $x^2$ بر $x-3$ حاصل $\left( x+3+\frac{9}{x-3} \right)$ شد که انتگرالش را بلد بودیم. البته پیداست که ابتدا در هر مسئله ما $\frac{P_n}{P_m}$ تا جای ممکن ساده می‌کنیم یعنی تمام عوامل مشترکشان را حذف می‌کنیم و در نهایت فرآیند قبل را انجام می‌دهیم.

حالا می‌ماند محاسبه $\int \frac{R_l}{P_m} dx$. ( که: $l < m$ )

هر چند جمله‌ای مانند $P_m$ را می‌توان به حاصل ضربهایی از چند جمله‌ایهای درجه یک و درجه دو تبدیل کرد. اگر $P_m(x) = 0$ دارای ریشه‌های $a_a$ باشد با تکرار $h_a$ آنگاه:

$$P_m(x) = P_j(x) \prod_a (x - a_a)^{h_a}$$

که $\sum h_a \leq m$ است و $j = m - \sum h_a$. طبق قضایایی قطعاً $j$ عدد زوجی خواهد بود.

در اصل $P_j(x)$ چند جمله‌ایست که هیچ ریشه‌ای ندارد. این جمله را می‌توان حاصلضرب $\frac{j}{2}$ چند جمله درجه دوم بدون ریشه نوشت:

$$\Rightarrow P_m(x) = A \prod_b (x^2 + b_b x + c_b)^{\in b} \prod_a (x - a_a)^{h_a}$$

بحث دیگری که وجود دارد تفکیک کسر است یعنی آنکه می‌شود هر تابع گویایی را تفکیک کرد.

طبق قضایایی این امکانپذیر است به این صورت که چنانچه $P_m$ (مخرج) را به حاصلضرب عواملش بفرم آنچه که گفته شد بنویسیم آنگاه:

$$Q_{(x)}=\frac{P_n}{P_m}=\frac{R_l}{P_m}+P_k=P_k+\sum_a\sum_{i=1}^{h_a}\frac{A_{ia}}{(x-a_a)^i}+\sum_b\sum_{j=1}^{\in b}\frac{B_{jb}x+C_{jb}}{(x^2+b_bx+c_b)^j}$$

که:

$$P_m=\prod_a(x-a_a)^{h_a}\prod_b(x^2+b_bx+c_b)^{\in b}$$

پس کافی است پس از انجام اعمال فوق بتوانیم انتگرالهای $\frac{A_{ia}}{(x-a_a)^i}$ , $\frac{B_{jb}x+C_{jb}}{(x^2+b_bx+c_b)^j}$ را بگیریم.

$$\int\frac{1}{(x-a)^i}dx=\begin{cases}\ln|x-a| & i=1\\ \left(\frac{1}{1-i}\right)\frac{1}{(x-a)^{i-1}} & i\neq 1\end{cases}$$

امّا انتگرال تابع درجه دوم را چگونه بگیریم؟

$$x^2+bx+c=(x^2+2\frac{b}{2}x+(\frac{b}{2})^2)+c-\frac{b^2}{4}=\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+c-\frac{b^2}{4}$$

برای حالتهای ما چون معادله ریشه ندارد قطعاً $4c>b^2$ است و $c-\frac{b^2}{4}>0$ است.

$$x^2+bx+c=(x+4)^2+r^2$$

که

$$\begin{cases}4=\frac{b}{2}\\ r=\sqrt{c-4^2}\end{cases}$$

حال $x+4=r\ tanq$ یا $x=r\ tanq-4$

$$\frac{x+g}{(x^2+bx+c)^j}=\frac{1}{2}\frac{2(x+4)}{\left((x+4)^2+r^2\right)^j}+\frac{g-4}{\left((x+4)^2+r^2\right)^j}$$

$$\int\frac{x+g}{(x^2+bx+c)^j}dx=\frac{1}{2}\int\frac{d\left[(x+4)^2+r^2\right]}{\left[(x+4)^2+r^2\right]^j}+(g-4)\int\frac{dx}{\left[(x+4)^2+r^2\right]^j}$$

$$=\begin{cases}\frac{1}{2}ln\left|(x+4)^2+r^2\right| \;;\; j=1\\ \frac{1}{2}\frac{1}{1-j}\frac{1}{\left[(x+4)^2+r^2\right]^{j-1}} \;;\; j\neq 1\end{cases}+I$$

$$I=(g-4)\int\frac{d\left[r\,tanq-4\right]}{r^{2j}\left[1+tan^2q\right]^j}=\frac{g-4}{r^{2j-1}}\int\frac{dq}{\left[1+tan^2q\right]^{j-1}}$$

امّا

$$1+tan^2q=1+\frac{sin^2q}{cos^2q}=\frac{1}{cos^2q}$$

$$\Rightarrow I=\frac{g-4}{r^{2j-1}}\int cos^{2(j-1)}q\;dq$$ که $j\ge 1$ است.

محاسبه این انتگرال را به بخشهای بعدی می‌سپاریم.

مثال. $\int\frac{3x^2+1}{x^4-2x^3+2x^2-2x+1}dx$ چه می‌شود؟

حل. ابتدا چند جمله‌ای مخرج را به فرم استاندارد در می‌آوریم.

$$x^4-2x^3+2x^2-2x+1=\left(x^4-2x^3+x^2\right)+\left(x^2-2x+1\right)$$

$$=x^2\left(x^2-2x+1\right)+\left(x^2-2x+1\right)=x^2(x-1)^2+(x-1)^2=\left(x^2+1\right)(x-1)^2$$

**حالا نوبت تفکیک کسر است:**

$$\frac{3x^2+1}{\left(x^2+1\right)(x-1)^2}=\frac{A_{11}}{x-1}+\frac{A_{21}}{(x-1)^2}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+1}$$

**$A_{21}$ به سادگی با ضرب طرفین در $(x-1)^2$ و قرار دادن $x=1$ بدست می‌آید:**

$$A_{21}=\left.\frac{3x^2+1}{x^2+1}\right|_{x=1}=\frac{4}{2}=2$$

**حال داریم:**

$$\frac{3x^2+1}{\left(x^2+1\right)(x-1)^2}-\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{A_{11}}{x-1}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+1}$$

$$\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)(x-1)}=\frac{A_{11}}{x-1}+\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+1}$$

**برای $A_{11}$ طرفین را در $x-1$ ضرب کرده و $x=1$ قرار می‌دهیم:**

$$A_{11}=\left.\frac{x+1}{x^2+1}\right|_{x=1}=1$$

**و در نهایت**

$$\frac{x+1}{\left(x^2+1\right)(x-1)}-\frac{1}{x-1}=\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+1}$$

$$\Rightarrow \frac{-x}{x^2+1}=\frac{B_{11}x+C_{11}}{x^2+1} \quad ; \quad B_{11}=-1 \quad ; \quad C_{11}=0$$

برای چک کردن می‌توان از سمت راست به چپ رسید:

$$\frac{2}{(x-1)^2}+\frac{1}{x-1}-\frac{x}{x^2+1}=\frac{2\left(x^2+1\right)+(x-1)\left(x^2+1\right)-x(x-1)^2}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}$$

$$=\frac{2x^2+2+x^3-x^2+x-1-x^3+2x^2-x}{(x-1)^2\left(x^2+1\right)}=\frac{3x^2+1}{\left(x^2+1\right)(x-1)^2}$$

که همان کسر ابتداست. حالا داریم:

$$\int\frac{3x^2+1}{\left(x^2+1\right)(x-1)^2}dx=\int\left(\frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=ln\left|x-1\right|-\frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{2}\int\frac{2x\ dx}{x^2+1}=ln\left|x-1\right|-\frac{2}{3}\frac{1}{(x-1)^3}-\frac{1}{2}ln\left|x^2+1\right|+C$$

**مثال.** انتگرال $secx$ چه می‌شود؟

$$\int secx\ dx=\int\frac{1}{\cos x}dx$$

**حل.** اگر یک $cosx$ در صورت و مخرج ضرب کنیم می‌توان مخرج را برحسب $sinx$ نوشت و مشتق آن در صورت خواهد بود.

$$\int\frac{cosx}{cos^2x}dx=\int\frac{cosxdx}{1-sin^2x}=\int\frac{dsinx}{1-sin^2x} \qquad u=sinx$$

$$=\int\frac{du}{1-u^2}=\int\frac{du}{(1-u)(1+u)}=\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-u}+\frac{\frac{1}{2}}{1+u}\right)du=-\frac{1}{2}ln\left|1-u\right|+\frac{1}{2}ln\left|1+u\right|+C$$

$$=ln\sqrt{\frac{1+u}{1-u}}+C \qquad :-1\le u\le 1$$

$$=ln\frac{1+u}{\sqrt{1-u^2}}+C$$

$$=ln\frac{1+sinx}{\left|cosx\right|}+C$$

$$=ln\left|secx+tanx\right|+C$$

**مثال.** انتگرال $cos(ax)sin(bx)$ چه می‌شود؟

**حل.**

$$cos(ax)sin(bx)=\frac{1}{2}\left(sin\left([a+b]x\right)+sin\left([b-a]x\right)\right)$$

$$\int cos(ax)sin(bx)=\frac{1}{2}\left(\frac{-cos[a+b]x}{a+b}-\frac{cos[b-a]x}{b-a}\right)+C$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b\left\{cos[a+b]x+cos[b-a]x\right\}+a\left\{cos[b-a]x-cos[b+a]x\right\}}{a^2-b^2}+C$$

$$=\frac{a\ sinax\ \ sinbx+b\ cosax\ \ cosbx}{a^2-b^2}+C \qquad b\ne a$$

برای حالت $a=b$

$$cos(ax)\ sin(ax)=\frac{1}{2}sin2ax$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{2}sin(2ax)dx=-\frac{\cos 2ax}{4a}+C$$

## انتگرال جزء به جزء[3]

فرض کنید بخواهیم انتگرال $xe^x$ را بگیریم، چه بکنیم؟

قبلاً دیدید که در این موارد تغییر متغیر می‌تواند مفید باشد. اگر $\frac{e^x}{2}2xdx$ را در نظر بگیریم.

$$\int xe^x dx = \int \frac{e^{\sqrt{x^2}}}{2} dx^2$$

که این انتگرال هم چندان جالب نیست می‌شود کار دیگری کرد $de^x == e^x dx$

$$\Rightarrow \int xe^x dx = \int \ln(e^x) de^x$$

که این انتگرال را هم بلد نیستیم.

اگر می‌شد رابطه خوبی برای حاصلضرب توابع بدست آورد شاید مشکل حل می‌شد.

$$\int fgdx = ?$$

از قواعد مشتق‌گیری داشتیم:

$$d(uv) = vdu + udv$$

فرض کنید. $fg = f\frac{du}{dx}$

یعنی $u = \int gdx$ آنوقت

$$\int fgdx = \int fu'dx = \int f\frac{du}{dx}dx = \int fdu$$

---

[3] *Part by Part*

طبق قاعده مشتق حاصلضرب

$$\int f du = \int d(fu) - \int u df = fu - \int u df = fu - \int u f' dx$$

به این قاعده، قاعده جزء به جزء گویند.

توجه کنید اولین گام شبیه تغییر متغیر بود منتهی در ادامه با استفاده از مشتق حاصلضرب همچنان انتگرال را برحسب $x$ می‌نویسیم و تغییر متغیری نمی‌دهیم. در این عمل از یکی از توابع $(g)$ انتگرال گرفته می‌شود و از دیگری $(f)$ مشتق. اگر $g, f$ مناسب انتخاب شوند انتگرال حاصل ساده‌تر می‌تواند باشد.

مثال. انتگرال $\ln(x)$ چه می‌شود؟

حل.

$$\int lnx \ dx = \int d\,(x \ \ lnx) - \int x \ \ d \ \ lnx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - x$$

در این مثال $g = 1$ بود و $u = x$.

مثال. انتگرال $x^2 e^x$ چه می‌شود؟

$$\int x^2 e^x dx = ?$$

حل. در اینجا چه چیز را $g$ و $f$ بگیریم؟

اگر $f = e^x, g = x^2$ بگیریم آنگاه

$$\int e^x x^2 dx = \int e^x d\frac{x^3}{3} = \int \left[ d\left( e^x \frac{x^3}{3} \right) - \frac{x^3}{3} de^x \right] = e^x \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} e^x dx$$

که کار خرابتر می‌شود پس بهتر است $f=x^2 \ , \ g=e^x$ بگیریم. اغلب بهتر است $f$ چیزی باشد که بعد از چند مشتق‌گیری مشتقش صفر شود یا به همان تابع اولیه تبدیل شود.

$$\int x^2e^x dx=\int x^2de^x=\int d\left(x^2e^x\right)-\int e^x dx^2$$

$$I=x^2e^x-2\int xe^x dx$$

حال در مورد $xe^x$ هم این روش را ادامه می‌دهیم، یعنی $f=x \ , \ g=e^x$

$$I=x^2e^x-2\int xde^x=x^2e^x-2\left\{xe^x-\int e^x dx\right\}=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$$

مثال. انتگرال $e^{ax}cosbx$ چه می‌شود؟

حل. می‌دانیم که $cosbx$ بعد از دوبار مشتق به خودش (البته با ضریب $-b^2$) تبدیل می‌شود پس بهتر است $f=cosbx \ , \ g=e^{ax}$.

$$I=\int cosbx \ e^{ax}dx=\frac{1}{a}\int cosbx \ de^{ax}=\frac{1}{a}cosbxe^{ax}+\frac{b}{a}\int sinbx \ e^{ax}dx$$

$$\int sinbx \ e^{ax}dx=\frac{1}{a}\int sinbx \ de^{ax}=\frac{1}{a}sinbx \ e^{ax}-\frac{b}{a}\int cosbx \ e^{ax}dx$$

$$=\frac{1}{a}e^{ax}sinbx-\frac{b}{a}I+C'$$

$$\Rightarrow I=\frac{e^{ax}}{a}\left(cosbx+\frac{b}{a}sinbx\right)-\left(\frac{b}{a}\right)^2 I+C'$$

$$\Rightarrow I\left(1+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right)=\frac{e^{ax}}{a}\left(\frac{b}{a}sinbx+cosbx\right)+C'$$

$$\Rightarrow I=e^{ax}\frac{acosbx+bsinbx}{a^2+b^2}+C$$

اگر یادتان باشد در گرفتن انتگرال از توابع گویا به انتگرالهایی با مخرج درجه برخـوردیم کـه بـا تغییر متغیر به فرم $\int cos^{2(j-1)}xdx \ , \ (j \geq 1)$، در آمد. در مثال زیـر راهــی بـرای محاسـبه آن پیــدا می‌کنیم.

**مثال.** انتگرال $\int cos^n xdx$ را بگیرید. $n$ عددی طبیعی است.

**حل.**

$$I_n := \int cos^n x \ dx = \int cos^{n-1} x \ cosx \ dx$$

$$= \int cos^{n-1} x dsinx = cos^{n-1} x \ sinx - \int sinx dcos^{n-1} x$$

$$= cos^{n-1} x \ sinx + (n-1) \int cos^{n-2} x \ sin^2 x dx$$

$$I_n = cos^{n-1} x sinx + (n-1) \int \left( cos^{n-2} x - cos^n x \right) dx$$ زیرا $\left(1\text{-}cos^2 \text{x}\right) = sin^2 x$

$$I_n = sinxcos^{n-1} x + (n-1) \underbrace{\int cos^{n-2} xdx}_{I_{n-2}} - (n-1) \underbrace{\int cos^n xdx}_{I_n}$$

$$\Rightarrow nI_n = sinxcos^{n-1} x + (n-1) I_{n-2}$$

$$I_n = \frac{1}{n} sinxcos^{n-1} x + \left(1 - \frac{1}{n}\right) I_{n-2}$$

این یک رابطه بازگشتی برای $I_n$ است اگر بتوانیم $I_1, I_0$ را حساب کنیم آنگاه با استفاده از رابطه بالا هر $I_n$ را می‌توانیم با تعداد مناسب حرکت به بالا بدست آوریم.

$$I_0 = \int cos^0 xdx = \int 1dx = x + C$$ ( $C$ را آخر سر می‌شود همیشه گذاشت)

$$I_1 = \int cosxdx = sinx + C$$

پس مشکل انتگرال از توابع گویای ما حل شد. $(n=2(j-1))$

**مثال**. انتگرال $x^2sinx$ را بگیرید.

**حل**.

$$\int x^2sinxdx=-\int x^2dcosx=-cosxx^2+\int cosxdx^2$$

$$=-x^2cosx+2\int xcosxdx$$

$$=-x^2cosx+2\int xdsinx$$

$$=-x^2cosx+2xsinx-2\int sinxdx$$

$$=-x^2cosx+2xsinx+2cosx+C$$

می‌توانیم دو تابع $g, f$ را بگونه‌ای بیابیم که

$$f^2-g^2=1$$
$$f'=g$$

ابتدا از رابطه اول مشتق ضمنی می‌گیریم:

$$2ff'-2gg'=0\Rightarrow ff'=gg'$$

با ترکیب با خاصیت دوم $f'=g$ ،

$$\Rightarrow g'=f$$

یعنی $f$ هم مشتق $g$ خواهد بود. پس ما در تابع می‌خواهیم که هر کدام مشتق دیگری است و

$f^2-g^2=1$ .

با جایگذاری شرط دوم $(f'=g)$ در رابطه اول:

$$f^2 - f'^2 = 1 \Rightarrow |f'| = \sqrt{f^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{dx} = \pm\sqrt{f^2 - 1}$$

$$\Rightarrow \frac{df}{\sqrt{f^2 - 1}} = \pm dx$$

$$\Rightarrow \int \frac{df}{\sqrt{f^2 - 1}} = \int \pm\, dx$$

**واضح است که + برای وقتی است که $f' > 0$ (یا همان $g$)و - برای $f' < 0$ (یا همان $g$).**

**با توجه به شرط $|f| \geq 1 \Leftarrow f^2 = g^2 + 1$ یعنی $f$ یا بالای خط $y = 1$ است یا پایین $y = -1$. اگر خواسته باشیم که $f$ پیوسته باشد صرفاً یکی از دو ناحیه مجاز می‌شود.**

**فرض کنید بخواهیم که $f \geq 1$ باشد، آنگاه به ازای هر مقدار $f$ تغییر متغیر زیر را می‌دهیم:**

$f = sec q$ **که** $q \in [0, \frac{p}{2})$

**این رابطه بین $q, f$ یک به یک است امّا ممکن است اگر $f(x)$ یک به یک نباشد رابطه $x, q$ یک به یک در نیاید.**

$$df = d sec q = sec q\, tan q\, dq$$

$$\int \frac{df}{\sqrt{f^2 - 1}} = \int \frac{sec q\, tan q}{\sqrt{sec^2 q - 1}} dq$$

**می‌دانیم که $sec^2 q = 1 + tan^2 q$ پس**

$$\int \frac{df}{\sqrt{f^2 - 1}} = \int sec q \frac{tan q}{|tan q|} dq = \int sec q\, dq$$

$tan q$ **به ازای $0 \leq q < \frac{p}{2}$ مثبت است.**

$$\int secq\,dq = \pm\int dx$$

**که + برای $f' > 0$ و - برای $f' < 0$ است.**

**برحسب مشتق $q$:**

$$f'(x) = \frac{df}{dq}q'(x) = secq\;tanq\,q'(x)$$

**از آنجا که در بازه $q \in [0, \frac{p}{2})$ هم $secq$ و هم $tan\,q$ مثبت هستند علامت $f'$ در این بازه با $q'$ یکی**

**است.**

**این را به زبان ریاضی می‌توان نوشت:**

$$q \in [0, \frac{p}{2})$$

$$sgn\left(f'(x)\right) = sgn\left(q'(x)\right)$$

**$sgn\left(h(x)\right)$به معنای علامت تابع $h(x)$ است بگونه‌ای که:**

$$sgn\left(h(x)\right)\begin{cases} +1 & h > 0 \\ 0 & h = 0 \\ -1 & h < 0 \end{cases}$$

**پس روابط به فرم زیر خواهد بود:**

$$\left|f'(x)\right| = \sqrt{f^2 - 1}\;;\;\left|f'\right| = f'\,sgn\left(f'\right)$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{sgn\left(f'\right)}\sqrt{f^2-1} = sgn\left(f'\right)\sqrt{f^2-1} \qquad \text{اگر } f' \neq 0$$

بدیهی است در حالتیکه $f'=0 \Leftarrow f=1$ و مشکلی در رابطه وجود نخواهد داشت:

$$f'=sgn(f')\sqrt{f^2-1}$$

از $|f'|=\sqrt{f^2-1}$ داریم اگر $f'=0 \Leftarrow f=1$ .

می‌دانیم که تابع پیوسته می‌خواهد باشد. اگر در دو $x$ , $x_2,x_1$ , $f'(x)=0$ شود آنگاه از آنجا که $f(x_2)=f(x_1)=1$ حتماً می‌بایست تابع در این فاصله یک نقطه مانند $c$ داشته باشد که $f'(c)=0$ زیرا ما می‌خواهیم مشتق تابع پیوسته باشد و اگر این فرآیند را ادامه دهیم آنگاه تمام فاصله بین $x_2,x_1$ دارای $f(x)=1$ , $x\in[x_1,x_2]$ خواهند شد. اگر نخواهیم چنین شود صرفاً باید تابع در یک نقطه مثلاً $x_c$ دارای خاصیت $f'(x_c)=0$ باشد. امّا علامت $f'$ در دو طرف $x_c$ چگونه است؟

داشتیم که

$$f^2-f'^2=1$$

با یکبار دیگر مشتق‌گیری:

$$2ff'-2f'f''=0$$

$$\Rightarrow f''=f$$

از آنجا که داریم:

$$f(x_c)=1\Rightarrow f''(x_c)=1$$

نتیجه می‌شود که تقعر منحنی رو به بالاست (در $x_c$) و بنابراین

$$\left.\begin{array}{l} x>x_c\Rightarrow f'>0 \\ x=x_c\Rightarrow f'=0 \\ x<x_c\Rightarrow f'<0 \end{array}\right\}\Rightarrow sgn(f')=sgn(x-x_c)$$

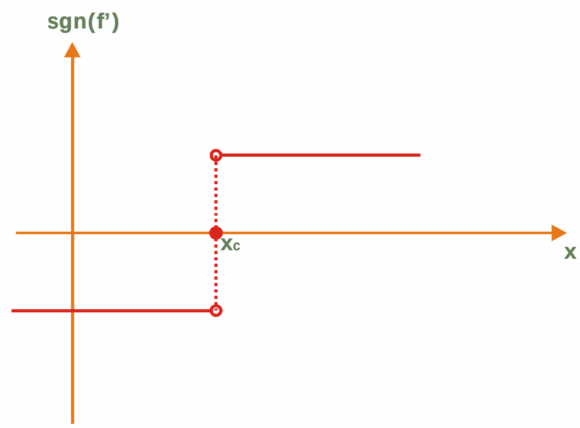
پس

$$\int \frac{df}{\sqrt{f^{2}-1}} = \int sgn\,(f\,')dx$$

$$= \int^{x_c} -dx + \int_{x_c} d_x$$

$$= \begin{cases} -x + x_c + k & x < x_c \\ x - x_c + k & x > x_c \end{cases}$$

که $k$ ثابت انتگرال‌گیری است.

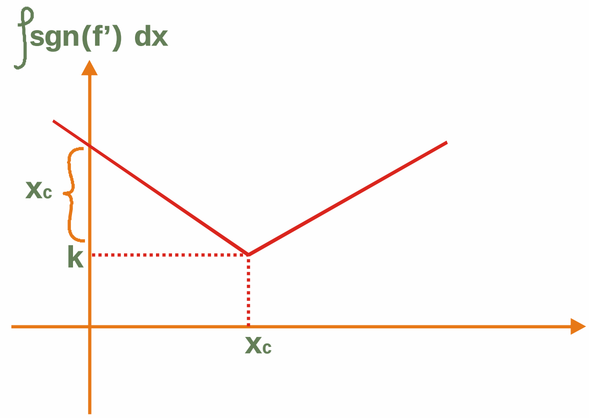



باز گردیم به اصل مسئله:

$$\int secq\,dq = \begin{cases} x_c - x + k & x < x_c \\ x - x_c + k & x \geq x_c \end{cases}$$

از محاسبات قبلی داریم

$$\int secq\,dq = ln\left|secq + tanq\right|$$




که هر دو برای مسئله ما مثبت هستند و $\tan\theta = \sqrt{f^{2}-1}\ ,\ \sec\theta = f$

$$\Rightarrow \ln\left|f+\sqrt{f^{2}-1}\right| = \pm(x-x_c)+k$$

می‌دانیم که $f(x_c)=1$ پس

$$\ln(1)=k \Rightarrow k=\mathbf{0}$$

این تنها جواب سازگار با مسئله است. به معناهایی $x_c$ و آزادی انتخاب آن بگونه کار ثابت انتگرال‌گیری را خواهد کرد.

$$f+\sqrt{f^{2}-1}=e^{\pm(x-x_c)}$$

$$\Rightarrow f^{2}-1=\left(e^{\pm(x-x_c)}-f\right)^{2}$$

$$\Rightarrow 2fe^{\pm(x-x_c)}=1+e^{\pm 2(x-x_c)}$$

$$\Rightarrow f=\frac{e^{\pm(x-x_c)}+e^{\mp(x-x_c)}}{2} \qquad : \begin{pmatrix} + & x \ge x_c \\ - & x < x_c \end{pmatrix}$$

واضح است که

$$e^{+(x-x_c)}+e^{-(x-x_c)}=e^{-(x-x_c)}+e^{+(x-x_c)}$$

پس اصلاً علامتهای مذکور در رابطه نهایی اهمیتی ندارند زیرا نتیجه یکسان است.

برای همه $x$ ها:

$$\Rightarrow f=\frac{e^{x-x_c}+e^{-(x-x_c)}}{2}$$

$$\Rightarrow g=f'=\frac{1}{2}\left(e^{x-x_c}-e^{-(x-x_c)}\right)$$

اینها همان $f=cosh\left(x-x_c\right)$ , $g=sinh\left(x-x_c\right)$ هستند.

مثال. انتگرال $\int\frac{dq}{3+cosq}$ چه می‌شود؟

حل.

$$z=tan\frac{q}{2}\ ;\ cosq=2cos^2\left(\frac{q}{2}\right)-1\ ;\ cos^2\frac{q}{2}=\frac{1}{1+tan^2\frac{q}{2}}=\frac{1}{1+z^2}$$

$$\Rightarrow cosq=\frac{2}{1+z^2}-1=\frac{1-z^2}{1+z^2}$$

$$sinq=2sin\frac{q}{2}cos\frac{q}{2}=2tan\frac{q}{2}cos^2\frac{q}{2}=\frac{2z}{1+z^2}$$

$$dz=\frac{1}{2}\left(1+tan^2\frac{q}{2}\right)dq=\frac{1}{2}\left(1+z^2\right)dq\Rightarrow dq=\frac{2dz}{1+z^2}$$

$$\Rightarrow\int\frac{dq}{3+cosq}=\int\frac{2dz}{\left(1+z^2\right)\left(3+\frac{\left(1-z^2\right)}{1+z^2}\right)}=\int\frac{dz}{2+z^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{dz\ /\sqrt{2}}{1+\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}tan^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)+C$$

$$\Rightarrow\int\frac{dq}{3+cosq}=\frac{\sqrt{2}}{2}tan^{-1}\left(\frac{tanq\ /2}{\sqrt{2}}\right)+C$$

**مثال.** $\int\sqrt{tanx}\,dx$ را بگیرید.

**حل.**

$$\sqrt{tanx}=u \qquad du=\frac{1}{2}\frac{1+tan^2x}{\sqrt{tanx}}dx=\frac{1}{2}\frac{1+u^4}{u}dx$$

$$\Rightarrow\int\sqrt{tanx}\,dx=\int\frac{2u^2}{1+u^4}du$$

حالا می‌بایست کسر را تفکیک کنیم. مخرج کسر چند جمله‌ای درجه چهار بدون ریشه است.

آن را به حاصلضرب دو چند جمله درجه دوم بدون ریشه می‌توان تبدیل کرد.

$$u^4+1=u^4+2u^2+1-2u^2=\left(u^2+1\right)^2-2u^2=\left(u^2+1+\sqrt{2}u\right)\left(u^2+1-\sqrt{2}u\right)$$

$$\frac{2u^2}{1+u^4}=\frac{Au+B}{u^2+\sqrt{2}u+1}+\frac{Cu+D}{u^2-\sqrt{2}u+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{u}{u^2-\sqrt{2}u+1}-\frac{u}{u^2+\sqrt{2}u+1}\right)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left\{\frac{2\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}-\frac{2\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}+\frac{\sqrt{2}}{\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}\right]$$

$$\Rightarrow \int \sqrt{tanx}\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2}} ln \left| \frac{\left(u-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(u+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2}} \right| + \frac{\sqrt{2}}{2} tan^{-1}\left(\sqrt{2}u-1\right) + \frac{\sqrt{2}}{2} tan^{-1}\left(\sqrt{2}u+1\right) + C$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}} ln \left| \frac{1-\sqrt{2tanx}+tanx}{1+\sqrt{2tanx}+tanx} \right| + \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{ tan^{-1}\left(\sqrt{2tanx}-1\right) + tan^{-1}\left(\sqrt{2tanx}+1\right) \right\} + C$$

**برای گرفتن انتگرالها لزوماً داشتن مطالب قبل ضروری نیست. در انتهای اغلب کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال جداولی از انواع مختلف انتگرالها هست که شما می‌توانید با تغییر متغیر انتگرال مورد نظرتان آن را به فرم یکی از انتگرالهای آن جداول در بیاورید و آن را حساب کنید.**

**یا می‌توانید از نرم افزارهایی همچون، $Maple, Mathematica, ...$ استفاده کنید.**

**مثلاً در نرم افزار $Mathematica\ \ V.5$، اگر دستور زیر را بنویسید:**

$$Integrate\left[x\,^\wedge 3E_{xp}\,[x]\ sin[x]\ ,\ x\right]$$

**(بعد از نوشتن دستور برای اجرا $Enter + Shift$ را بزنید)**

**دستور فوق**

$$\int x^3 e^x\, sinx\ \ dx$$

**را حساب می‌کند که خروجی آن:**

$$Out\,[1] = \frac{1}{2} e^x\left(-x\left(3-3x+x^2\right)cos\,[x] + \left(3-3x+x^3\right)sin\,[x]\right)$$

**خواهد بود. برای چک کردن انتگرال فوق می‌توانید مشتق خروجی را بگیرید به صورت:**

**(منظور از نماد %، جایگذاری آخرین خروجی در رابطه است:)** $Dt\,[\%, x\,]$

$$Out[2]=\frac{1}{2}e^{x}\left(-x\left(-3+2x\right)cos[x]-\left(3-3x+x^{2}\right)cos[x]+\right.$$

$$\left.\left(3-3x+x^{3}\right)cos[x]+x\left(3-3x+x^{2}\right)sin[x]+\left(-3+3x^{2}\right)sin[x]\right)$$

$$+\frac{1}{2}e^{x}\left(-x\left(3-3x+x^{2}\right)cos[x]+\left(3-3x+x^{3}\right)sin[x]\right)$$

**که ظاهراً با تابع انتگرالده ما نمی‌خواند. ولی اینطور نیست اگر از نرم افزار بخواهیم این خروجی را از نظر جبری و مثلثاتی ساده کند آنگاه می‌دهد.**

**(دستور مقابل را وارد کنید:)** $Simplify[\%]$

$$Out[3]=e^{x}x^{3}sin[x]$$

**البته دستورات انتگرال و مشتق را با استفاده از پلتهای سمت راست پنجره نرم افزار می‌توان به همان فرم نوشتاری نوشت که این در وضوح نتایج بسیار کمک می‌کند.**

**این نرم‌افزارها دارای دستوراتی همچون** $Series, Limit$**,...نیز هستند. همچنین با دستورهایی همچون** $Plot$ **می‌توانید تابع مورد نظرتان را بکشید.**